Meg kell viszont említeni, hogy Segner megosztó egyéniség volt. Nem kedvelte a németeket, a magyar diákokat viszont pártfogolta. Nagy tudása miatt becsülték, de megalkuvást nem ismerő természetét sokan nem kedvelték.

Emlékét elsősorban Debrecen, Pozsony és Halle őrzi több-kevesebb viszontagsággal. Debrecenben, a Klinika területén, 2017 októberében állították fel újra a Mikus Sándor Kossuth-díjas szobrászművész által 1974-ben készített Segner-szobrot.

A KöMaL 1969. márciusi számában kitűzött **F. 1655.** feladatban igazolni kellett az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d > 0)$ valós együtthatós polinom $f(x_0)$ értékének $(0 < x_0 < 1)$ grafikus úton való megkeresésére Segner által adott eljárás helyességét.

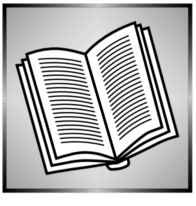
Dörrie: A diadalmas matematika című könyvében pedig az *Euler-problémának* a Segner által adott megoldását találjuk meg. Euler 1751-ben Goldbach-hoz írt levelében vetette fel ezt a problémát: *„Az n-oldalú síkbeli konvex sokszög hányféleképpen bontható fel egymást nem metsző átlók segítségével háromszögekre?”*

Kántor Sándorné Varga Tünde

Megjegyzés. 2018 tavaszán jelent meg Kovács László *Segner János András: Egy jeles hungarus a 18. századból* című könyve, amely innen letölthető: `http://real.mtak.hu/74845`.

A könyv címlapján látható Reibenstein festménye (`http://math.bme.hu/~hujter/segner.jpg`), az a Segnerről készült arckép, amely a KöMaL hátsó borítóján is látható. Az érdeklődők számára ajánljuk az Érintő online matematikai lapok 2018. júniusi cikkét: `http://ematlap.hu/index.php/interju-portre-2018-06/692-segner-janos-andras-a-matematikatanar`, vagy azt a videót, amelyben Gazda István bemutatja a Segner-kötetet:

`https://drive.google.com/open?id=1MBElpuOP8IKcSxQRx92mu_6xpcqpzzqy`.



Feynman és a legkisebb hatás elve

Egy emlékezetes feladat

Az 1930-as évek elején történt, hogy a középiskolában unatkozni látszó (később Nobel-díjas fizikus) *Richard Feynmant* tanára a következő feladattal kívánta felélénkíteni: Győződjön meg arról, hogy egy eldobott tárgy két adott időpont között (adott repülési idő mellett) éppen azt a röppályát „választja”, amelyet a mechanikai *legkisebb hatás elve* (másnéven *Hamilton-elv*) előír számára [1]. Az elv szerint a repülés kezdeti t_1 és végső t_2 időpontja közötti $t_2 - t_1 = T$ időben *valamennyi elképzelhető mozgáspálya közül* az valósul meg, amelyen a K kinetikus és V potenciális energia különbségének, az $L(t)=K(t)-V(t)$ függvénynek a mozgás során vett időbeli átlagértéke, amit $\langle L\rangle$ módon jelölünk, minimális[1].

Feynman ezt az elvet „elbűvölően érdekesnek" találta, és lelkesedése az évek során sem csökkent. Az addig csak a klasszikus fizikában alapvető hatáselv, pályafogalom Feynman nyomán bekerültek a részecskefizika kvantummechanikai eszköztárába.

Mivel a legkisebb hatás elve a mai középiskolásokat is érdekelheti, nézzük meg Feynman feladatát egy speciális esetben, ahol elegendó az egyenletesen gyorsuló mozgás ismerete, a matematikai analízis módszereire, variációszámításra nincs szükség.

Az elv működésben

A kiindulási helyzet: valaki $t_1=0$ pillanatban labdát dob fel az x_{a} távolságban álló ház y_{a} magasan lévő emeleti ablakában várakozó társának. Az ablak vízszintes (x) és függőleges (y) tengelyeken mért koordinátái a mozgás síkjában $(x_{\mathrm{a}}, y_{\mathrm{a}})$, a labdáé a feldobás pillanatában $(0,0)$. Az iskolában tanultak szerint a labda pályája parabola, a mozgást leíró egyenletek a t idő függvényében

$$x=ut, \qquad y=-\frac{g}{2}t^2+\left(\frac{uy_{\mathrm{a}}}{x_{\mathrm{a}}}+\frac{gx_{\mathrm{a}}}{2u}\right)t \tag{1}$$

(ahol g a nehézségi gyorsulás). A repülés teljes T idejét az x irányú, állandó $v_x=u$ sebesség rögzíti: $T=x_{\mathrm{a}}/u$. A kicsit szokatlan alakban felírt (1) összefüggésben a függőleges irányú kezdősebességet az $y(t=T)=y_{\mathrm{a}}$ feltétel rögzíti.

Ha tehát az elv „működik", akkor például a $(0,0)$ és az$(x_{\mathrm{a}}, y_{\mathrm{a}})$ pontokon átmenő, ugyanakkora T repülési idővel, de egy *tetszőlegesen* választott a paraméterrel jellemzett,

$$x=ut, \qquad y=-at^2+\left(\frac{uy_{\mathrm{a}}}{x_{\mathrm{a}}}+\frac{ax_{\mathrm{a}}}{u}\right)t \tag{2}$$

egyenletekkel leírt parabolapályán az $L(t)=K(t)-V(t)$ (az ún. Lagrange-függvény) *időbeni átlagértéke*, $\langle L\rangle$, bármely $a\neq g/2$ választása esetén *nagyobb kell legyen*, mint a ténylegesen megvalósuló $a=g/2$ pálya esetén.

Megjegyzés. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a labda mozgása x irányban egyenletes. A legkisebb hatás elve megengedné ugyan, hogy másféle időfüggésű mozgásokra is kiszámítsuk a Lagrange-függvény átlagát, és ezek minimumát keressük, de ekkor ismét a variációszámítás matematikai nehézségeibe ütköznénk. Ha olyan mozgások körében keressük a legkisebb hatást, amelyek mindössze egyetlen paramétertől, az a mennyiségtől függenek, a probléma egy egyváltozós, ráadásul kvadratikus függvény szélsőértékének

[1] A szakirodalomban a „legkisebb hatáson" az $S=(t_2-t_1)\langle L\rangle$ *hatásfüggvény* minimumát (általánosan stacionárius, vagyis a pálya kis változtatására „első közelítésben" változatlanul maradó) értékét értik. De mivel (t_2-t_1) rögzített, S minimuma egyben $\langle L\rangle$ minimuma is. (Az átlagértéket használó megfogalmazás Feynmantól ered [1].) A „pálya" itt nemcsak a pályagörbe *alakjára* vonatkozik, az elv a pályagörbe meghatározásán túl a megvalósuló mozgás teljes, tér- és időbeli leírását adja.

megkeresésére egyszerűsödik, ez pedig elemi úton, (teljes négyzetté alakítással) megoldható.

A (2) egyenletekkel leírt mozgás x irányban egyenletes, y irányban egyenletesen gyorsuló, ezért

$$v_x = u, \qquad v_y = -2at + \left(\frac{uy_\mathrm{a}}{x_\mathrm{a}} + \frac{ax_\mathrm{a}}{u}\right).$$

Ezzel az m tömegű tárgy Lagrange-függvénye:

$$L = K - V = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) - mgy =$$

$$= \frac{m}{2}\left[u^2 + \left(-2at + \frac{uy_\mathrm{a}}{x_\mathrm{a}} + \frac{ax_\mathrm{a}}{u}\right)^2\right] - mg\left[-at^2 + \left(\frac{uy_\mathrm{a}}{x_\mathrm{a}} + \frac{ax_\mathrm{a}}{u}\right)t\right],$$

ami $u = x_\mathrm{a}/T$ felhasználásával így is felírható:

$$L = \frac{m}{2}\left[\frac{x_\mathrm{a}^2}{T^2} + \left(-2at + \frac{y_\mathrm{a}}{T} + aT\right)^2\right] - mg\left[-at^2 + \left(\frac{y_\mathrm{a}}{T} + aT\right)t\right].$$

Mivel ez a kifejezés t-ben kvadratikus, időbeli átlagértéke elemi számolással megkapható.

$$\langle L\rangle = \langle A\cdot t^2 + B\cdot t + C\rangle = A\langle t^2\rangle + B\langle t\rangle + C,$$

ahol

$$A = ma(2a+g),$$

$$B = -m(g+2a)\left(\frac{y_\mathrm{a}}{T} + aT\right),$$

$$C = m\left(\frac{x_\mathrm{a}^2 + y_\mathrm{a}^2}{2T^2} + \frac{a^2T^2}{2} + ay_\mathrm{a}\right)$$

időfüggetlen kifejezések.

Látható, hogy csak t^2 és t átlagára van szükségünk a $(0,T)$ intervallumon, ami definíció szerint a függvény alatti terület elosztva az időintervallum hosszával. A t^2 parabola alatti területet a $(0,T)$ szakaszon már Arkhimédész kiszámította [2], ez $\frac{1}{3}T^3$, tehát $\langle t^2\rangle = \frac{1}{3}T^2$, és nyilvánvalóan $\langle t\rangle = \frac{1}{2}T$. Ezzel, valamint A, B és C beírásával kapjuk:

$$\langle L\rangle = \langle K - V\rangle = \frac{m}{2}\left[\frac{1}{3}T^2\left(a - \frac{g}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_\mathrm{a}^2 + y_\mathrm{a}^2}{T^2} - gy_\mathrm{a} - \frac{g^2T^2}{12}\right)\right].$$

Ez a kifejezés $a = \frac{g}{2}$-nél valóban minimális, bármely „hegyesebb” $(a > g/2)$ vagy „laposabb” $(a < g/2)$ pálya (és az $a = 0$ egyenes is) nagyobb $\langle L\rangle$-re vezet.

De honnan tudja a labda?

A legkisebb hatás elve tehát parabolapályákra szorítkozva beigazolódott, de az elv *minden más alakú pályát* tekintetbe véve is a jó eredményt adja [1].[2] De hogyan? A labda ismeri a távoli jövőjét? Tudja minden $0 < t < T$ pillanatban, merre kell továbbrepülnie ahhoz, hogy a már megtett és a *még hátralévő utat* is magában foglaló egész pályájára számított $\langle L\rangle$ átlagérték (és vele az S hatásfüggvény) valamennyi elképzelhető pálya közül a legkisebbnek bizonyuljon?

A távoli jövő előrelátása a *klasszikus mechanika szerint* valójában nem szükséges, mert a legkisebb hatás elvéből *matematikailag következnek* a labda *közvetlen* jövőjét minden helyen és időpontban meghatározó Newton-féle mozgásegyenletek (és viszont, a Newton-egyenletekből levezethető a hatáselv), ezért nem csoda, hogy a megvalósuló pálya éppen az, amelyen $\langle L\rangle$ minimális. A hatáselv a klasszikus mechanikában egyszerűen a mozgásegyenletek matematikailag tömör, előnyös (koordináta-rendszertől független) megfogalmazásának tekinthető.

De ha ez csak egyszerű matematika, mit talált korának egyik legnagyobb fizikusa (aki idén éppen 100 éves lenne) a legkisebb hatás elvében „elbűvölően érdekesnek”? Hogyan „vizsgálják meg” a részecskék a kvantumfizika Feynman-féle megfogalmazásában az összes elképzelhető pályát ahhoz, hogy kiválasszák az optimálisat, a megvalósulót? Erről egy következő írásban lesz szó, ahol a legkisebb hatás elve és néhány további, hasonlóan „célt megfogalmazó” (integrális) fizikai elv kapcsolatára is fény derül.

Irodalom

[1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Mai fizika 6.,* 71. fejezet, Műszaki Könyvkiadó, 1970.

[2] Simonovits András: *Válogatott fejezetek a matematika történetéből,* 25. old., Typotex, 2009.

Solt György
Svájc, Zug

Megoldásvázlatok a 2018/7. szám emelt szintű fizika gyakorló feladatsorához

Tesztfeladatok

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	D	A	A	B	A	B	B	A	D	D	C	D	C	B

[2] A legkisebb hatás elvét *L. Euler* (1707–1783) és *J. L. Lagrange* (1736–1813) ilyen irányú eredményeit felhasználva mai formájában *W. R. Hamilton* (1805–1865) fogalmazta meg 1834-ben.