A középiskolai tanárok versenyének eredménye

1. **Fridrik Richárd** (Szeged, Magister Universitas) .... 110 pont
2. **Fonyó Lajos** (Keszthely, Keszthelyi Vajda János Gimn.) .... 105 pont
3. **Baloghné Cseh Judit** (Szolnok, Varga Katalin Gimn.) .... 101 pont
4. **Mahler Attila** (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn.) .... 98 pont
5. **B. Varga József** (Temerin, Petar Kočić Ált. Isk.) .... 97 pont
6. **Csanády Zsuzsa** (Budapest, Baár-Madas Református Gimn.) .... 91 pont
7. **Fonyóné Németh Ildikó** (Keszthely, Keszthelyi Vajda János Gimn.) ..... 88 pont
8. **Szabadfalviné Kormányos Anikó** (Miskolc, Földes Ferenc Gimn.) ...... 84 pont
8. **Jeneiné Bicsák Krisztina** (Budapest, Szent István Gimn.) .... 84 pont
10. **Vértes Judit** (Budapest, Kölcsey Ferenc Gimn.) .... 82 pont.

Az általános iskolai tanárok versenyének* eredménye

1. **Egyed László** (Bajai III. Béla Gimn.) .... 111 pont
2. **Paróczay Eszter** (Gödöllői Premontrei Szent Norbert Ált. Isk. és Gimn.) . 97 pont
3. **Bajcsi Barnabás** (Lakszakállas, Magyar Tannyelvű Alapiskola) .... 91 pont
4. **Aszódiné Pálfi Edit** (Kecskemét, Zrínyi Ilona Ált. Isk.) .... 86 pont
5. **Miklós Ildikó** (Vámosmikolai Ált. Tagisk.) .... 85 pont
6. **Tóth Gabriella** (Csantavér, Hunyadi János Ált. Isk.) .... 77 pont.

A 2018. évi Beke Manó Emlékdíjasok

A Beke Manó Emlékdíj Bizottság döntése alapján 2018-ban a díj második fokozatában részesült **Bíró Éva, Csóka Gézáné, Csordásné Szécsi Jolán, Gulyásné Nemes Katalin, Maróti Lászlóné, Maksa Gyula** és **Paulovits György.**

A részletes indoklás honlapunkon (`www.komal.hu`) olvasható.

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{x} = 6 - x. \qquad (5\ pont)$$

b) Oldjuk meg a $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ intervallumon az alábbi egyenletet:

$$\sin^2 x + \cos x = -1. \qquad (6\ pont)$$

*Az általános iskolai tanárok versenyének feladatait nem közöljük.

2. A májusban megírt emelt szintű matematika érettségi dolgozatok 1. feladatának eredményessége látható az alábbi táblázatban:

A vizsgált év	2013	2014	2015	2016	2017
Eredményesség (%)	84	88	79	86	83

a) Határozzuk meg az eredményességek terjedelmét, átlagát és szórását. (*4 pont*)

Csaba érettségi bizonyítványában az alábbi osztályzatok szerepelnek: 3; 4; 5; 4; 3; 4.

b) Legkevesebb hány osztályzatot kellene törölni a bizonyítványából, hogy az osztályzatok mediánja megváltozzon? (*4 pont*)

Csaba 12. osztályos év végi bizonyítványában 7 db 4-es és 5 db 5-ös osztályzat szerepel, melyek közül véletlenszerűen kiválasztunk 3 osztályzatot.

c) Igazoljuk, hogy ha az osztályzatokat *visszatevés nélkül* választjuk ki, akkor annak a valószínűsége, hogy 2 db 4-est és 1 db 5-öst választottunk $\frac{21}{44}$. (*4 pont*)

3. Egy paralelogrammában az átlóhosszak négyzetének összege 74,45, az átlóhosszak négyzetének különbsége 32,13.

a) Számítsuk ki a paralelogramma átlóinak hosszát. (*4 pont*)

b) Igaz-e, hogy a paralelogramma átlóinak felezőpontján átmenő, annak hosszabbik oldalával párhuzamos egyenes két egyenlő területű részre osztja a paralelogrammát? (*4 pont*)

c) Határozzuk meg a paralelogramma szomszédos oldalhosszainak négyzetösszegét. (*6 pont*)

4. Egy konyhai papírtörlő tekercs 80 darab 0,5 mm vastag téglalap alakú lapból áll. Egy papírlap 240 mm hosszú és 230 mm széles téglalap, melyek a szélességüknél perforációs (tépést megkönnyítő) résszel kapcsolódnak egymáshoz. A tekercs közepén lévő üres henger átmérője 40 mm.

a) Hány teljes fordulatot tesz meg az üres henger, ha az egész papírtekercset körbe letekerjük? (A perforációs részek méretétől tekintsünk el.) (*9 pont*)

Az egyik ismert márkájú papírtörlő tekercs lapjaira mintákat is nyomtatnak. A gyártósoron 8 különböző mintából csak 3-féle mintát használnak fel egy lapra. A gyártósoron az összes lehetséges mintahármast beállítják a gépeken, amelyeket egymás után folyamatosan nyomtatnak a papírtörlő lapjaira.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott tekercs egy lapját kiválasztva a tekercsen van még egy ugyanilyen mintázatú másik lap? (*5 pont*)

5. A térképrészleten egy háromszög alakú telek látható, melynek Toldi úti oldala 50 m, Petőfi úti oldala 65 m és Mikszáth úti oldala 75 m hosszú. A telket Csaba, László és Levente örökli, akik megállapodnak, hogy a Toldi úttal párhuzamos kerítésekkel három egyenlő területű részre osztják fel a telket úgy, hogy mindenkinek legyen kijárata a Mikszáth útra, a főútra.

a) Milyen hosszú drótkerítést kell venniük a telkek szétválasztásához? (*6 pont*)

A helyi építési szabályzat nem engedélyezi olyan épület építését, amelynek két szomszédos fala által bezárt szög 60°-nál kisebb.

b) Kiadható-e építési engedély arra az épületre, amelyet úgy terveznek, hogy a Toldi és a Mikszáth utca sarkán fog állni, és külső falai ezzel a két utcával párhuzamosak lesznek? (*4 pont*)

Csaba, László és Levente megállapodtak abban, hogy a telek felosztása után kockadobással döntik el, hogy milyen sorrendben választanak a telkek közül. Mindenki dob egyet egy szabályos dobókockával, és ha nincs azonos dobás, akkor a legnagyobbat dobó választ először, majd a második legnagyobbat dobó másodszor, végül a legkisebb számot dobó kapja a maradék telekrészt. Ha van egyenlő a dobott számok között, akkor a dobás érvénytelen és addig dobnak újra, amíg nem lesz három különböző eredmény.

c) Mekkora valószínűséggel választ először Levente telket? (*6 pont*)

6. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x)=\frac{x^3}{8}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\quad \text{és}\quad g(x)=-x^2+2x.$$

a) Adjuk meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit. (*5 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az f és g függvények grafikonjának három közös pontja van. (*5 pont*)

c) Számítsuk ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt terület nagyságát az $x_1=0$ és $x_2=2$ határok között. (*6 pont*)

7. *a*) Hány különböző 124 jegyű tízes számrendszerbeli természetes szám képezhető 62 db nulla és 62 db egyes számjegyből? (Elegendő csak a kiszámítás módját megadni.) (*3 pont*)

b) Mutassuk meg, hogy a 62 db nullából és 62 db egyesből álló 124-jegyű tízes számrendszerbeli természetes számok egyike sem lehet négyzetszám. (*5 pont*)

c) Határozzuk meg annak a számrendszernek az alapszámát, amelyben a 124 felírható olyan 3 jegyű számként, melynek minden számjegye azonos. (*8 pont*)

8. Az egyetemi felvételi eljárásban július közepéig lehet módosítani azoknak a szakoknak a sorrendjét, amelyekre felvételizni szeretnénk. Márta 5 különböző államilag támogatott képzésre jelentkezett, és közülük három szak esetén beadta a jelentkezést az önköltséges képzésre is.

a) Hány különböző sorrendben adhatja be a módosításnál ezeket a szakokat, ha az nem fordulhat elő, hogy egy bizonyos szakból előkelőbb helyen áll az önköltséges képzés, mint az államilag finanszírozott? (*5 pont*)

Márta a módosítás után sajnos csak az önköltséges képzésre jutott be, amelynek díja félévenként 250 000 Ft. Szülei az elmúlt 5 évben havi 20 000 Ft-ot tettek félre erre a célra. A megtakarítás 5 évig egy olyan számlán volt, amely havonta 1%-ot kamatozott, és az összeget havonta tőkésítették.

b) Legfeljebb hány félévnyi tandíjra elegendő a teljes lekötött összeg? (*5 pont*)

Márta úgy döntött, hogy a lekötött összegből 500 000 Ft-ot rögtön berak a bankba, majd a következő év elején még újabb 500 000 Ft-ot hozzátesz. Ebben a konstrukcióban a kamatot évente tőkésítették, azaz minden év végén adták hozzá a bent lévő összeghez a kamatot.

c) Hány százalék volt az éves kamat, ha Márta a második év végén csak a kamatokból 76 250 Ft-ot tudott felvenni? (*7 pont*)

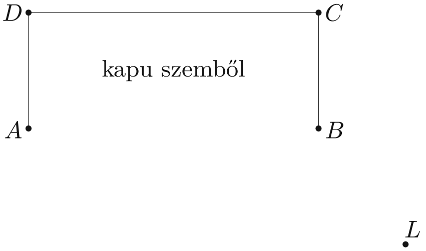
9. Az Oroszországban rendezett labdarúgó világbajnokságra nagy létszámú horvát baráti társaság utazott ki. Az első három horvát mérkőzést a társaság 90-90-90%-a tekintette meg.

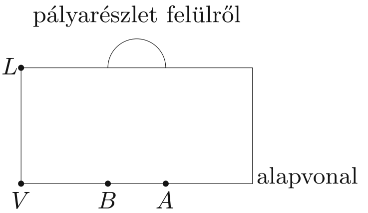
a) Legalább illetve legfeljebb a szurkolók hány százaléka láthatta mindhárom mérkőzést? (*4 pont*)

Horvátország az első mérkőzését Nigéria ellen vívta a kalinyingrádi (régi porosz Königsberg) stadionban. Egy sorban 12 horvát szurkoló ült, akik közül néhányan kézfogással köszöntötték egymást.

b) Lehetséges-e, hogy az egyes szurkolók 11, 10, 11, 6, 9, 11, 7, 4, 8, 11, 5, 11 másik szurkolóval fogtak kezet? (*3 pont*)

Egy szabadrúgás alkalmával az L pontban lévő labda éppen 16,5 m-re van az alapvonaltól. Az alapvonalnak a labdához legközelebb levő V pontja ugyancsak 16,5 m-re van az alapvonalon elhelyezkedő 7,32 m széles és 2,44 m magas kapu labdához közelebbi függőleges kapufájának B talppontjától.





c) Mekkora szögben látja a L pontban álló focista a BD szakaszt, ha szemmagassága 174 cm-en van? (*9 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2018/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Adjuk meg azon $P(x;y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:*

a) $(x^2-y^2)(x^2+y^2-4)=0$*;*

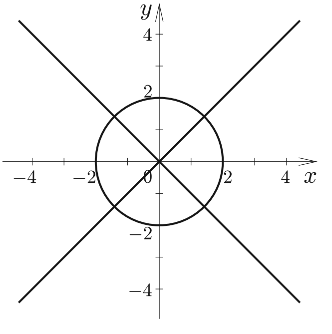
b) $(x^2-y)^2+(x^2+y^2-14y+36)^2=0.$ (*11 pont*)

Megoldás. *a*) A bal oldalon álló kifejezést háromtényezős szorzatként is írhatjuk: $(x-y)(x+y)(x^2+y^2-4)=0$. Három eset van.

I. eset: $y=x$. Az ilyen tulajdonságú P pontok a koordinátasík I. és a III. negyedének szögfelezőjét alkotják.

II. eset: $y=-x$. Az ilyen tulajdonságú P pontok a koordinátasík II. és a IV. negyedének szögfelezőjét alkotják.

III. eset: $x^2+y^2=4$. Az ilyen tulajdonságú P pontok az origó középpontú és 2 egység sugarú körvonalat adják.



A feladat megoldását a három ponthalmaz egyesítése adja, amit a *vázlatrajz* szemléltet.

b) Két nemnegatív szám összege csak akkor lehet 0, ha mindkét szám 0. Ezek alapján a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2,\\ x^2+y^2-14y+36&=0.\end{aligned}\right\}$$

A helyettesítést elvégezve x^2-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$x^4-13x^2+36=0,$$

$$(x^2)_1=4,\quad (x^2)_2=9.$$

Négy értéket kapunk x-re: $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-3$, $x_4=3$. Az egyenletrendszer első egyenletébe visszahelyettesítve kapjuk a második koordinátákat: $y_1=4$, $y_2=4$, $y_3=9$, $y_4=9$.

Vagyis a keresett ponthalmazban négy pont van: $P_1(-2;4)$, $P_2(2;4)$, $P_3(-3;9)$, $P_4(3;9)$.