B. 4988. Egy $(m+2)\times(n+2)$-es táblázatnak levágjuk a négy darab 1×1 méretű „sarkát”. Az így kapott csonka táblázat első és utolsó sorának, illetve első és utolsó oszlopának minden mezőjére egy-egy (tetszőleges) valós számot írunk.

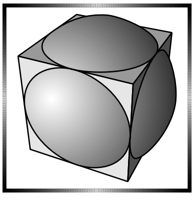
Igazoljuk, hogy a táblázat maradék $m\times n$-es „belseje” egyértelműen kitölthető valós számokkal úgy, hogy minden ide eső szám megegyezzen a négy szomszédjának átlagával.

(*6 pont*) (*Iráni feladat*)

B. 4989. Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalainak felezőpontjai rendre D, E és F. Jelölje a háromszög súlypontját S. Tegyük fel, hogy az AFS, BDS és CES háromszögek kerülete egyenlő. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög szabályos.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2018. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (734–736.)

Október havi számunkban az A jelű feladatok téves sorszámozással kerültek kitűzésre. A sorszámokat helyreállítjuk, a téves sorszámmal beküldött októberi feladatokat elfogadjuk. A hibáért elnézést kérünk.

A. 734. Tetszőleges, 3-mal nem osztható pozitív egész m-re tekintsük az $\{1,2,\ldots,m-1\}$ halmazon az $x\mapsto 3x \pmod{m}$ permutációt. Ez a permutáció néhány diszjunkt ciklusra bomlik; például $m=10$ esetén a ciklusok $(1\mapsto 3\mapsto 9\mapsto 7\mapsto 1)$, $(2\mapsto 6\mapsto 8\mapsto 4\mapsto 2)$ és $(5\mapsto 5)$. Milyen m számok esetén lesz a ciklusok száma páratlan?

A. 735. Tetszőleges $f:[0,1]\to[0,1]$ függvényre jelölje $P_n(f)$ az

$$\underbrace{f\big(\ldots f}_{n}(x)\ldots\big)$$

függvény fixpontjainak számát, vagyis az olyan $x\in[0,1]$ pontok számát, amelyekre $\underbrace{f\big(\ldots f}_{n}(x)\ldots\big)=x$. Mutassunk példát olyan szakaszonként lineáris, folytonos, szürjektív $f:[0,1]\to[0,1]$ függvényre, amelyre alkalmas $2<A<3$ számmal a $\frac{P_n(f)}{A^n}$ sorozat konvergál.

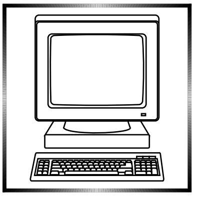
A 2018. évi *Schweitzer Miklós emlékverseny 8. feladata* nyomán

A. 736. Legyen P egy pont az ABC háromszög síkjában. Jelölje az A, B, C pontok P-re vonatkozó tükörképét rendre A', B', illetve C'. Legyen A'', B'' és C'' rendre az A', B', C' tükörképe a BC, CA, illetve AB egyenesre. Legyen az $A''B''$ és az AC egyenes metszéspontja A_b, és legyen az $A''C''$ és az AB egyenes metszéspontja A_c. Jelölje ω_A az A, A_b, A_c pontokon átmenő kört. Az ω_B és ω_C köröket hasonlóan definiáljuk. Bizonyítsuk be, hogy ω_A, ω_B, és ω_C koaxiálisak, vagyis közös hatványvonaluk van.

Javasolta: *Navneel Singhal,* Delhi és *K. V. Sudharshan,* Csennai, India

Beküldési határidő: 2018. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok



I. 466. A mérgezett csoki egy nagyon egyszerűen leírható kétszemélyes játék. A játékosok felváltva „törnek” a táblából és az veszít, akinek a végén csak a mérgezett kocka marad. Ismert, hogy a kezdőnek van nyerő stratégiája, de az csak az $N \times N$ és a $2 \times N$ méretű tábla esetén fogalmazható meg egyszerűen, más méretű táblát használva a játék valós izgalmat hordoz.

A játékról bővebben például a

`http://web.cs.elte.hu/szakdolg/ghorvath.pdf`

címen elérhető diplomamunkában olvashatunk.

Ebben a feladatban a következő formában játszunk:

- a csokoládétábla N sorból és M oszlopból áll;
- az egyes csokoládékockákat két egész számmal azonosítjuk;
- a mérgezett csokoládékocka az (M, N) számpárral adható meg;
- a táblából minden lépésben legalább egy kockát törünk le. A törést minden esetben a teljes csokoládétábla $(1, 1)$ sarkával „szemközti” (i, j) számpárral adjuk meg. Ekkor minden, még meglévő (x, y) csokoládékockát elveszünk, amelyre $x \leqslant i$ és $y \leqslant j$.

A játékosok dokumentálni szerették volna a játékot, ezért a soron következő lépést egy kártyalapra írták, majd a másik játékos előző lépését tartalmazó lapra helyezték. Ez a módszer sajnos nem volt jó, mert egy ajtónyitáskor keletkező huzat a kártyákat lesodorta az asztalról és azok összekeveredtek. Készítsünk prog-