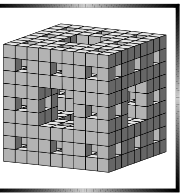


A B pontversenyben kitűzött feladatok (4982–4989.)

B. 4982. Az $ABCD$ konvex deltoid AC és BD átlói az E pontban metszik egymást úgy, hogy $AE<CE$. Az AC átló felezőpontja F. Az ABE és CDE körök második, E-től különböző metszéspontja M. Mutassuk meg, hogy $EMF\sphericalangle=90^\circ$.

(*3 pont*)

B. 4983. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2+2x-3-\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}}=\frac{2}{x^2-2x-3}.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Laczkó László* és *Szoldatics József* (Budapest)

B. 4984. Mutassuk meg, hogy minden pozitív egész x számhoz található olyan pozitív egész y, amelyre x^3+y^3+1 osztható az $x+y+1$ számmal. Van-e olyan pozitív egész x, amelyhez végtelen sok ilyen tulajdonságú y létezik?

(*4 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 4985. Adott négy egyenes úgy, hogy közülük bármelyik három meghatároz egy háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ennek a négy háromszögnek a magasságpontja egy egyenesre illeszkedik.

(*5 pont*)

B. 4986. Jelölje KP azt a 64 térbeli pontot, amelyeknek mindhárom koordinátája 1, 2, 3 vagy 4. Kata és Péter térbeli amőbát játszanak a KP pontjain. Kata kezdi a játékot, kiválaszt egy tetszés szerinti pontot KP-ből, és azt kékre színezi. A második lépésben Péter választ egy, az előzőtől különböző pontot, és azt pirosra színezi. Ezután felváltva színeznek kékre, illetve pirosra egy korábban még színezetlen KP-beli pontot. Az győz, aki először színez a saját színére négy, egy egyenesre illeszkedő pontot. Mutassuk meg, hogy Katának mindegy, hogy az első lépésben az $(1,1,2)$ vagy a $(2,2,1)$ pontot színezi kékre.

(*5 pont*) Javasolta: *Benkő Dávid* (South Alabama)

B. 4987. Az ABC hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög körülírt körének középpontja O, magasságpontja pedig M, az A csúcsból induló magasság talppontja D, az AB oldal felezőpontja F. Az F pontból kiinduló és az M ponton átmenő félegyenes az ABC háromszög körülírt körét a G-ben metszi.

a) Bizonyítsuk be, hogy az A, F, D, és G pontok egy körön vannak.

b) Jelöljük a fenti kör középpontját K-val, a CM szakasz felezőpontját E-vel. Igazoljuk, hogy $EK=OK$.

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 4988. Egy $(m+2)\times(n+2)$-es táblázatnak levágjuk a négy darab 1×1 méretű „sarkát”. Az így kapott csonka táblázat első és utolsó sorának, illetve első és utolsó oszlopának minden mezőjére egy-egy (tetszőleges) valós számot írunk.

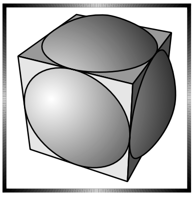
Igazoljuk, hogy a táblázat maradék $m\times n$-es „belseje” egyértelműen kitölthető valós számokkal úgy, hogy minden ide eső szám megegyezzen a négy szomszédjának átlagával.

(*6 pont*) (*Iráni feladat*)

B. 4989. Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalainak felezőpontjai rendre D, E és F. Jelölje a háromszög súlypontját S. Tegyük fel, hogy az AFS, BDS és CES háromszögek kerülete egyenlő. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög szabályos.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2018. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (734–736.)

Október havi számunkban az A jelű feladatok téves sorszámozással kerültek kitűzésre. A sorszámokat helyreállítjuk, a téves sorszámmal beküldött októberi feladatokat elfogadjuk. A hibáért elnézést kérünk.

A. 734. Tetszőleges, 3-mal nem osztható pozitív egész m-re tekintsük az $\{1,2,\dots,m-1\}$ halmazon az $x\mapsto 3x \pmod m$ permutációt. Ez a permutáció néhány diszjunkt ciklusra bomlik; például $m=10$ esetén a ciklusok $(1\mapsto 3\mapsto 9\mapsto 7\mapsto 1)$, $(2\mapsto 6\mapsto 8\mapsto 4\mapsto 2)$ és $(5\mapsto 5)$. Milyen m számok esetén lesz a ciklusok száma páratlan?

A. 735. Tetszőleges $f:\,[0,1]\to[0,1]$ függvényre jelölje $P_n(f)$ az

$$\underbrace{f\big(\dots f}_{n}(x)\dots\big)$$

függvény fixpontjainak számát, vagyis az olyan $x\in[0,1]$ pontok számát, amelyekre $\underbrace{f\big(\dots f}_{n}(x)\dots\big)=x$. Mutassunk példát olyan szakaszonként lineáris, folytonos, szürjektív $f:\,[0,1]\to[0,1]$ függvényre, amelyre alkalmas $2<A<3$ számmal a $\frac{P_n(f)}{A^n}$ sorozat konvergál.

A 2018. évi *Schweitzer Miklós emlékverseny 8. feladata* nyomán