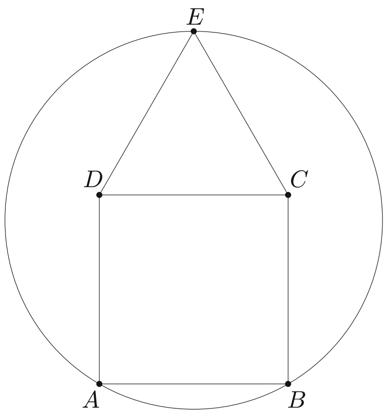
5. Adott a térben két körvonal, k_1 és k_2 úgy, hogy a síkjaik metszik egymást. Mutassuk meg, hogy ha a két kört egymásra lehet vetíteni egy alkalmas O pontból, akkor a két körvonal egymás inverze egy O középpontú inverzió szerint.

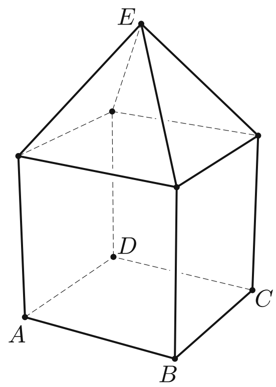
Kós Géza

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) A *bal oldali ábrán* egy 1 cm oldalhosszú négyzet és rajta egy 1 cm oldalhosszú szabályos háromszög látható. Mekkora annak a körnek a sugara, amely átmegy az A, B, E pontokon? (*5 pont*)





b) A *jobb oldali ábrán* egy 1 cm élhosszú kocka és rajta egy olyan 1 cm élhosszú szabályos gúla látható, amelynek minden oldallapja szabályos háromszög. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely átmegy az A, B, C, D, E pontokon? (*7 pont*)

2. Egy 2019 mezőből álló játéktáblánk van a következő *ábra* szerint:

1	2	3	4	5	1	2	...

(Az 1, 2, 3, 4, 5 számok vannak rajta ciklikusan, összesen 2019 hosszan.) Az 1-es mezőről indulunk, és minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám.

a) Összesen hányra lépünk rá a mezők közül? (*4 pont*)

b) Mennyi azon mezők számainak összege, amire nem lépünk rá? (*3 pont*) *c*) A játékszabályokat a következőképpen módosítjuk: egy szabályos hatoldalú kockával dobunk, ha a dobás eredménye az 1 és 5 közötti d szám, akkor az első mező, amire rálépünk az első d; míg ha a dobás hatos, akkor az első 1-esre lépünk, és innentől kezdve minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám. Az első száz mező körül várhatóan hány mezőt látogatunk meg? (*4 pont*)

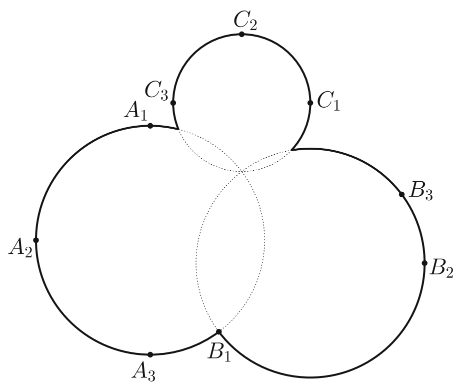
3. Piszkos Fred a kapitány hosszú tengeri útra indul hajójával. Egy 100 literes hordóban tiszta alkoholt visz magával. Fred a hordóból minden éjfélkor megiszik 5 liter löttyöt, majd felmegy a hídra és a hajó kormánykerekét eltekeri 30°-kal. Ezek után visszavonul a kabinjába és a következő éjfélig alszik. A matrózok minden nappal során feltöltik a hordót esővízzel, de a kormánykerékhez nem nyúlnak. Ha a hordó alkoholtartalma 50% alá csökken és a kapitány iszik belőle, akkor kijózanodik.

a) Az indulás után hanyadik éjfélkor józanodik ki Fred? (*4 pont*)

Fred fogadott egy hordó rumba Watson kapitánnyal, hogy az ő hajója gyorsabb, mint Watson fregattja. A verseny április elsején 23 óra 59-kor indult. A két hajó egyszerre indult el a nyugati irányban pontosan 10 000 kilométerre lévő közös célpont, a Rejtő-fok felé. Watson hajója állandó 8 csomó sebességgel haladt, míg Fred teknője 6 csomóval. (1 csomó sebesség megegyezik 1,85 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val.) Fred amíg részeg, minden páros sorszámú nap éjfélén balra tekeri 30°-kal a kormánykereket, míg a páratlan sorszámú napokon jobbra; amikor viszont kijózanodik, akkor azonnal a megfelelő irányba állítja a kormánykereket (és a helyes irányt a továbbiakban tartja is). A józan Piszkos Fred továbbá minden éjfélkor képes a hajó aktuális sebességét 10%-kal növelni (és ezt az egész következő nap tartani).

b) Melyik kapitány nyeri a fogadást? (*9 pont*)

4. Az *ábra* egy park térképét ábrázolja. A parkot három körvonal határolja; a körök rendre az $A_1(-2;3)$, $A_2(-7;-2)$, $A_3(-2;-7)$, illetve a $B_1(1;-6)$, $B_2(10;-3)$, $B_3(9;0)$, valamint a $C_1(5;4)$, $C_2(2;7)$, $C_3(-1;4)$ pontok által meghatározott körök köréírt körei.



a) Igazoljuk, hogy az $A_1A_2A_3$, a $B_1B_2B_3$, valamint a $C_1C_2C_3$ háromszögek mind derékszögű háromszögek. (*4 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az A_3, B_1, B_2, valamint a B_3, C_1, C_2, illetve a C_3, A_1, A_2 ponthármasok rendre egy-egy egyenesre esnek. (*3 pont*)

c) A park építésze egy „különleges” helyre kutat szeretne fúratni. Úgy tűnik neki, hogy a parkot alkotó három kör egy közös pontban metszi egymást (ami eléggé különleges lenne). Igaza van-e az építésznek? Ha igen, pontosan hol van ez a pont? (*8 pont*)

II. rész

5. *a*) Adjuk meg a $h(x) = \cos 2x - \sin 2x + 2\sin^2 x + 1$ függvény szélsőértékeit. Hol veszi fel a szélsőértékeit a függvény? (*6 pont*)

b) Legyen $f(x) = x^2 - 2x + 2$, míg a $g_n(x)$ a következőképpen definiált függvény-sorozat:

$$g_1(x) = f(x); \quad g_n(x) = f\big(g_{n-1}(x)\big) \text{ (ha } n \geqslant 2).$$

Adjuk meg $g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right)$ tizedesvessző utáni első 100 számjegyét. (*10 pont*)

6. Néhány vegyianyag-szállító kamionban különféle kóddal (A, B, C, D, E, F, G, H) ellátott palackokat szállítanak. A robbanásveszély miatt bizonyos palackokat nem szabad együtt szállítani. Ezeket a „tiltásokat” a következő táblázat tartalmazza:

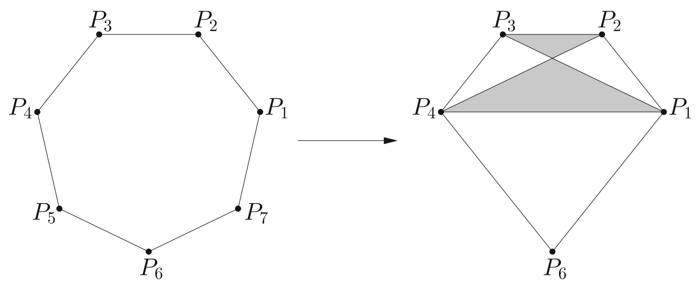
Vegyi anyag címkéje:	A	B	C	D
Ezzel nem szállítható:	B, E, F	A, C, G	B, E, H	F, G
Vegyi anyag címkéje:	E	F	G	H
Ezzel nem szállítható:	A, C, F, H	A, D, E, G, H	B, D, F, H	C, E, F, G

a) Legalább hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan egy-egy palackot kell elszállítanunk? (Minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.) (*6 pont*)

b) Hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan 5-5 palackot kell elszállítani? (Most is minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.) (*6 pont*)

c) Véletlenszerűen kiválasztva két különböző palackot mennyi az esélye annak, hogy azokat nem tehetjük egy kamionra? (*4 pont*)

7. Egy cég gyémánt alakú emblémája olyan ötszög, melynek csúcsai egy szabályos hétszög megfelelő (P_1, P_2, P_3, P_4, P_6) csúcsai (lásd *jobb oldali ábra*).



A cég 10 000 darab az emblémával ellátott kitűzőt rendelt. A nyomdai költségekben két tétellel kell kalkulálni: 10 000 centiméternyi vonal megrajzolása 50 euróba kerül, míg 10 000 cm^2-nyi terület besatírozása 200 euróba.

a) Mennyire rúg a 10000 kitűző nyomdai költsége, ha a szabályos hétszög egy-egy oldala 2 cm hosszú? (*10 pont*) *b*) A cég piárosa úgy találta, hogy az embléma nem elég színes. Szeretné a gyémánt 5 összefüggő részében megjeleníteni a piros, a fehér és a zöld színeket. Hányféle különböző ilyen három színű emblémát kaphatunk, ha azt szeretnénk, hogy az élben szomszédos részek színe különböző legyen, valamint mind a három szín meg is jelenjen az emblémában? (*6 pont*)

8. Egy speciális trópusi halaknak való felül nyitott, alul és oldalt üveg akváriumot építünk. Az akvárium paramétereire EU-előírások alapján a következőknek kell teljesülnie:

– Az akvárium térfogata 1 m^3 kell, hogy legyen;
– az akvárium alapja olyan téglalap, melynél az oldalak aránya 1 : 2;
– a négy oldalfal olyan üvegből készül, melynek ára 90 euró négyzetméterenként;
– az akvárium alsó lapja pedig olyan üvegből készül, melynek négyzetmétere 120 euróba kerül.

Milyennek válasszuk az akvárium éleit, hogy a lehető legkevesebb legyen az anyagköltség, és az hány euró lesz? (*16 pont*)

9. Hány olyan $0<\frac{a}{b}<1$ és $0<\frac{c}{d}<1$ $(a,b,c,d\in\mathbb{N}^+)$ nem egyszerűsíthető közönséges tört van, hogy az

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{c}{d}\right)$$

szorzat egész, valamint $a+b+c+d=100$? (*16 pont*)

Sztranyák Attila
Budapest

Megoldásvázlatok a 2019/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a* $\cos 2x=5\cos x-3$ *egyenletet, ha* $x\in[-\pi;2\pi]$. (*5 pont*)

b) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a*

$$2\sqrt{\frac{x}{5}}-\sqrt{x+2-\sqrt{x+4}}\geqslant 0$$

egyenlőtlenséget. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) $(2\cos^2 x-1)-5\cos x+3=0$; $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$;

$$(\cos x)_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}.$$

$(\cos x)_1=2$ nem lehetséges; $(\cos x)_2=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Az egyenletnek ezek közül három megoldása van az adott halmazon: $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.