c) Mekkora szögben látja a L pontban álló focista a BD szakaszt, ha szemmagassága 174 cm-en van? (*9 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2018/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Adjuk meg azon* $P(x; y)$ *pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:*

a) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$;

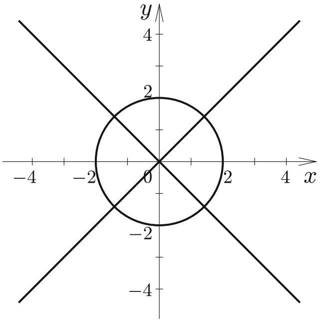
b) $(x^2 - y)^2 + (x^2 + y^2 - 14y + 36)^2 = 0$. (*11 pont*)

Megoldás. *a*) A bal oldalon álló kifejezést háromtényezős szorzatként is írhatjuk: $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - 4) = 0$. Három eset van.

I. eset: $y = x$. Az ilyen tulajdonságú P pontok a koordinátasík I. és a III. negyedének szögfelezőjét alkotják.

II. eset: $y = -x$. Az ilyen tulajdonságú P pontok a koordinátasík II. és a IV. negyedének szögfelezőjét alkotják.

III. eset: $x^2 + y^2 = 4$. Az ilyen tulajdonságú P pontok az origó középpontú és 2 egység sugarú körvonalat adják.



A feladat megoldását a három ponthalmaz egyesítése adja, amit a *vázlatrajz* szemléltet.

b) Két nemnegatív szám összege csak akkor lehet 0, ha mindkét szám 0. Ezek alapján a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2, \\ x^2 + y^2 - 14y + 36 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

A helyettesítést elvégezve x^2-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$$

$$(x^2)_1 = 4, \quad (x^2)_2 = 9.$$

Négy értéket kapunk x-re: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$. Az egyenletrendszer első egyenletébe visszahelyettesítve kapjuk a második koordinátákat: $y_1 = 4$, $y_2 = 4$, $y_3 = 9$, $y_4 = 9$.

Vagyis a keresett ponthalmazban négy pont van: $P_1(-2; 4)$, $P_2(2; 4)$, $P_3(-3; 9)$, $P_4(3; 9)$.

Megjegyzés. Az egyenletrendszer második egyenlete $x^2 + (y - 7)^2 = 13$ alakra is hozható. Vagyis az $y = x^2$ egyenlettel adott parabola és az $x^2 + y^2 - 14y + 36 = 0$ egyenlettel adott $K(0; 7)$ középpontú, $r = \sqrt{13}$ sugarú kör közös pontjainak koordinátáit határoztuk meg.

2. *A* $\overline{\text{SzÁMADÓ}}$ *és az* $\overline{\text{ADÓSzÁM}}$ *egy-egy olyan hatjegyű, a* $\overline{\text{SzÁM}}$ *és az* $\overline{\text{ADÓ}}$ *pedig egy-egy olyan háromjegyű szám, amelyben az* Sz, Á, M, A, D *és* Ó *betűk különböző pozitív számjegyek.*

a) Mennyi a $\overline{\text{SzÁM}} + \overline{\text{ADÓ}}$ *összeg, ha* $\overline{\text{SzÁMADÓ}} + \overline{\text{ADÓSzÁM}} = 678\,678$?

b) Adjuk meg a $\overline{\text{SzÁMADÓ}}$ *számot, ha még azt is tudjuk, hogy* Sz $>$ A*, valamint* $\overline{\text{SzÁM}} \cdot \overline{\text{ADÓ}} = 90\,585$.

c) Mennyi az $\overline{\text{ADÓSzÁM}}$*, ha* $7 \cdot \overline{\text{ADÓSzÁM}} = 6 \cdot \overline{\text{SzÁMADÓ}}$? (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen: $\overline{\text{SzÁM}} = x$, $\overline{\text{ADÓ}} = y$. Ekkor $\overline{\text{SzÁMADÓ}} = 1000x + y$, $\overline{\text{ADÓSzÁM}} = 1000y + x$. Ezek alapján:

$$1000x + y + 1000y + x = 678\,678,$$

$$1001(x + y) = 678\,678,$$

$$x + y = 678.$$

Vagyis: $\overline{\text{SzÁM}} + \overline{\text{ADÓ}} = 678$.

b) Mivel $\overline{\text{SzÁM}} \cdot \overline{\text{ADÓ}} = 90\,585$, ezért a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} y &= 678 - x, \\ xy &= 90\,585. \end{aligned}\right\}$$

A behelyettesítés után másodfokú egyenletet kapunk: $x^2 - 678x + 90\,558 = 0$. Megoldóképlettel: $x_1 = 495$, $x_2 = 183$. Mivel Sz $>$ A, ezért $\overline{\text{SzÁM}} = x = 495$.

A keresett hatjegyű szám: $\overline{\text{SzÁMADÓ}} = 495\,183$.

c) A már bevezetett jelölésünkkel:

$$7(1000y + x) = 6(1000x + y),$$

$$6994y = 5993x,$$

$$2 \cdot 13 \cdot 269 \cdot y = 13 \cdot 461 \cdot x,$$

$$2 \cdot 269 \cdot y = 461 \cdot x.$$

Mivel x és y is háromjegyű szám, ezért csakis $\overline{\text{SzÁM}} = x = 2 \cdot 269 = 538$, $\overline{\text{ADÓ}} = y = 461$ lehet. Vagyis $\overline{\text{ADÓSzÁM}} = 461\,538$.

3. *A Szép Utazások iroda tájékoztatójában a repülőgépen szállítható csomagokról ez olvasható:*

„Az iroda által bérelt járatokon 15 kg/fő *feladott poggyász és* 1 db 8 kg/fő *kézipoggyász szállítása díjtalan, a többletsúlyért fizetni kell. Mindegyik poggyásznak téglatest alakúnak kell lennie. A feladott poggyász egyik élhossza sem lehet több, mint* 150 cm, *és a három különböző irányú él hosszának összege nem haladhatja meg a* 220 cm*-t. A kézipoggyász maximális hossza* 56 cm, *maximális szélessége* 45 cm, *maximális mélysége* 25 cm *lehet, azonban a három méret összesen nem haladhatja meg a* 115 cm*-t.”*

a) Bea kézipoggyásznak való kisbőröndöt vásárol az utazáshoz. A boltban a megfelelő bőröndök egyik élhossza 25 cm. *Szeretné, ha az élhosszak összege a megengedett maximális, ugyanakkor a bőrönd felszíne* 8500 cm^2 *lenne. Milyen méretű bőrönd felelne meg ezeknek a feltételeknek?*

b) László az utazáshoz bőröndöt szeretne vásárolni, amibe a feladható poggyászként engedélyezett 15 kg*-ot bepakolhatja. A neki tetsző bőröndök egyik élének hossza* 40 cm *volt. Milyen méretű bőröndöt válasszon ezek közül, ha szeretné, hogy a térfogata maximális legyen? Mekkora lesz ekkor a bőrönd térfogata?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a három különböző irányú él hosszának összege 115 cm, és az egyik él 25 cm, ezért a másik két él hossza legyen x cm és $90-x$ cm. Ezek alapján a felszín:

$$2\cdot\big[25x+25(90-x)+x(90-x)\big]=8500,$$

$$25x+2250-25x+90x-x^2=4250,$$

$$x^2-90x+2000=0.$$

Megoldóképlettel: $x_1=50$, $x_2=40$. Ekkor a $90-x$ élhosszra a 40, illetve az 50 adódik.

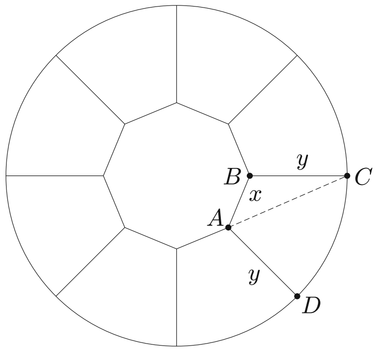
Vagyis a kisbőrönd három adata: 25 cm, 50 cm, 40 cm, ami a kiírás további feltételeinek is megfelel.

b) Mivel maximális térfogatot szeretnénk elérni, ezért az élek összegére vonatkozó maximumot használjuk. Az élek hossza: 40 cm, x cm és $180-x$ cm. Ekkor a térfogatot x függvényében meg tudjuk adni: $V(x)=40\cdot x\cdot(180-x)$.

Mivel ennek a másodfokú függvénynek a főegyütthatója negatív, ezért van maximuma. Azt is tudjuk, hogy a zérushelyei a 0 és a 180, ezért a maximum helye: $x=90$. Vagyis a maximális térfogatú bőrönd adatai: 40 cm, 90 cm, 90 cm. Ezek az adatok a tájékoztatóban szereplő összes kérésnek megfelelnek.

A megadott feltételek mellett a maximális térfogat:

$$V(90)=40\cdot 90\cdot(180-90)=324\,000\ (\mathrm{cm}^3).$$



4. *A Fővárosi Nagycirkusz* 13 méter *átmérőjű porondjának vázlatát mutatja az* ábra. *A vízi cirkuszi előadásban a porond kilenc, azonos területű része függőlegesen, le-föl mozgatható.*

a) Mekkora a porond közepén látható szabályos nyolcszög területe?

b) A nyolc egybevágó (trapézszerű) síkidomot a könnyebb mozgatás miatt körben egy nagyon speciális anyaggal borították. Ehhez előzetesen meg kellett határozni ezeknek a síkidomoknak a kerületét. Mekkora a kerülete az ABCD trapézszerű síkidomnak?

c) A nyolc egybevágó síkidom függőleges mozgatásához megépített szerkezet miatt minden ilyen síkidom alatt szükség volt egy átlós merevítőre. Adjunk képletet az AC merevítő hosszára az ábra x és y hosszúságú szakaszának ismeretében. (A képletben előforduló szögfüggvényértékek négy tizedes jegy pontossággal szerepeljenek.) *(14 pont)*

Megoldás. *a*) A kör alakú porond sugara $R=6{,}5$ m, ezért a területe: $T= 6{,}5^2\cdot\pi=42{,}25\cdot\pi$ (m^2).

Mind a kilenc síkidom – a nyolc egybevágó (trapézszerű) és a középen látható szabályos nyolcszög – területe egyenlő. Vagyis a keresett síkidom területe:

$$t=\frac{T}{9}=\frac{42{,}25\cdot\pi}{9}\approx 14{,}748\ (\mathrm{m}^2).$$

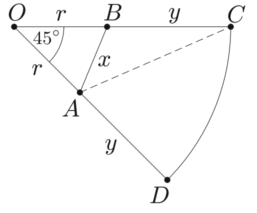
b) Az $ABCD$ trapézszerű síkidom kerületének CD íve a $R=6{,}5$ m sugarú körvonal nyolcadrészével megegyező hosszúságú: $\frac{2\cdot 6{,}5\cdot\pi}{8}\approx 5{,}105$ (m).

Az $AD=BC=y$ szakasz hosszát megkapjuk, ha a porond sugarából elvesszük a 14,748 m^2 területű szabályos nyolcszög köré írt körének r sugarát.

A nyolcszög területét nyolc egybevágó egyenlőszárú háromszög területének összegeként is megkapjuk. Ezeknek a háromszögeknek r hosszúságú a száruk, és 45° a szárszögük. Vagyis a nyolcszög területe:

$$t=8\cdot\frac{r^2\cdot\sin 45^\circ}{2}=14{,}748,\quad \text{amiből}\quad r\approx 2{,}283\ \mathrm{m}.$$

Ezek alapján: $y=R-r=6{,}5-2{,}283=4{,}217$ (m).



Az AB szakasz hossza a 14,748 m^2 területű szabályos nyolcszög oldalának hosszával egyenlő. Ezt az OAB egyenlőszárú háromszögből kaphatjuk például koszinusztétellel:

$$x=\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cdot\cos 45^\circ}=$$

$$=\sqrt{2\cdot 2{,}283^2-2\cdot 2{,}283^2\cdot\cos 45^\circ}\approx 1{,}747.$$

A kapott eredmények alapján a keresett kerület:

$$K = 5{,}105 + 2 \cdot 4{,}217 + 1{,}747 = 15{,}286 \text{ (m)}.$$

c) A szabályos nyolcszög egy belső szöge: $\alpha = \frac{(8-2)\cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$. A trapézszerű síkidom B-nél lévő β szögére teljesül, hogy $\alpha + 2\beta = 360^\circ$, azaz $\beta = 112{,}5^\circ$. Az ABC háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt: $AC^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 112{,}5^\circ$. Tehát a merevítő hosszát a következő képlettel számolhatjuk:

$$AC = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 112{,}5^\circ} \approx \sqrt{x^2 + y^2 + 0{,}7654 \cdot xy}\,.$$

II. rész

5. *Rebeka új szemüveget vásárol, de nem szeretné, hogy a lencsékért* 25 000 Ft-*nál többet fizessen. A szaküzletben kiderül, hogy ha hagyományos lencsét vásárolna, akkor* 4280 Ft-*ot fizetne a két lencséért. Rebeka tudja, hogy a minőséget a különböző típusú bevonatok javíthatják, ezért tükröződésmentes és karcolás mentes bevonatot kér a lencsékre. A bevonatok mindegyikének* 99 Ft/cm^2 *az ára. (A lencsék felületét síknak vehetjük.) Azt is eldöntötte, hogy a hagyományosnál vékonyabb lencsét szeretne választani. A készlet szerint ez lehet* 10, 20, 30, 40, *illetve* 50%-*kal vékonyabb. Ezeknek a lencséknek az ára a hagyományoshoz képest rendre* 40, 80, 160, 320, 640%-*kal drágább.*

Egy lencse határvonalát az $f(x) = 2 - \frac{2}{25}x^2$ *és a* $g(x) = \frac{x^2}{5} - 5$ *hozzárendeléssel megadott függvények grafikonja által meghatározott síkidom határvonala adja. A koordinátarendszer egysége* 5 mm-*rel egyenlő. Mekkora területű részt foglal el egy lencse az asztalon? A hagyományos lencséhez képest hány százalékkal választhat vékonyabb lencsét Rebeka?* (*16 pont*)

Megoldás. Meghatározzuk, hogy a megadott függvények hol metszik egymást:

$$2 - \frac{2}{25}x^2 = \frac{x^2}{5} - 5,$$

$x_1 = -5$, $x_5 = 5$. A kérdéses terület nagyságát határozott integrállal számoljuk ki, az intervallum a $[-5;5]$. A két „görbealatti terület” különbsége adja a síkidom területét:

$$T = \int_{-5}^{5} \left(2 - \frac{2}{25}x^2 - \frac{x^2}{5} + 5\right) \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{5} \left(7 - \frac{7}{25}x^2\right) \mathrm{d}x = 14 \cdot \int_{0}^{5} \left(1 - \frac{1}{25}x^2\right) \mathrm{d}x.$$

Alkalmazzuk a Newton–Leibniz tételt:

$$T = 14 \cdot \left[x - \frac{1}{25} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^5 = 14 \cdot \left(5 - \frac{1}{25} \cdot \frac{125}{3}\right) = \frac{140}{3} \text{ (területegység)}.$$

Mivel a koordinátarendszer egysége 5 mm-rel egyenlő, ezért egy lencse $\frac{35}{3}$ cm^2-es részt foglal el az asztalon.

Két lencsére kétféle réteget vásárol Rebeka, amelyeknek 99 Ft/cm^2 az ára. Vagyis ezekért összesen $2 \cdot 2 \cdot 99 \cdot \frac{35}{3} = 4620$ Ft-ot fog fizetni. A maradék 20 380 Ft-ból kell döntenie, hogy milyen vékony lencsét vásárolhat.

A készlet legvékonyabb tagjától visszafelé számoljunk. Az 50%-os lencsék ára $4280 \cdot 7{,}4 = 31\,672$ Ft lenne. Ilyet nem vehet. A 40%-os lencsék ára $4280 \cdot 4{,}2 = 17\,976$ Ft lenne. Ezt már választhatja Rebeka.

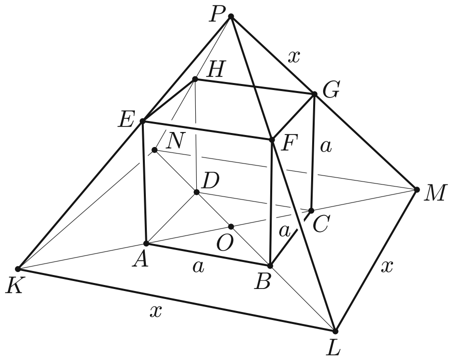
6. *A Rubik-kocka feltalálásának évfordulójára díszdobozos kiadást terveznek. Az egyik változat szerint legyen a doboz egy olyan négyoldalú szabályos gúla, amelynek alapéle ugyanolyan hosszú, mint az oldaléle. Az elképzelés szerint a kocka egyik lapja illeszkedik a gúla alaplapjára, az ezzel párhuzamos lap csúcsai pedig a gúla oldaléleire.*

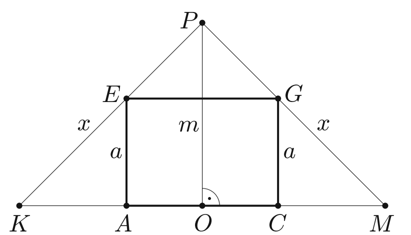
a) Mekkora legyen a doboz éleinek hossza, ha a Rubik-kocka élhosszúsága: $a = 5{,}7$ cm?

b) A sok-sok terv közül azonnal elvetették azokat, amelyeknél a játék a doboz 35%-át sem tölti ki. A fenti terv megfelelő-e ezen feltétel ismeretében? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Használjuk a *vázlatrajzok* jelöléseit. Vettük a gúla P csúcsára és az alaplap két szemközti csúcsára, a K-ra és az M-re illeszkedő síkmetszetét. Ez egy egyenlőszárú háromszög, amelynek szára x cm, az alapja egy x oldalhosszúságú négyzet átlójának hosszával egyenlő, azaz $x\sqrt{2}$ cm hosszú. Ennek a háromszögnek az alaphoz tartozó magassága a KOP derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel:

$$OP = m = \sqrt{x^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$





Mivel $OP = KO = MO\left(= \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$, ezért KOP (és MOP is) egyenlőszárú derékszögű háromszög. $KA = KO - AO = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-a)$, mivel AO egy a oldalú négyzet átlójának fele.

A KOP derékszögű háromszög hasonló a KAE derékszögű háromszöghöz, ugyanis a PKO szög közös hegyesszög. Ezek alapján KAE is egyenlőszárú derékszögű háromszög. Vagyis $KA = AE$, azaz $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-a) = a$.

Fejezzük ki az x-et, és helyettesítsük be az a adott értékét: $x = a(1+\sqrt{2}) \approx$ $\approx 13{,}8$ (cm).

A doboz éleinek hossza tizedcentiméter pontossággal: 13,8 cm.

b) A gúla alaplapjának élhossza már ismert: $x = a(1+\sqrt{2}) \approx 13{,}8$ (cm). Ezek alapján a gúla magassága: $m = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 13{,}8 \approx 9{,}8$ (cm). A díszdoboz térfogata:

$$V_1 = \frac{x^2 \cdot m}{3} = \frac{13{,}8^2 \cdot 9{,}8}{3} \approx 622{,}1\ (\text{cm}^3).$$

A kocka térfogata: $V_2 = a^3 = 5{,}7^3 \approx 185{,}2$ (cm^3).

Százalékban kifejezve: $\frac{V_2}{V_1} \cdot 100$, azaz kerekítve 29,8%-át foglalja el a Rubik kocka a doboz térfogatának. Vagyis ez a terv nem felel meg az elvárásoknak.

7. *a*) *A tízes számrendszerben felírt egyjegyű a, kétjegyű $\overline{ab}$ és háromjegyű $\overline{abb}$ szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első, második és tizenkettedik tagja. (Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.) Hány darab megfelelő kétjegyű szám van? Mennyi a legnagyobb megfelelő kétjegyű szám esetén a számtani sorozat első 20 tagjának összege?*

b) *A pozitív számokból álló (a_n) mértani sorozat kilenc egymást követő tagjából képezzünk három számot úgy, hogy összeadjuk az első hármat, aztán a következő hármat, és végül az utolsó hármat. Mutassuk meg, hogy az így kapott három szám tízes alapú logaritmusa egy számtani sorozat három egymást követő tagja lesz.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a számtani sorozat első tagja a, differenciája d. Vagyis:

$$\begin{aligned} a_1 &= a, \\ a_2 &= \overline{ab} = 10a + b = a + d, \\ a_{12} &= \overline{abb} = 100a + 11b = a + 11d. \end{aligned}$$

Az a_2 alapján $11d = 11(9a+b) = 99a + 11b$, a_{12} alapján $11d = 99a + 11b$. Tehát tetszőleges a és b esetén megfelelő az a, $\overline{ab}$, $\overline{abb}$ számhármas.

Az a tetszőleges pozitív számjegy (9 lehetőség), a b pedig tetszőleges számjegy lehet, de nem egyenlő a-val (9 lehetőség). Így $\overline{ab}$ 81-féle szám lehet. Ezek közül a legnagyobb a 98. Ebben az esetben a sorozat első eleme 9, a differenciája 89.

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \cdot 9 + 19 \cdot 89) = 17\,090.$$

b) Legyen a mértani sorozat kilenc egymást követő tagja: a; aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6, aq^7, aq^8, ahol $a > 0$, $q > 0$. Megadjuk a feladat szövege szerinti három számot a-val és q-val:

$$\begin{aligned} &\lg(a + aq + aq^2); \\ &\lg(aq^3 + aq^4 + aq^5) = \lg(a + aq + aq^2) + 3\lg q; \\ &\lg(aq^6 + aq^7 + aq^8) = \lg(a + aq + aq^2) + 6\lg q. \end{aligned}$$

Ez egy $3\lg q$ differenciájú számtani sorozat három egymást követő tagja.

8. *Az $ABCDEFGH$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az $ABCD$ alaplapra az AE, BF, CG és DH élek merőlegesek. Tudjuk, hogy a HAD szög 30°-os, a FAB szög pedig 60°-os.*

a) Mekkora az AFH háromszög területe, ha a téglatest térfogata $3375\ \mathrm{cm}^3$?

b) Mekkora szögben hajlik a téglatest AG testátlója az $ABCD$ laphoz?

c) Dávid a téglatest ábráját a 8 csúccsal, a 12 élével és az AH, valamint AF éllel egy gráfnak tekinti. Barbara pedig a hiányzó élek berajzolásával készített egy teljes gráfot. Azt állítja, hogy rajzolás közben minden csúcsot érintett, viszont egy élt csak egyszer rajzolt meg, és közben a ceruzáját nem kellett felemelnie a papírról. Miért tartjuk ezt hihetőnek? Melyik csúcsból kezdhette a rajzolást, és melyik csúcsba érkezhetett? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen $AB=a$. Mivel az FAB derékszögű háromszögben A-nál 60°-os szög van, ezért $AF=2a$, és Pitagorasz-tétellel $BF=a\sqrt{3}$. A téglalapban $BF=DH$, azaz $DH=a\sqrt{3}$. Mivel a HAD derékszögű háromszögben A-nál 30°-os szög van, ezért $AH=2a\sqrt{3}$, és Pitagorasz-tétellel $AD=3a$. Most már a-val kifejeztük a téglatest mindháromféle oldalának hosszát. Ezek segítségével a téglatest $EFGH$ lapjának FH lapátlóhossza is megadható:

$$FH=\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a\,.$$

Koszinusz-tétellel meghatározható az AFH háromszög A-nál lévő φ szöge:

$$\begin{aligned}
FH^2&=AF^2+AH^2-2\cdot AF\cdot AH\cdot\cos\varphi,\\
\left(\sqrt{10}a\right)^2&=(2a)^2+\left(2a\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 2a\cdot 2a\sqrt{3}\cdot\cos\varphi,\\
10&=4+12-2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos\varphi,\\
\cos\varphi&=\frac{3}{4\sqrt{3}},\\
\varphi&\approx 64{,}34^\circ.
\end{aligned}$$

Felírhatjuk a téglatest térfogatát: $V=a\cdot\sqrt{3}a\cdot 3a=3\sqrt{3}\cdot a^3=3375$, ahonnan $a\approx 8{,}66$ cm. Használhatjuk az AFH háromszögre a szinuszos területképletet:

$$T_{AFH\triangle}=\frac{AF\cdot AH\cdot\sin 64{,}34^\circ}{2}=\frac{2a\cdot 2a\sqrt{3}\cdot\sin 64{,}34^\circ}{2}\approx 234{,}2\ (\mathrm{cm}^2).$$

b) A kérdéses λ szög a CAG derékszögű háromszög A-nál lévő szögével egyenlő: $\operatorname{tg}\lambda=\frac{\sqrt{3}\,a}{\sqrt{10}\,a}=\sqrt{0{,}3}$, $\lambda\approx 28{,}7^\circ$.

c) A megadott A, B, C, D, E, F, G és H csúcspontokkal adott gráfban a fokszámok rendre a következők: 5, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 4. Mivel a 8 csúcsú teljes gráf minden pontjának 7 a fokszáma, ezért a Barbara által rajzolt A, B, C, D, E, F, G és H csúcspontokkal adott gráfban a fokszámok rendre a következők: 2, 4, 4, 4, 4, 3, 4, 3. Mivel pontosan két páratlan fokszámú csúcs van, ezért hihetőnek tartjuk Barbara kijelentését. Az F és a H csúcsok fokszáma páratlan, ezért az egyik a kiindulópont, a másik a végpont lehet.

Ilyen módon egy lehetséges útvonal megadható, például: $H - B - G - D - B - E - C - A - G - E - D - F - C - H - F$.

9. *Legyen n pozitív egész szám. Adottak az alábbi sorozatok:*

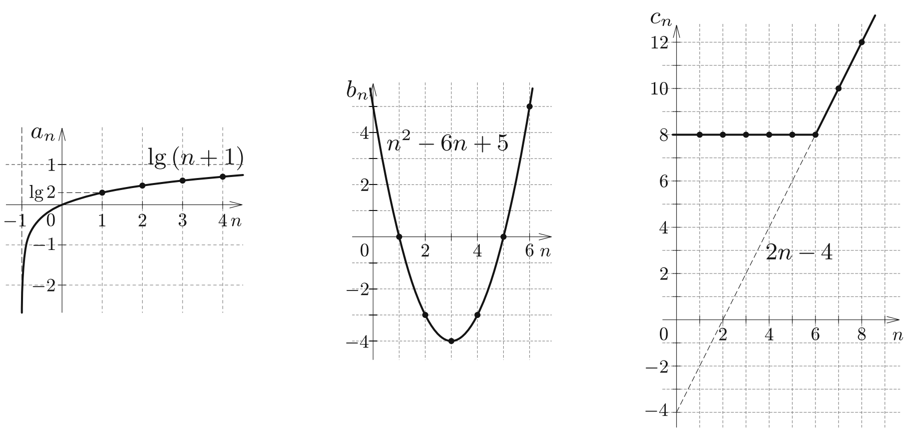
$$\{a_n\} = \big\{\lg(n+1)\big\};$$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{n^3 - 5n^2 - n + 5}{n+1}\right\};$$

$$\{c_n\} = \big\{|n+2| + |n-6|\big\}.$$

Válaszoljunk (indoklással) mindhárom esetben, hogy a sorozat alulról, felülről korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem. Ha van, adjunk meg egy alsó, illetve felső korlátot. (*16 pont*)

Megoldás. Az lg függvény szigorú monoton növekedése miatt az $\{a_n\}$ sorozat is szigorú monoton növekedő. Ebből az is következik, hogy a sorozat első tagja, azaz az $\lg 2$ alsó korlát (jelen esetben a legnagyobb). Az lg függvény tulajdonságainak ismeretében tudjuk, hogy felső korlát nincs.



A $\{b_n\}$ sorozat általános tagjának formuláját egyszerűsíthetjük:

$$b_n = \frac{n^3 - 5n^2 - n + 5}{n+1} = \frac{n^2(n-5) - (n-5)}{n+1} = \frac{(n-5)(n-1)(n+1)}{n+1} = \\ = (n-5)(n-1) = n^2 - 6n + 5.$$

A másodfokú kifejezés főegyütthatója 1, zérushelyei az 1 és az 5, minimum helye a 3. A sorozat szempontjából ez azt jelenti, hogy először csökkenő, aztán növekedő. Vagyis nem monoton a sorozat.

A másodfokú függvény tulajdonsága alapján mondható, hogy a sorozat egyik alsó korlátja (jelen esetben a legnagyobb alsó korlátja) a b_3, azaz -4. A másodfokú függvény tulajdonságaiból az is következik, hogy ennek a sorozatnak nincs felső korlátja.

Ha $n=1,2,3,4,5$, akkor a $\{c_n\}$ hozzárendelési szabálya: $c_n=|n+2|+|n-6|=$ $=n+2-(n-6)=8$.

Ha $n>5$, akkor a $\{c_n\}$ hozzárendelési szabálya: $c_n=|n+2|+|n-6|=$ $=n+2+n-6=2n-4$. Mivel a lineáris függvény meredeksége most pozitív, ezért ezekre az n-ekre a sorozat szigorúan monoton növekedő.

Összességében monoton növekedő, hiszen a sorozat első öt tagja 8, a továbbiak pedig ennél nem kisebbek.

Az elmondottakból az is következik, hogy a sorozat alulról korlátos. Egy lehetséges alsó korlát 8 (ami a legnagyobb alsó korlát). A lineáris függvény ismeretében azt is tudjuk, hogy felső korlát nincs.

Számadó László
Budapest

Matematika feladat megoldása

B. 4912. *Bizonyítsuk be, hogy az $5x^2-4y^2=2017$ egyenletnek nincs egész megoldása.*

(*3 pont*)

Megoldás. Alakítsuk át az 5-tel oszthatóság szempontjai alapján azonosan az $5x^2-4y^2=2017$ diofantikus egyenletet: $5\left(x^2-y^2\right)+y^2=5\cdot 403+2$. A bal oldalon az 5-tel való osztás maradékát az y^2 maradéka adja, míg a jobb oldal ötös maradéka 2. Vizsgáljuk meg a négyzetszámok lehetséges ötös maradékait. Egy egész szám négyzetének ötös maradékát az ötös maradék négyzete határozza meg, mivel $(5a+b)^2=25a^2+10ab+b^2$ alapján azonnal látható, hogy az első két tag osztható 5-tel. Elegendő tehát az ötös maradékok négyzeteinek maradékait áttekintenünk. Ezek rendre a 0, 1, 2, 3, 4 számok négyzetének ötös maradékai, azaz 0, 1, 4, 4, 1. A bal oldali kifejezés ötös maradéka 0, 1 vagy 4, míg a jobb oldali ötös maradék 2. A két oldal semmilyen egész számokra nem lehet egyenlő egymással, az egyenletnek nincs egész megoldása.

Richlik Róbert (Budapest XIV. Kerületi Szent István Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 202 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 187, 2 pontot 6 tanuló. 0 pontos 7, nem versenyszerű 2 tanuló dolgozata.