Hasonlóan látható, hogy

$$\frac{T_{DAB'\triangle}}{T_{XDA\triangle}} = \frac{AD \cdot AB'}{DX \cdot XA} = \frac{AD \cdot BC}{DX \cdot BX}, \tag{4}$$

$$\frac{T_{DAB'\triangle}}{T_{XDA\triangle}} = \frac{B'D}{DX} \cdot \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta}. \tag{5}$$

A (4) és (5) egyenletből kapjuk, hogy

$$\frac{AD \cdot BC}{DX \cdot BX} = \frac{B'D}{DX} \cdot \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta},$$

$$\frac{AD \cdot BC}{B'D \cdot XB} = \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta}. \tag{6}$$

$AB \cdot CD = AD \cdot BC$, ezért a (3) és (6) egyenlet miatt

$$\frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha} = \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin\beta}. \tag{7}$$

Tegyük fel, hogy $X \notin B'D$. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy $X$ a $B'CD$ háromszögben van. Ekkor $CB'D\sphericalangle > \alpha$, ezért $\sin CB'D\sphericalangle > \sin\alpha$, és $ADB'\sphericalangle < \beta$, ezért $\sin ADB'\sphericalangle < \sin\beta$. Ez ellentmond a (7) egyenletnek. Tehát $X$ a $B'D$ szakaszon van. Ebből a feladat állítása könnyen adódik, mert

$$BXA\sphericalangle + DXC\sphericalangle = B'XC\sphericalangle + CXD\sphericalangle = 180^\circ.$$

*Megjegyzés.* Ha $0^\circ < \varphi_1 < \varphi_2 < 180^\circ$, akkor csak abban az esetben lehetséges, hogy $\sin\varphi_1 \geqslant \sin\varphi_2$, ha $\varphi_1 + \varphi_2 \geqslant 180^\circ$. Látható, hogy $CB'D\sphericalangle + \alpha < CB'D\sphericalangle + \alpha + XCB'\sphericalangle = 180^\circ - B'DC\sphericalangle < 180^\circ$, és hasonlóan $ADB'\sphericalangle + \beta < 180^\circ$. Emiatt ez az eset nem fordulhat elő a fenti bizonyításban.

# „Kínai étterem” – a véletlen permutációkról 2.

## 2.2 A „kínai étterem folyamat” (Chinese restaurant process)

Most már rátérhetünk a címben szereplő témánkra.

Hogyan értjük, hogy a tanulók véletlen sorrendben érkeznek? Vagy általánosabban: *hogyan modellezhetjük a „véletlen permutációkat”?*

Nyilván sokféleképpen képzelhetjük el az előbbit, de talán még szemléletesebb, ha a „karácsonyi ajándékozásra” gondolunk. Itt minden tanuló nevét bedobják egy kalapba, jól összekeverik, majd a tanulók egyesével kihúznak egy-egy nevet. Ha itt a sorsolás véget is érne, akkor ez egy jó modell lenne a véletlen permutációra. Azonban a karácsonyi ajándékozásnál vigyázni kell arra is, hogy senki ne húzza önmagát. Ennyiben tehát nekünk nem jó szemléltetés, maradunk az eredetinél, amikor meg van engedve, hogy egyesek önmagukat húzzák.

Ez a modell jó, előállít egy véletlen permutációt – de van vele egy probléma. Ha pl. kiderül, hogy valakit még meg akarnak hívni az osztálykarácsonyra, akkor az egész sorsolást elölről kell kezdeni. A modell nem „dinamikus”. És persze a ciklusok sem fognak közvetlenül látszani. A ciklus-szerkezet és az újrakódolás alapján azonban (lásd a 4. feladat megoldását) lehet dinamikus modellt is csinálni – ez lesz az úgynevezett *„Kínai étterem folyamat”* (*Chinese restaurant process*).

A továbbiakhoz érdemes megjegyezni, hogy vélhetően honnan a folyamat neve. Talán onnan, hogy úgy képzeljük: a kínai vendéglőben egy-egy asztal körül praktikusan végtelen sokan ülhetnek, és bármely két vendég széke közé le lehet tenni még egy széket.

Tekintsük egy $n$ elemű permutáció újrakódolt alakját. Gondoljuk emberekneknek a permutáció elemeit, a számuk azt jelzi, hányadikként érkeztek a vendéglőbe. Az első – az 1-gyel véget érő – ciklus tagjait ültessük az első asztalhoz abban a sorrendben, ahogy a ciklusban jönnek. A második – az első asztalhoz le nem ültetettek közül a legkisebb sorszámúval véget érő – ciklus tagjait ültessük a második asztalhoz, szintén a ciklus sorrendjében, és így tovább. Tegyük fel, hogy van már egy eljárásunk, amely minden újrakódolt permutációt ugyanolyan $\left(\frac{1}{n!}\right)$ valószínűséggel állít elő. Megérkezik az új vendég, fogja a székét és le akar ülni valamelyik asztalhoz, vagy új asztalt is kezdhet. Olyan – természetesen a véletlenen alapuló – utasítást akarunk neki adni, amellyel elérhető, hogy minden $n+1$ elemű permutáció újrakódolt alakja is egyenlő valószínűséggel „valósuljon meg”. Hogy mit akarunk, azt pontosabban a következő – a középponti kérdésről lévén szó ez alkalommal szám nélküli – feladatban fogalmazzuk meg.

**Feladat.** *Tegyük fel, hogy az újonnan érkező vendégnek van egy véletlen szám előállítója. (Mondjuk egyenletes eloszlással forgat körbe egy $n+1$ csúcsú szabályos sokszöget.) Milyen valószínűséggel üljön az egyes asztalokhoz a székével, hogy most minden $n+1$ elemű újrakódolt permutáció ugyanolyan valószínűséggel álljon elő, ha azt látja, hogy az $i$-edik asztalnál $a_i$ számú ember ül?*

**Megoldás.** Tippelhetnénk arra, hogy valahogy úgy kell a valószínűségeket választani, hogy az egyes asztalnál ülők száma ne nagyon térjen el egymástól. De ez nem jó tipp. Azt kell ugyanis elérnünk, hogy kijelölve mondjuk a „balra tarts” irányt az új vendég bármely asztalnál ülőtől balra egyforma valószínűséggel üljön le és ugyanilyen valószínűséggel kezdjen új asztalt. Ez összesen $n+1$ helyet jelent, tehát mindegyik helyre $\frac{1}{n+1}$ valószínűséggel kell leülnie. Tehát az $i$-edik asztalhoz $\frac{a_i}{n+1}$ valószínűséggel ül le, új asztalt $\frac{1}{n+1}$ valószínűséggel kezd. (Vagyis úgy vesszük, hogy az első üres asztalnál egy hely van).

Ez a választás jó, ugyanis azt jelenti, hogy az $n$ elemű véletlen permutáció újrakódolt alakjának bármely két eleme közé, illetve az elejére vagy a végére ugyanolyan valószínűséggel tesszük az $n+1$ számot. Tehát ha az $n$ elemű véletlen permutációk egyforma valószínűséggel álltak elő, akkor valóban egyenlő valószínűséggel áll elő minden $n+1$ elemű permutáció is.

Ez lesz tehát a

**„Kínai étterem folyamat" (KÉF).** *Az első vendég leül az első asztalhoz. A második vendég* $1/2$–$1/2$ *valószínűséggel ül az első vendég mellé, vagy kezd új asztalt. Ezután az* $n$*-edik új vendég* $\frac{a_i}{n}$ *valószínűséggel ül az* $i$*-edik asztalhoz, ha ott érkezésekor* $a_i$ *számú ember ül, illetve* $\frac{1}{n}$ *valószínűséggel kezd új asztalt. (Az* $i$*-edik asztalnál* $a_i$ *helyre ülhet, az üres asztalnál egy hely van.)*

Beláttuk, hogy ez a modell minden azonos elemszámú permutációt ugyanolyan valószínűséggel állít elő. A leírt folyamat eredménye a véletlen permutációk egy dinamikus modellje. Dinamikus, mert az új ember érkezésekor nem kell mindent elölről kezdenünk, mint a karácsonyi sorsolásnál.

A KÉF erejét szemlélteti az, amilyen egyszerűvé válik segítségével a 3. feladat meg-oldása (de lásd a következő feladatok megoldását is):

**7. feladat*.**[1]

*Adjunk választ a KÉF segítségével arra a kérdésre, hogy milyen valószínűséggel lesz* $n$ *elem egy véletlen permutációjában két előre kijelölt elem azonos ciklusban? (A 3. feladat „nyelvén" megfogalmazva: Mi a valószínűsége annak, hogy valamelyik (előre kijelölt) másik helyen, például az első helyen ülő tanulónak is fel kell állnia?)*

### 2.3. További kérdések a véletlen permutációk ciklus-szerkezetéről

Folytathatjuk is a kérdezést. Megkérdezhetjük például a következőket:

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a második helyen ülő tanulónak is fel kell állnia? És mi a valószínűsége annak, hogy mindkettő megússza, hogy fel kelljen állnia?

A következő két feladat általánosságban veti fel ezeket a kérdéseket. Az elsőre adott megoldások mindegyike egészen más szemlélet alapján közelíti meg a feladatot. Így összehasonlíthatjuk a kombinatorikus-számolós, a csoportelméleti-kódolós és a valószínűségi szemléletmódot.

**8. feladat.** *Mi a valószínűsége annak, hogy a 3. feladatban nemcsak az* $n$*-edik helyen ülőnek, hanem még* $s-1$ *(előre kijelölt) másik helyen ülő ember mindegyikének fel kell állnia? (Értelemszerűen az* $n$ *helyen ülőt már nem választhatjuk ki.) Kissé átfogalmazva a kérdést: Mi a valószínűsége annak, hogy összesen* $s$ *előre kijelölt helyről fel kell állnia az ott ülőnek? És a permutációk nyelvén megfogalmazva: Mi a valószínűsége annak, hogy* $n$ *elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt elem egy ciklusban lesz?*

**1. megoldás** *számolással.* A kérdés megválaszolására alkalmazható a 3. feladat első megoldásának a gondolatmenete.

[1] A *-gal jelölt feladatok megoldása a függelékben található.

A számolás áttekinthetősége érdekében a számolást az $s=4$ esetben hajtjuk végre. Megint jelölje $k$ azt, hogy hány ember áll fel összesen. Ezek közül $k-4$ választható szabadon az $n-4$ további ember közül, ezt $\binom{n-4}{k-4}$-féleképp tehetjük meg. A $k$ ember ismét $(k-1)!$-féleképpen alkothatja a ciklust, a maradó $n-k$ ember pedig bármilyen sorrendben ülhet a maradó $n-k$ helyen, ez egy $(n-k)!$-os szorzó. Összességében ez $(n-4)!(k-1)(k-2)(k-3)=6(n-4)!\binom{k-1}{3}$ lehetőséget jelent, és ezt kell minden $k=4,5,\ldots,n$-re összeadni. Felhasználjuk, hogy

$$\sum_{4}^{n}\binom{k-1}{3}=\binom{n}{4},$$

így az összeg $6(n-4)!\binom{n}{4}=\frac{n!}{4}$. Tehát a keresett valószínűség $1/4$. Az általános esetben a

$$\sum_{s}^{n}\binom{k-1}{s-1}=\binom{n}{s}$$

összefüggést kell használni, és a keresett valószínűség $1/s$.

*Megjegyzés.* A 3. feladat második megoldása közvetlenül nem általánosítható. A harmadik megoldásból viszont, amely az „újrakódolást” használja, gyorsan kiolvasható a válasz.

**2. megoldás** *az „újrakódolás” segítségével.* Először tisztázzuk a következőt. Nyilván elég azt vizsgálnunk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy az utolsónak érkező tanulóval együtt másik $s-1$, előre kijelölt helyen ülőnek is fel kell állnia. Az is nyilvánvaló, hogy nem változtat a valószínűségen, ha ehelyett azt vizsgáljuk, hogy nem az utolsó, hanem az *elsőnek érkező* – tehát az első helyen ülő – tanuló kezdi a felállást és másik, előre kijelölt helyen ülő $s-1$ tanulónak kell még felállnia. És ez könnyen lefordítható az újrakódolás segítségével. A megfelelő permutáció újrakódolt alakjánál ugyanis ez azt jelenti, hogy a kijelölt $s-1$ helynek a sorszámai mind előbb jönnek az 1-nél. Vagyis a kérdés a permutációk nyelvén a következőre egyszerűsödik: *Mi a valószínűsége, hogy az első $n$ szám egy véletlen permutációjának az újrakódolásánál előre kijelölt $s-1$ szám előbb jön az 1-esnél?*

Most is csoportosítjuk az újrakódolt permutációkat. Két permutáció akkor kerül azonos csoportba, ha az 1-es és a másik $s-1$ kijelölt szám összességében ugyanazt az $s$ helyet foglalja el, másrészt a többi szám a két permutációban ugyanúgy helyezkedik el. Így minden egyes csoportba $s!$ permutáció kerül, hiszen az $s$ kitüntetett számot ennyiféleképpen lehet permutálni. És ezek közül nyilván $(s-1)!$ olyan van, ahol az 1 van az utolsó helyen, vagyis az $s-1$ kijelölt szám után. A válasz tehát $1/s$. És az eredeti kérdésre visszatérve megint azt kaptuk, hogy a permutációk $1/s$-ed részében fog mind az $s$ kijelölt helyen ülő tanulóra sor kerülni.

A permutációkra vonatkozóan a következőt kaptuk:

**Tétel.** *Annak a valószínűsége, hogy $n$ elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt $s$ elem egy ciklusban van, $1/s$.*

*Megjegyzés* a fenti 2. megoldáshoz. Ez a megoldás nyilván elegánsabb az előző megoldásnál. Viszont ugyanaz a fogalmi nehézség van benne, amire az újrakódolásnál már utaltunk. Elvileg hasonló fogalmi nehézség van a következő megoldásnál is, de a KÉF szemléletessége miatt ez könnyebben „fogható”. Ráadásul a megoldás a 7. feladat megoldásának az általánosítása.

**3. megoldás** *a „kínai étterem folyamat” segítségével.* A kimondott tételre adunk egy új bizonyítást. Tudjuk, hogy a „kínai étterem folyamat” során az $n$ vendég minden permutációja ugyanolyan valószínűséggel áll elő. Ez viszont azt is jelenti, hogy nyugodtan feltehetjük, hogy az előre kijelölt $s$ elem az első $s$ szám, vagyis a KÉF nyelvén: az első $s$ vendég. A kérdés tehát erre egyszerűsödik: Mi a valószínűsége, hogy a „kínai étterem folyamat” során az első $s$ vendég ugyanannál az asztalnál fog ülni?

Minthogy az első vendég benne van, az a kérdés, hogy milyen valószínűséggel fog az utána érkező $s-1$ vendég mindegyike az ő asztalához ülni. A második vendég nyilván $1/2$ valószínűséggel ül az ő asztalához. Most már ketten ülnek ennél az asztalnál, így a harmadik vendég már $2/3$ valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni. Ugyanígy az $i$-edik vendég érkezésekor már $i-1$ ember ül ennél az asztalnál, tehát ő $(i-1)/i$ valószínűséggel fog oda leülni. A keresett valószínűséget úgy kapjuk, hogy ezeket az értékeket összeszorozzuk $i=2,3,\ldots,s$-re. A szorzat, s így a keresett valószínűség $1/s$.

**9. feladat.** *Mi a valószínűsége annak, hogy a* 3. *feladatban* $s-1$ *előre kijelölt helyen ülő tanuló egyikének sem kell felállnia az utolsóval együtt? Vagy átfogalmazva: mi a valószínűsége annak, hogy elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt* $s-1$ *elem egyike sincs egy előre kijelölt* $s$*-edikkel egy ciklusban?*

**Megoldás.** Ez a valószínűség ugyanúgy kiszámolható, mint a 8. feladatban kérdezett valószínűség is kiszámolható volt.

Az ott közölt második megoldás gondolata is alkalmazható ebben az esetben. Megint feltehető, hogy az az elem, amivel a többi nem lehet egy ciklusban, épp az 1-es. A permutációkat ugyanúgy csoportosítjuk, mint ott, és most az a kikötés, hogy a többi $s-1$ elem mindegyike az 1-es után jöjjön az újrakódolásnál. Megint minden csoportban $s!$ permutáció van és közülük megint $(s-1)!$ teljesíti a kikötést. A keresett valószínűség most is $1/s$.

Végül ugyanúgy, mint ott, most is alkalmazható a KÉF is. Most az a kérdés, hogy mi annak a valószínűsége, hogy az első után érkező $s-1$ vendég egyike sem ül az első asztalhoz. A második vendég $1/2$ valószínűséggel ül más asztalhoz, a harmadik vendég vagy a másodikkal ül egy asztalhoz, vagy új asztalt kezd, ennek $2/3$ a valószínűsége, és általában az $i$-edik vendég a számára lehetséges $i$hely közül bárhova ülhet, kivéve az első asztalához, ez egy helyet zár ki. Tehát $(i-1)/i$ annak a valószínűsége, hogy ő a kikötésünknek megfelelő helyre ül. Megint ezeket az értékeket kell összeszorozni és az eredmény ismét $1/s$.

Tételként megfogalmazva a nyert eredményt:

**Tétel.** *Annak a valószínűsége, hogy* $n$ *elem egy véletlen permutációjában* $s-1$ *előre kijelölt elem egyike sem lesz egy* $s$*-edik előre kijelölttel egy ciklusban,* $1/s$.

**10. feladat*.** *Mi a valószínűsége annak, hogy elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt elem mindegyike különböző ciklusban lesz?*

Ismét alkalmazható mindhárom megoldás (lásd a függelékben), és a válasz a következő:

**Tétel.** *Annak a valószínűsége, hogy $n$ elem egy véletlen permutációjában $s$ előre kijelölt elem mindegyike más ciklusban lesz,* $1/s!$.

## 2.4. Várható ciklushossz és ciklusszám

A „kínai étterem folyamat" bevezetésénél már láttuk, rossz várakozás az, hogy a ciklusok hossza egyenletesen fog eloszlani. A KÉF modell ennek az ellenkezőjét mutatja: a „tipikus" esetben a ciklusok nagysága egyáltalán nem lesz egyenletes. (Ez kiderül például a 9. feladatnál is.) Ha egy asztalnál a vendégek száma egyszer nagyobb a többinél, akkor onnantól kezdve nagyobb valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni a következő vendég, ami után megint még nagyobb valószínűséggel fog ideülni a következő stb. Ez persze még csak heurisztikus érv. De a következő fel-adatban ezt egy módon pontosan is megfogalmazzuk.

**11. feladat.** *Várhatóan hány ember fog részt venni a* 3. *feladat „forgásában", ha az osztályban $n$ tanuló van? Vagy ugyanez az „éttermes" megfogalmazásban: Az $n$-edik vendég érkezése után várhatóan hány ember fog ülni az első vendég asztalánál?*

**1. megoldás.** Felhasználjuk, hogy a várható értékek akkor is összeadódnak, ha a változók nem függetlenek. Legyen $X_i$az a valószínűségi változó, amelynek értéke 1, ha az $i$-edik vendég az első asztalhoz ült, és 0, ha nem. (Vagyis $X_i$ az „$i$-edik vendég az első asztalnál ül" esemény karakterisztikus változója vagy indikátora.) Az első asztalnál ekkor $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ vendég fog ülni. Ennek a változónak a várható értékét keressük. Ez tehát megegyezik az egyes változók várható értékének az összegével. Az első változó mindig 1 (az első vendég az első asztalnál ül), a többi változó várható értéke $1/2$, hiszen ennyi a valószínűsége annak, hogy az $i$-edik vendég az első asztalnál ül. A keresett várható érték tehát $(n+1)/2$.

**2. megoldás.** A 8. feladat megoldása során megfogalmazott állítás alapján egy másik, gyorsabb bizonyítást is adhatunk ugyanerre. Ott láttuk, hogy minden 1 és $n$ közötti $k$-ra ugyanannyi, $1/n$ a valószínűsége annak, hogy az első asztalnál $k$ vendég ül. Így a várható érték $\sum\limits_{1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$.

**Tétel.** *Az első $n$ szám egy véletlen permutációjában az* 1*-et tartalmazó ciklus várható elemszáma* $(n+1)/2$.

**12. feladat*.** *Állításunk tehát azt mondja, hogy az első asztalnál ülők számának várható-értéke a vendégek számának felénél* $1/2$*-del több. Másrészt azt mondja, hogy bármely vendégre igaz, hogy ennyi az ő asztalánál ülő vendégek számának várható értéke. De lehetetlen, hogy két – vagy pláne több – asztalnál üljenek ennyien. Ha $A$ az első vendég asztalánál ülők száma, $B$ a második vendég asztalánál ülők* *száma, akkor e két valószínűségi változó mindegyikének $(n+1)/2$ a várható értéke, így összegük várható értéke $n+1$, több, mint a vendégek száma. Hogyan oldható fel ez az ellentmondás?*

**13. feladat*.** *Következik-e az előbb megfogalmazott tételből, hogy a legnagyobb ciklus várható elemszáma (a legfoglaltabb asztalnál ülő vendégek száma) is $(n+1)/2$?*

Egy véletlen permutáció legnagyobb ciklusának várható értékét pontosan meghatározni nehezebb feladat. Ez Golomb-nak sikerült, aki 1964-ben bizonyította, hogy ha $M_n$ jelöli az $n$ elemű véletlen permutáció legnagyobb ciklusának várható értékét, akkor $M_n/n$ egy állandóhoz tart, amelynek értéke 0,624 329 9..., az úgynevezett Golomb–Dickman-féle konstans.

Nemcsak a legnagyobb ciklus várható hossza érdekes kérdés, hanem az is, hogy várhatóan hány ciklus van $n$ elem egy véletlen permutációjában. Ez számolással aránylag nehezen jön ki, a KÉF segítségével egyszerű.

Jelöljük ugyanis $E(n)$-nel ezt a várható értéket. $E(1)=1$, $E(2)=3/2$ nyilvánvaló. Általában ha $E(n-1)$-et már ismerjük, akkor a KÉF szerint az érkező $n$-edik vendég $1/n$ valószínűséggel kezd új asztalt, azaz növeli a ciklusok számát. Tehát $E(n)=E(n-1)+1/n$. Ebből következik, hogy

**Tétel.** *Egy $n$ elemű véletlen permutációban a ciklusszám várható értéke* $\sum\limits_{1}^{n} \frac{1}{n}$.

A KÉF alkalmazása az alábbi feladattal lesz „kerek”:

**14. feladat*.** *Bizonyítsuk be a KÉF segítségével is a 6. feladat állítását, amely szerint annak a valószínűsége, hogy egy adott elem egy $n$ elemű véletlen permutációban pontosan $k$ elemű ciklusban van, $k$-tól függetlenül mindig $1/n$.*

## Befejezés

Egyrészt szeretném még egyszer hangsúlyozni, hogy *Gyenes Zoltánnal együtt* gondoltuk át az itt leírtak legnagyobb részét. Remélhetőleg sikerült valamennyire érzékeltetni, hogy a „kínai étterem folyamat” segítségével milyen jól szemléltethetők és kezelhetők a véletlen permutációk egyszerű tulajdonságai. Elegánsan szemlélteti pl. a ciklusszám várható értékét, de különösen frappánsnak tűnik ebből a szempontból a 7. feladat megoldása, valamint az utána következő három feladat hasonló megoldása. És érdemes megfontolni a következőt is. Ha a „kínai étterem folyamatot” minden előzmény nélkül definiáljuk, és úgy kérdezzük meg, hogy vajon az első két vendég, vagy az utolsó kettő fog-e nagyobb valószínűséggel egy asztalnál ülni, akkor erre – a háttér ismerete nélkül – elég nehéznek látszik a válasz.

## Függelék – megoldások

**5. feladat.** Csak az identitáson, azaz az $1\ 2\ \ldots\ n$ permutáción nem változtat. Minden más permutációnál az első elmozduló szám hátrébb kerül az újrakódolásnál.

**7. feladat.** Beláttuk, hogy a KÉF minden $n$ elemű véletlen permutációt ugyanolyan valószínűséggel állít elő. De ez azt is jelenti, hogy bármely két vendégre ugyanannyi lesz a valószínűsége annak, hogy ez a két vendég egy asztalnál ül. Elég tehát az első két vendégre kiszámolni ezt a valószínűséget. Az első vendég biztosan az első asztalhoz ül, a második pedig $1/2$ valószínűséggel ül mellé. Ennyi tehát a valószínűsége, hogy $n$ elem egy véletlen permutációjában két előre kijelölt elem egy ciklusban van.

**10. feladat.** Ismét alkalmazható mind a háromféle megoldás. Kijön számolással. Kijön az újrakódolással is. Most itt is fel kell tennünk, hogy az első szám van kijelölve és a kikötés az, hogy ezek nagyság szerint fordított sorrendben jöjjenek. A csoportok most is azok, mint a korábbi két megoldásban (lásd a 8. feladatnál), minden csoportban $s!$ permutáció van, de ezek közül most minden csoportban csak egy felel meg a kikötésünknek, tehát a keresett valószínűség $1/s!$.

Végül alkalmazható a KÉF is, és most az a kikötés, hogy az első $s$ vendég mindegyike új asztalt kezdjen, ez az $i$-edik vendég esetében $1/i$ valószínűséggel történik, tehát a keresett valószínűség $1/s!$-nak adódik.

**12. feladat.** Nincs ellentmondás. Az $A+B$ valószínűségi változó értéke ugyanis akár $2n$ is lehet, ha az összes vendég az első asztalnál ül, azaz az egész permutáció egyetlen ciklus. Ebben az esetben ugyanis, és általában is, ha az első két vendég egy asztalnál ül, azt a ciklust, amelyben ülnek, ez a változó kétszer számolja meg.

**13. feladat.** Nem. Ez a várható érték nyilvánvalóan nagyobb, hiszen minden olyan eset, amikor az első elem nem a legnagyobb ciklusban van – azaz nem az első asztalnál ülnek a legtöbben – a leghosszabb ciklus várható értékéhez többet ad hozzá, mint az első asztalnál ülők várható értékéhez.

A 3. feladat első megoldásában használt számolással könnyen kijön, hogy ha $k > n/2$, akkor $P(\text{van pontosan } k \text{ hosszú ciklus}) = 1/k$. Másrészt ha van ilyen hosszú ciklus, akkor biztosan ez a leghosszabb, így minden ilyen $k$-ra 1-et ad a „legnagyobb ciklus hossza" valószínűségi változó várható értékéhez. Ez önmagában $(n+1)/2$, és ehhez jönnek még azok az esetek, amikor csak kisebb ciklusok vannak. Páros $n$-re is könnyű látni, hogy $P(\text{van pontosan } n/2 \text{ hosszú ciklus}) > 1/n$, tehát a legalább $n/2$ hosszú ciklusok is több, mint $(n+1)/2$-t adnak a várható értékhez.

**14. feladat.** Elég ezt belátni az első elemről. Tehát a KÉF-nél elég azt belátni, hogy az első vendég asztalánál $1/n$ valószínűséggel ülnek pont $k$-an ($k$-tól függetlenül).

$n = 1, 2$-re könnyen belátható az állítás. Tegyük fel, hogy $n$-re már tudjuk az állítást. Bebizonyítjuk $n$ helyett $(n+1)$-re is.

Azt nézzük, hogy hogyan ülhet pontosan $k$ ember az első asztalnál, miután az $(n+1)$-edik vendég leült. Ez kétféleképp lehetséges:

1) Az utolsó vendég az első asztalhoz ült és így lettek ott $k$-an. Ez akkor van, ha az első $n$ vendég közül $k-1$ vendég ül az első asztalnál és az utolsó vendég

ehhez az asztalhoz ül. Az előbbi valószínűsége az indukciós feltevés szerint $1/n$, az utolsó vendég pedig $\frac{k-1}{n+1}$ valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni.

Ennek az esetnek a valószínűsége tehát $\frac{k-1}{n(n+1)}$.

2) Az utolsó vendég nem ide ült, de már az első $n$ vendég után is $k$ vendég ült az első asztalnál. Utóbbinak megint $1/n$ a valószínűsége az indukciós feltevés szerint. Annak a valószínűsége pedig, hogy az utolsó vendég nem ide ült, $\frac{n+1-k}{n+1}$.

Ennek az esetnek a valószínűsége tehát $\frac{n+1-k}{n(n+1)}$

A két esetet összeadva azt kapjuk, hogy a valószínűség éppen $\frac{1}{n+1}$, és ezt akartuk belátni.

**Surányi László**

## 58. Rátz László Vándorgyűlés

**Győr, 2018. július 3–6.**

Az idei vándorgyűlést lapunk alapítója, Arany Dániel városában, Győrött rendezte meg a Bolyai János Matematika Társulat. Jó választás volt, hiszen idén ünnepli a KöMaL 125 éves fennállását. Ez az évforduló több helyen is visszaköszönt, pl. egy plakátkiállítás formájában, de a középiskolás tanárverseny feladatait is régebbi és kevésbé régi KöMaL-feladatok alkották (a feladatokat és az eredményeket külön közöljük).

A vándorgyűlésről hosszú beszámoló olvasható az Érintő Elektronikus Matematikai Lapok szeptemberi számában*. Az előadások anyagai megtekinthetők a vándorgyűlés honlapján (`http://www.bolyai.hu/rlv2018.htm`).

A 2019-es vándorgyűlés helyszíne Gödöllő, ide ismét nagy létszámban várja a matematikatanárokat a Bolyai János Matematikai Társulat.

### A középiskolai tanárok versenyének feladatai

**1.** Hány olyan háromjegyű szám van, amelyet a szám számjegyeinek összegével akár növelünk, akár csökkentünk, csupa egyenlő jeggyel írt számot kapunk? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4. (*KöMaL,* 1959)

**2.** Mennyi a 99999 szám (5 db 9-es) köbében a számjegyek összege? (A) 72; (B) 90; (C) 99; (D) 108; (E) 144. (*KöMaL,* 2012)

**3.** Egy számot nevezzünk *egoistának,* ha minden számjegye annyiszor szerepel a számban, amennyi maga a számjegy. Egoista szám például a 132332. Hány hatjegyű egoista szám van? (A) 15; (B) 21; (C) 60; (D) 81; (E) 82. (*KöMaL,* 2007)

*`http://www.ematlap.hu/index.php/tanora-szakkor-2018-09/782-arany-daniel-nyomdokain-gyorben`.