Ezt összevonva, majd rendezve az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$56a^2 + 211a + 198 = 0.$$

A gyökök: $a_1 = -2$; $a_2 = \frac{-99}{56}$. Mivel $a; b; c \in \mathbb{Z}$, ezért csak $a = -2$ lehet jó. Ekkor $b = 1$ és $c = 1$. Tehát $a = -2$; $b = 1$; $c = 1$.

Ellenőrzés a feladat feltételei alapján.

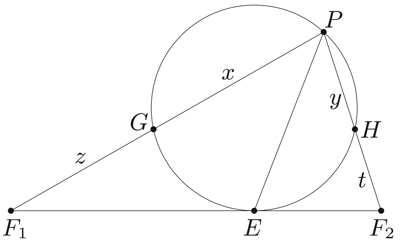
Fridrik Richárd
Szeged

Matematika feladat megoldása

B. 5026. *Adott ellipszis nagytengelyének végpontjaitól különböző tetszőleges P pontját kössük össze az F_1, F_2 fókuszpontokkal. Az $F_1PF_2\sphericalangle$ szögfelezője E-ben metszi F_1F_2-t. A P-n átmenő, F_1F_2-t E-ben érintő kör PF_1-et G-ben, PF_2-t H-ban metszi. Mutassuk meg, hogy GH hossza nem függ P megválasztásától.*

(*4 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

Megoldás. Legyen $PG = x$, $PH = y$, $GF_1 = z$, $HF_2 = t$. A szokásos jelölésekkel $F_1F_2 = 2c$, $PF_1 + PF_2 = 2a$, ahol $2a$ az ellipszis nagytengelyének, $\sqrt{a^2 - c^2} = b$ pedig a fél kistengelyének a hossza. A szögfelező-tétel alapján



$$F_1E = 2c \cdot \frac{x+z}{x+z+y+t} = 2c \cdot \frac{x+z}{2a}, \quad \text{és}$$

$$F_2E = 2c \cdot \frac{y+t}{x+z+y+t} = 2c \cdot \frac{y+t}{2a}.$$

Az F_1, illetve az F_2 pontnak a körre vonatkozó hatványa:

$$z(x+z) = F_1E^2 = \left(2c \cdot \frac{x+z}{2a}\right)^2, \quad \text{illetve} \quad t(y+t) = F_2E^2 = \left(2c \cdot \frac{y+t}{2a}\right)^2.$$

Innen

$$z = (x+z)\frac{c^2}{a^2} \quad \text{és} \quad t = (y+t)\frac{c^2}{a^2},$$

azaz egyrészt

$$x\frac{c^2}{a^2} = z\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = z\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{így} \quad x = z\frac{b^2}{c^2};$$

másrészt hasonlóan

$$y\frac{c^2}{a^2} = t\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = t\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{így} \quad y = t\frac{b^2}{c^2}.$$

Innen $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \frac{x+z}{y+t}$, tehát a PGH háromszög hasonló a PF_1F_2 háromszöghöz, a hasonlóság aránya

$$\frac{x}{x+z} = \frac{z\frac{b^2}{c^2}}{z\frac{b^2+c^2}{c^2}} = \frac{b^2}{b^2+c^2}.$$

Ezért

$$GH = F_1F_2 \cdot \frac{b^2}{b^2+c^2} = 2c \cdot \frac{b^2}{b^2+c^2},$$

ami valóban független a P pont választásától.

Geretovszky Anna (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)

26 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 23 versenyző: Baski Bence, Beke Csongor, Bencsik Ádám, Csaplár Viktor, Geretovszky Anna, Győrffi Ádám György, Hámori Janka, Hegedűs Dániel, Jánosik Áron, Nagy Nándor, Nguyen Bich Diep, Osztényi József, Rareş Polenciuc, Sándor Péter, Sebestyén Pál Botond, Szabó Kornél, Telek Zsigmond, Tiderenczl Dániel, Tóth Ábel, Várkonyi Zsombor, Velich Nóra, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 2 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

Polygon pályázat matematikából középiskolásoknak

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete pályázatot hirdet középiskolás diákok (9–12. évfolyam) számára.

A pályázat témája:

Középiskolai matematikához kapcsolódó problémák, érdekességek

Ami biztosan ide tartozik: hogyan lehet egy ismert feladatot folytatni, újszerű és érdekes feladatok vagy trükkös megoldások, régi korok matematikája, hétköznapok matematikája, a matematika és a természettudományok kapcsolata, gyakorlati alkalmazások, informatikai alkalmazások és kapcsolatok (például algoritmusok) stb. Pályázni egyénileg lehet, vagy maximum 3 fős csapattal. A pályamunkákat a Bolyai Intézet oktatóiból álló zsűri fogja elbírálni.

Díjak (csapat esetén a jutalom megoszlik a tagok közt):
I. díj: 25 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
II. díj: 20 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
III. díj: 15 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
Dicséret: Polygon könyv.