A 60. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.

Második nap*

4. *Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló* (k,n) *számpárt, amire*

$$k! = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots\bigl(2^n-2^{n-1}\bigr).$$

Matolcsi Dávid megoldása. Legyen

$$T=(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\dots(2^n-2^{n-1}).$$

T-ben a 2 kitevője $0+1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$. A $k!$-ban a 2 kitevője

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{k}{2^i}\right]\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k}{2^i}=k.$$

Tehát, ha $k!=T$, akkor $\frac{n(n-1)}{2}\leqslant k$.

Nyilván $T<(2^n)^n=2^{n^2}$, és

$$k!>\prod_{j=\left[\frac{k}{2}\right]}^{k}j>\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}\geqslant\left(\frac{n^2-n}{4}\right)^{\frac{n^2-n}{4}}.$$

Így, ha $T=k!$, akkor

$$2^{n^2}>\left(\frac{n^2-n}{4}\right)^{\frac{n^2-n}{4}}.$$

Az $\frac{n^2}{4}$ gyök vonása szigorúan monoton növekvő függvény, így

$$2^4>\left(\frac{n^2-n}{4}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Itt $n\geqslant 11$-re

$$\left(\frac{n^2-n}{4}\right)^{\frac{n-1}{n}}>27^{\frac{10}{11}},\quad\text{és}\quad\frac{27^{10}}{16^{11}}>\frac{1{,}5^{10}}{16}>1.$$

*Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.

Ezek alapján $27^{10} > 16^{11}$, tehát $27^{\frac{10}{11}} > 16 = 2^4$. Vagyis $n \geqslant 11$-re nem teljesülhet az egyenlőség, azaz $n \leqslant 10$.

Az $n = 1$-re $T = 1$, ekkor $k = 1$ jó megoldás; $n = 2$-re pedig $T = 6$, így $k = 3$ is jó megoldás.

Az $n = 3$-ra $T = 168$, erről könnyen ellenőrizhető, hogy nem írható fel $k!$ alakban.

Az $n = 4$-re $T = 15 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 8$, ez sem írható föl $k!$ alakban.

Ha $n \geqslant 5$, akkor T osztható $2^n - 2^{n-5} = 31 \cdot 2^{n-5}$-nel, tehát osztható 31-gyel.

Így, ha $T = k!$, akkor $k \geqslant 31$. Ekkor viszont $k! > 16^{16} = 2^{64}$, ezért $2^{n^2} > T$ miatt $n > 8$, azaz $n \geqslant 9$, így T osztható $2^n - 2^{n-7}$-nel, ami osztható 127-tel. Ha viszont $k!$ osztható 127-tel, akkor $k \geqslant 127$, így $k! > 60^{60} > 2^{300}$ szerint $n > 17$. Ez azonban lehetetlen, mert már beláttuk, hogy $n \leqslant 10$.

Tehát csak két megoldása van a feladatban szereplő egyenlőségnek: $n = 1$ és $k = 1$, illetve $n = 2$ és $k = 3$.

5. *Bath Bankja érméket bocsát ki, melyeknek egyik oldalán H, másik oldalán T betű látható. Harrynek n ilyen érméje van, amelyek előtte balról jobbra, egy sorban vannak elrendezve. Harry ismételten végrehajtja a következő műveletet: ha pontosan $k > 0$ olyan érme van, amin H van felül, akkor megfordítja a balról k-adik érmét; máskülönben minden érmén T van felül, és ekkor Harry megáll. Például $n = 3$ esetén a THT sorozatból indulva $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ a lépések sorozata, ami három lépés után megáll.*

(a) *Bizonyítsuk be, hogy bármi legyen is a kiindulási sorozat, Harry véges sok lépés után megáll.*

(b) *Minden C kiindulási sorozatra jelölje $L(C)$ azt a lépésszámot, ahány lépés után Harry megáll. Például $L(THT) = 3$ és $L(TTT) = 0$. Határozzuk meg $L(C)$ átlagos értékét, amint C végigfut a 2^n lehetséges kiinduló sorozaton.*

Nagy Nándor megoldása. (a) Tekintsük azt a mutatót, amely mindig éppen a k-adik érmére mutat. Mivel minden fordítás során k értéke pontosan eggyel változik meg, ezért a fordítás után a mutató H és T esetén rendre balra, illetve jobbra lép egyet.

Hogyha a mutatótól jobbra már nincsen H érme, akkor pontosan k lépésen belül fejeződik be az eljárás, hiszen ekkor az első k érme mind H oldalával van felül.

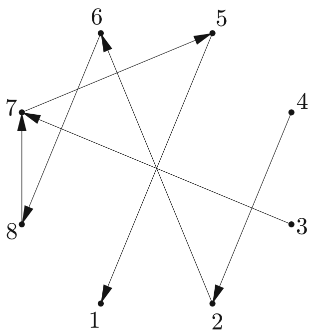
Minden más helyzetben k véges sok lépésben megdönti saját korábbi rekordját. Ennek igazolásához haladjunk végig a rekordokon. Abban az esetben, ha a mutató helyén T van, akkor egyből jobbra lép, k értéke 1-gyel nő, azaz megdöntötte a rekordot. Egyébként pedig egészen addig lép balra, amíg H oldalú érmékre mutat, de lesz tőle balra T oldalú is, hiszen az eltérő esetet már megvizsgáltuk. Ennél az érménél megfordul a mutató mozgása, és az imént T-re fordított elemeken is jobbra fog lépni a mutató, vagyis ismét megdönti a rekordját.

Tehát véges sok lépés alatt elő fog fordulni, hogy az első k érme H oldalával van felül, hiszen a rekord legfeljebb n lehet.

(b) Létezik bijekció az n érméből álló összes állapot és az $n+1$ érméből álló H-ra végződő összes állapot között, amelyre az egyes állapotok irányított gráfja izomorf lesz: A bijekcióhoz fordítsunk minden érmét a túloldalára, ezután az egész sorozatot tükrözzük (eleje és vége helyet cserél) és a sorozat végére tegyünk még egy H érmét.

Az $n=3$ esethez tartozó állapotok:

I.	TTT	TTH	THT	THH	HTT	HTH	HHT	HHH
	1	2	3	4	5	6	7	8
II.	HHHH	THHH	HTHH	TTHH	HHTH	THTH	HTTH	TTTH
	1	2	3	4	5	6	7	8



Az $n=3$ esethez tartozó irányított gráf

Ha az I. esetben k darab H érme volt, akkor a II. esetben $n-k+1$ lesz, így a mutató pozíciója az I. esetben a k., míg a II.-ban az $n-k+1$. helyen van. Mivel az érméket megfordítottuk, tükröztük és a végére tettünk még egy (H) érmét, így az I. esetbeli k. érme a II. esetben éppen az $n-k+1$., és a másik oldala van felül. Tehát a mutató éppen az ellenkező irányba mozog a II. esetben, mint az I. esetben, és a II. esetbeli új állapot éppen az I. esetbeli új állapot bijekció szerinti megfeleltetése.

Az n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $L(C)$ várható értéke $\frac{n(n+1)}{4}$. Kiinduló lépésként tekintsük az $n=1$ esetet, ahol valóban $\frac{1}{2}$ a lépésszám várható értéke. Az indukciós lépés során n-ről $(n+1)$-re lépünk, és két esetet különböztetünk meg:

– Ha a sorozat utolsó érméje T (az esetek fele), akkor a mutató pontosan ugyanúgy viselkedik, mint n érme esetén.

– Különben pedig idáig (az utolsó érméig) el kell jutnia egyszer a mutatónak, ami csakis akkor lehet, ha már az összes érme H oldalát mutatja. Minden egyes ilyen lépéssorozatnak a bijekció miatt megfeleltethető egy lépéssorozat az előző esetből, vagyis a mutató a végig H állapotig várható értékben $\frac{n(n+1)}{4}$ lépést fog tenni. Persze még el kell érni a végig T állapotot, ami további $n+1$ lépést igényel.

Mivel a két eset egyformán valószínű, így az $L(C)$ várható értéke a két szám átlaga:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{n(n+1)}{4}+(n+1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{4},$$

tehát működik az indukciós lépés.

6. *A hegyesszögű ABC háromszög, amiben $AB\neq AC$, beírt körének a középpontja I. Az ABC háromszög ω beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre a D, E, F pontokban érinti. A D-ből EF-re bocsátott merőleges egyenes és az ω kör máso-*

dik metszéspontja R. Az AR egyenes és az ω kör második metszésponta P. A PCE és a PBF háromszögek körülírt köreinek második metszéspontja Q.

Bizonyítsuk be, hogy a DI és PQ egyenesek az AI-ra A-ban állított merőleges egyenesen metszik egymást.

Haiman Milán megoldása. Legyen S az A csúcshoz tartozó külső szögfelező metszéspontja ID-vel. Megmutatjuk, hogy PS, (PCE) és (PBF) áthaladnak egy P-től különböző ponton. E pont lesz majd Q, ahonnan következik, hogy P, Q és S az állításnak megfelelően valóban kollineárisak.

A PS egyenes és a (PCE), (PBF) körök P-től különböző közös pontjának megmutatásához alkalmazzunk a beírt körre vonatkozó inverziót. Így a D, E, F, R, P pontok helyben maradnak. Az A, B, C, S pontok inverz képét jelölje rendre A', B', C', S'. Innen már elég megmutatni, hogy $(PS'I)$, $(PC'E)$ és $(PB'F)$ egy P-től különböző pontban találkoznak. Ez azzal ekvivalens, hogy a három kör koaxiális, ami pedig ekvivalens azzal, hogy a középpontjaik kollineárisak.

A három középpont kollineáris elhelyezkedését komplex számok segítségével bizonyítjuk, ahol a beírt kört tekintjük egységkörnek. Legyenek a, d, e, f, p, r, b, c, s az A, D, E, F, P, R, B', C', S' pontoknak megfelelő komplex számok. Az érintők metszéspontjára vonatkozó összefüggés miatt

$$a=\frac{2ef}{e+f}.$$

Ebből $\overline{a}=\frac{2}{e+f}$. Mivel $DR\perp EF$, $dr+ef=0$. Így $r=-\frac{ef}{d}$. Ekkor mivel A rajta van a PR húr egyenesén, $a+pr\overline{a}=p+r$. Ebből p értékére a

$$p=\frac{r-a}{r\overline{a}-1}=\frac{-\frac{ef}{d}-\frac{2ef}{e+f}}{-\frac{ef}{d}\cdot\frac{2}{e+f}-1}=\frac{ef(2d+e+f)}{2ef+de+df}$$

kifejezés adódik.

Következő lépésként számítsuk ki a $(PB'F)$ kör középpontját. Legyen a középpont j_B. A körülírt körre vonatkozó összefüggés alapján

$$j_B=\frac{\begin{vmatrix} p & p\overline{p} & 1\\ f & f\overline{f} & 1\\ b & b\overline{b} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & \overline{p} & 1\\ f & \overline{f} & 1\\ b & \overline{b} & 1\end{vmatrix}}.$$

Először a számlálóban álló determinánst számítjuk ki. Tudjuk, hogy $p\overline{p}=f\overline{f}==1$, mivel P és F rajta vannak az egységkörön. Másrészt $b=\frac{d+f}{2}$, mivel B' a DF

szakasz felezőpontja. Ezért $\overline{b}=\frac{d+f}{2df}$. A j_B számlálója így

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 \\ \frac{d+f}{2} & \frac{(d+f)^2}{4df} & 1 \end{vmatrix} = p+\frac{(d+f)^2 f}{4df}+\frac{d+f}{2}-f-\frac{(d+f)^2 p}{4df}-\frac{d+f}{2}=$$

$$=(p-f)\left(1-\frac{(d+f)^2}{4df}\right).$$

A j_B nevezője pedig

$$\begin{vmatrix} p & \frac{1}{p} & 1 \\ f & \frac{1}{f} & 1 \\ \frac{d+f}{2} & \frac{d+f}{2df} & 1 \end{vmatrix} = \frac{p}{f}+\frac{(d+f)f}{2df}+\frac{d+f}{2p}-\frac{(d+f)p}{2df}-\frac{f}{p}-\frac{d+f}{2f}=$$

$$=(f-p)\left(\frac{d+f}{2df}+\frac{d+f}{2pf}-\frac{p+f}{pf}\right).$$

Így j_B értéke

$$\frac{\frac{(d+f)^2}{4df}-1}{\frac{d+f}{2df}+\frac{d+f}{2pf}-\frac{p+f}{pf}}=\frac{p(d-f)^2}{2(pd+pf+d^2+df-2dp-2df)}=$$

$$=\frac{p(d-f)^2}{2(d-f)(d-p)}=\frac{p(d-f)}{2(d-p)}.$$

Ugyanígy a $(PC'E)$ kör j_C középpontja $\frac{p(d-e)}{2(d-p)}$. Ezután számítsuk ki a $(PS'I)$ kör középpontját. Vegyük észre, hogy s a beírt kör D pontjából húzott átmérőre A'-ból állított merőleges talppontja. Ezért

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{e+f}{2}+d+(-d)-d(-d)\overline{\left(\frac{e+f}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e+f}{2}+d^2\frac{e+f}{2ef}\right)=$$

$$=\frac{(e+f)(ef+d^2)}{4ef}.$$

Vegyük észre továbbá, hogy

$$\overline{s}=\frac{e+f}{4}\left(\frac{1}{ef}+\frac{1}{d^2}\right)=\frac{s}{d^2}.$$

A körülírt körre vonatkozó formulát $(PS'I)$-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{\begin{vmatrix} p & p\overline{p} & 1 \\ s & s\overline{s} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & \overline{p} & 1 \\ s & \overline{s} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{ps\overline{s} - p\overline{p}s}{p\overline{s} - \overline{p}s} = \frac{p\frac{s^2}{d^2} - s}{p\frac{s}{d^2} - \frac{s}{p}} = \frac{p(ps-d^2)}{p^2-d^2}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $\frac{p(d-e)}{2(d-p)}$, $\frac{p(d-f)}{2(d-p)}$ és $\frac{p(ps-d^2)}{p^2-d^2}$ kollineárisak. Alkalmazzunk $\frac{p}{2(d-p)}$ arányú nagyítást, akkor ekvivalens módon azt kell belátnunk, hogy $d-e$, $d-f$ és $\frac{2(ps-d^2)}{p+d}$ kollineárisak. Kiszámítva

$$ps = \frac{ef(2d+e+f)}{2ef+de+df} \cdot \frac{e+f}{4} \cdot \frac{d^2+ef}{ef} = \frac{(2d+e+f)(e+f)(d^2+ef)}{4(2ef+de+df)}$$

értékét,

$$2(d^2-ps) = 2 \cdot \frac{4(2ef+de+df)d^2 - (2d+e+f)(e+f)(d^2+ef)}{4(2ef+de+df)} =$$

$$= \frac{4d^3(e+f) + 8d^2ef - 2d^3(e+f) - d^2(e+f)^2}{2(2ef+de+df)} +$$

$$+ \frac{-2def(e+f) - ef(e+f)^2}{2(2ef+de+df)} =$$

$$= \frac{2d^3(e+f) + d^2(-e^2+6ef-f^2) - 2def(e+f) - ef(e+f)^2}{2(2ef+de+df)} =$$

$$= \frac{(2d-e-f)\big(d^2(e+f) + 4def + ef(e+f)\big)}{2(2ef+de+df)}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$p+d = \frac{2def + e^2f + ef^2 + 2def + d^2e + d^2f}{2ef+de+df} = \frac{d^2(e+f) + 4def + ef(e+f)}{2(2ef+de+df)},$$

adódik, hogy

$$\frac{2(d^2-ps)}{p+d} = \frac{2d-e-f}{2} = \frac{1}{2}\big((d-e)+(d-f)\big).$$

Vagyis $(PS'I)$ középpontja a $(PB'F)$ és $(PC'E)$ középpontjai által meghatározott szakasz felezőpontja. A három középpont tehát kollineáris, az állítást beláttuk. □