KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

68. évfolyam 8. szám — Budapest, 2018. november

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Volter Etelka, Oláh Vera: Geometriafeladatok a KöMaL-ban: Bogdán Zoltán 450

Az 59. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása, 2. rész 451

Surányi László: „Kínai étterem" – a véletlen permutációkról 2. 454

58. Rátz László Vándorgyűlés 462

A középiskolai tanárok versenyének feladatai 462

A 2018. évi Beke Manó Emlékdíjasok 465

Varga Péter: Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire 465

Számadó László: Megoldásvázlatok a 2018/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához 469

Matematika feladat megoldása (4912.) 478

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (599–603.) 479

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1504–1510.) 480

A 2017–2018-as tanév pontversenyeinek összesített eredménye XXI

A B pontversenyben kitűzött feladatok (4982–4989.) 481

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (734–736.) 482

Informatikából kitűzött feladatok (466–468., 30., 129.) 483

Kántor Sándorné Varga Tünde: Segner János András, a turbina atyja 489

Solt György: Feynman és a legkisebb hatás elve ... 490

Markovits Tibor: Megoldásvázlatok a 2018/7. szám emelt szintű fizika gyakorló feladatsorához 493

Mérési feladat megoldása (378.) 496

Fizika gyakorlatok megoldása (634., 637.) 498

Fizika feladatok megoldása (5003., 5023., 5028., 5035., 5042.) 499

Fizikából kitűzött feladatok (381., 649–652., 5067–5077.) 505

Problems in Mathematics 509

Problems in Physics 511

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Geometriafeladatok a KöMaL-ban:

Bogdán Zoltán

Cegléd (1933–2018)

Nyáron kaptuk a szomorú hírt, hogy szerkesztőbizottságunk egykori tagja, Bogdán Zoltán 85 éves korában elhunyt. Zoli ceglédi volt, Cegléden született, ott élt, ott tanult, majd később 38 éven át ott tanított matematikát a Kossuth Lajos Gimnáziumban. Nyugdíjazása után még évekig óraadó volt.

Nagyon sok diákot vezetett be a matematika általa oly nagyon szeretett titokzatos világába. Többen az ő hatására lettek matematikusok, sok diákja pályaválasztásában meghatározó volt az elhivatottsága, példamutatása. Szívén viselte a matematikaversenyek ügyét: szervezte a három megye (Pest, Fejér, Veszprém) versenyeit, lelkesen kísérte, vitte az iskola tehetséges tanulóit a versenyekre. Tagja lett az OKTV versenybizottságának, később bekapcsolódott a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny szervezésébe is. Ismert és elismert volt szakmai körökben, több tankönyv írása fűződik a nevéhez.

Sok-sok éven át elképzelhetetlen lett volna kedves, jókedélyű személye és mély tudása nélkül a Bolyai János Matematikai Társulat Rátz László Vándorgyűlése, a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó vagy a nagykanizsai konferencia.

1986 januárjában a KöMaL akkori megbízott felelős szerkesztője, Lugosi Erzsébet kérte fel, legyen tagja a matematikai szerkesztőbizottságnak. Így lett 15 éven keresztül a KöMaL geometria feladatainak kitalálója, gondozója, megoldások, cikkek precíz megfogalmazója. Amit Zoli leírt, abban biztosak lehettünk. Aki a KöMaL archívumában* rákeres Bogdán Zoltán nevére, ezekben az években sok versenybeszámolóját, néhány szakmai cikkét olvashatja. Feladatkitűzőként azért szerepel a lapban keveset a neve, mert az olyan feladatokat, amelyek a szerkesztőbizottság tagjaitól származnak, névaláírás nélkül szoktuk megjelentetni.

A lapnál együtt dolgozott Ács Pállal, Bakos Tiborral, Fried Ervinnével – talán most velük együtt a szférák geometriáját tanulmányozza. Többen, akikkel korábban együtt szerkesztette a lapot (Csirmaz László, Hermann Péter, Károlyi Gyula, Kiss György, Kós Géza, Lóránt László, Oláh Vera, Pataki János, Ratkó Éva), tanár kollégáival együtt megőrizzük emlékét.

Volter Etelka
Ceglédi Kossuth Lajos Gimnázium helyettes igazgatója
és
Oláh Vera
1992–2001 között a KöMaL főszerkesztője

---

*`http://db.komal.hu/KomalHU/`.

Az 59. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása, 2. rész

Második nap*

4. Helynek *nevezzük a sík minden olyan* (x, y) *pontját, amelyre* x *és* y *olyan pozitív egészek, melyek mindegyike kisebb vagy egyenlő, mint* 20.

Kezdetben a 400 *hely mindegyike szabad. Anna és Balázs felváltva zsetonokat raknak a helyekre, Anna kezd. Anna minden lépésekor egy új piros zsetont helyez egy még szabad helyre olymódon, hogy semelyik két piros zseton helyének távolsága se legyen* $\sqrt{5}$*-tel egyenlő. Balázs minden lépésekor egy új kék zsetont helyez egy még szabad helyre. (Egy kék zseton által elfoglalt hely távolsága bármely másik foglalt helytől tetszőleges lehet.) A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos nem tud lépni.*

Határozzuk meg a legnagyobb K *értéket, amelyre igaz az, hogy Anna biztosan el tud helyezni* K *darab piros zsetont, bárhogyan is játszik Balázs.*

Egri Máté megoldása. Azt bizonyítjuk, hogy $K = 100$.

Két hely távolsága akkor $\sqrt{5}$, ha „lólépésre” vannak egymástól, azaz kettőt az egyik irányba, egyet pedig arra merőlegesen lépünk. Tehát ha a helyeket „sakktáblaszerűen” kiszínezzük, akkor bármely két hely, aminek távolsága $\sqrt{5}$, különböző színű. Ekkor ha Anna azt a stratégiát követi, hogy csak a fekete helyekre rak (amikből 200 van), akkor legalább azok felére tud rakni, azaz 100 helyre. Tehát $K \geqslant 100$.

A 20×20-as táblát feloszthatjuk 25 db 4×4-es táblára. Bebizonyítjuk, hogy egy 4×4-es táblán Balázs garantálni tudja, hogy Anna csak 4 helyre tudjon tenni.

Ha így betűzzük meg a 4×4-es táblát és Balázs mindig Anna lépésével a tábla középpontjára tükrös helyre rak, akkor Anna már nem rakhat többször ugyanolyan betűre, így valóban legfeljebb négyszer rakhat. 25 db 4×4-es tábla van, tehát $K \leqslant 100$.

A	B	C	D
C	D	A	B
B	A	D	C
D	C	B	A

Mivel $K \geqslant 100$ és $K \leqslant 100$, ezért $K = 100$.

5. *Legyen* $a_1, a_2, \ldots$ *pozitív egészeknek egy végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy van egy olyan* $N > 1$ *egész, hogy minden* $n \geqslant N$*-re*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van egy olyan M *pozitív egész, hogy* $a_m = a_{m+1}$ *minden* $m \geqslant M$*-re.*

*Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.

Matolcsi Dávid megoldása. $S(n)$-nek nevezem a feladatban definiált összeget. $N<n$-re $S(n)$ és $S(n+1)$ is egész, így

$$S(n+1)-S(n)=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$$

is mindig egész.

Legyen $(a_1,a_n)=x$ és $a_1=xa_1'$, illetve $a_n=xa_n'$. Ekkor

$$a_1'(S(n+1)-S(n))=\frac{xa_n'a_1'}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{x}-a_n'$$

egész szám. Tehát

$$\frac{xa_n'a_1'}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{x}$$

is egész.

Legyen most $(a_{n+1},x)=y$ és $a_{n+1}=ya_{n+1}'$, illetve $x=yx'$. Így

$$\frac{xa_n'a_1'}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{x}=\frac{a_n'a_1'}{a_{n+1}'}+\frac{a_{n+1}'}{x'}=\frac{x'a_n'a_1'+a_{n+1}'^2}{x'a_{n+1}'}$$

egész. Tehát $x'\mid a_{n+1}'^2$. Másrészt tudjuk, hogy $(a_{n+1}',x')=1$. Ez csak úgy lehetséges, ha $x'=1$, tehát $x=y$, azaz $x\mid a_{n+1}$.

Ezzel általánosan beláttuk, hogy $(a_1,a_k)\mid a_{k+1}$. Másrészt értelemszerűen $(a_1,a_k)\mid a_1$, így $(a_1,a_k)\mid(a_1,a_{k+1})$.

Teljes indukció szerint tehát ha $k<t$, akkor $(a_1,a_k)\mid(a_1,a_t)$.

Mivel a_1-nek csak véges sok osztója van, az (a_1,a_t) sorozat pedig végtelen és monoton növekvő, létezik egy r korlát, amitől kezdve minden $(a_t,a_1)=x$ egyenlő. Így ettől kezdve minden $a_t=xa_t'$, ahol $(a_t',a_1')=1$ (ahol $a_1=xa_1'$). Ekkor

$$\frac{a_t}{a_{t+1}}+\frac{a_{t+1}-a_t}{a_1}=\frac{a_t'}{a_{t+1}'}+\frac{a_{t+1}'-a_t'}{a_1'}=\frac{a_t'a_1'+a_{t+1}'^2-a_t'a_{t+1}'}{a_{t+1}'a_1'}$$

egész.

Ez azt jelenti, hogy $a_{t+1}'\mid a_t'a_1'$. Mivel $(a_{t+1}',a_1')=1$, ezért $a_{t+1}'\mid a_t'$. Ez az r korláttól kezdve folyamatosan igaz, így $a_t'\mid a_r'$ és az a_t' sorozat monoton csökkenő. Mivel a_r'-nek csak véges sok osztója van, a végtelen a_t' sorozatnak egy M korlát után minden eleme egyenlő lesz.

Így $M<m$-re minden $a_m=xa_m'$ is egyenlő lesz, ezzel az állítást beláttuk.

6. *Az $ABCD$ konvex négyszögre teljesül $AB\cdot CD=BC\cdot DA$. Az X pont az $ABCD$ négyszög olyan belső pontja, amelyre teljesül*

$$XAB\sphericalangle=XCD\sphericalangle\quad \text{és}\quad XBC\sphericalangle=XDA\sphericalangle.$$

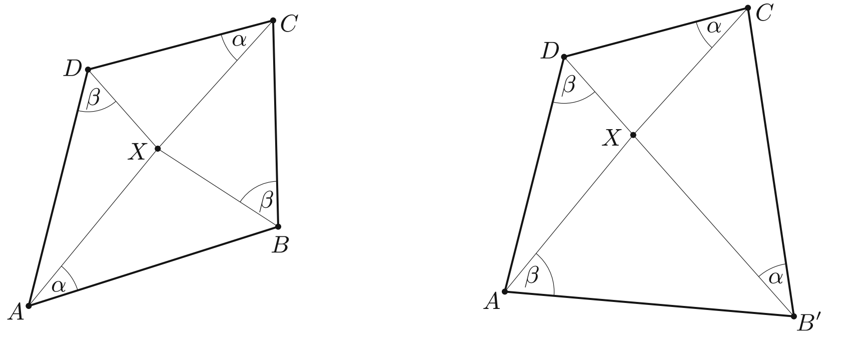
Bizonyítsuk be, hogy $BXA\sphericalangle+DXC\sphericalangle=180^\circ$.

Gáspár Attila megoldása.

Legyen $XAB\sphericalangle = XCD\sphericalangle = \alpha$ és $XBC\sphericalangle = XDA\sphericalangle = \beta$. Vegyük fel a B' pontot az *ábra* szerint úgy, hogy $XB' = \frac{XA\cdot XC}{XB}$ és $AXB'\sphericalangle = BXC\sphericalangle$. Ekkor

$$\frac{AX}{B'X} = \frac{AX\cdot XB}{XA\cdot XC} = \frac{XB}{XC}m$$

ezért $AXB' \sim BXC$. Emiatt $B'AX\sphericalangle = CBX\sphericalangle = \beta$, és $AB' = BC\cdot\frac{AX}{BX}$.



$$\begin{aligned} B'XC\sphericalangle &= AXB'\sphericalangle + B'XC\sphericalangle - AXB'\sphericalangle = \\ &= AXB\sphericalangle + BXC\sphericalangle - BXC\sphericalangle = AXB\sphericalangle, \quad \text{és} \end{aligned}$$

$$\frac{B'X}{CX} = \frac{XA\cdot XC}{XB\cdot XC} = \frac{XA}{XB},$$

ezért $B'XC \sim AXB$. Így $XB'C\sphericalangle = \alpha$ és $B'C = AB\cdot\frac{XC}{XB}$. Látható, hogy $DCB'\sphericalangle = \alpha + XCB'\sphericalangle = 180^\circ - B'XC\sphericalangle$, ezért $\sin DCB'\sphericalangle = \sin BXC'\sphericalangle$. Ebből következik, hogy

(1)
$$\frac{T_{B'CD}}{T_{XB'C}} = \frac{DC\cdot CB'\cdot\sin DCB'\sphericalangle}{B'X\cdot XC\cdot\sin B'XC\sphericalangle} = \frac{DC\cdot CB'}{B'X\cdot XC} = $$

$$= \frac{DC\cdot AB\cdot\frac{XC}{XB}}{B'X\cdot XC} = \frac{CD\cdot AB}{XB'\cdot XB}.$$

A területeket másképp felírva

(2)
$$\frac{T_{B'CD\triangle}}{T_{XB'C\triangle}} = \frac{B'D\cdot B'C\cdot\sin CB'D\sphericalangle}{B'X\cdot B'C\cdot\sin\alpha} = \frac{B'D}{B'X}\cdot\frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha}.$$

Az (1) és (2) egyenletet összevetve kapjuk, hogy

$$\frac{CD\cdot AB}{XB'\cdot XB} = \frac{B'D}{B'X}\cdot\frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha},$$

(3)
$$\frac{CD\cdot AB}{B'D\cdot XB} = \frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin\alpha}.$$

Hasonlóan látható, hogy

$$\text{(4)} \qquad \frac{T_{DAB'\triangle}}{T_{XDA\triangle}} = \frac{AD \cdot AB'}{DX \cdot XA} = \frac{AD \cdot BC}{DX \cdot BX},$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{T_{DAB'\triangle}}{T_{XDA\triangle}} = \frac{B'D}{DX} \cdot \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin \beta}.$$

A (4) és (5) egyenletből kapjuk, hogy

$$\frac{AD \cdot BC}{DX \cdot BX} = \frac{B'D}{DX} \cdot \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin \beta},$$

$$\text{(6)} \qquad \frac{AD \cdot BC}{B'D \cdot XB} = \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin \beta}.$$

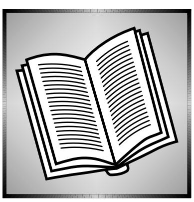
$AB \cdot CD = AD \cdot BC$, ezért a (3) és (6) egyenlet miatt

$$\text{(7)} \qquad \frac{\sin CB'D\sphericalangle}{\sin \alpha} = \frac{\sin ADB'\sphericalangle}{\sin \beta}.$$

Tegyük fel, hogy $X \notin B'D$. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy X a $B'CD$ háromszögben van. Ekkor $CB'D\sphericalangle > \alpha$, ezért $\sin CB'D\sphericalangle > \sin \alpha$, és $ADB'\sphericalangle < \beta$, ezért $\sin ADB'\sphericalangle < \sin \beta$. Ez ellentmond a (7) egyenletnek. Tehát X a $B'D$ szakaszon van. Ebből a feladat állítása könnyen adódik, mert

$$BXA\sphericalangle + DXC\sphericalangle = B'XC\sphericalangle + CXD\sphericalangle = 180^\circ.$$

Megjegyzés. Ha $0^\circ < \varphi_1 < \varphi_2 < 180^\circ$, akkor csak abban az esetben lehetséges, hogy $\sin \varphi_1 \geqslant \sin \varphi_2$, ha $\varphi_1 + \varphi_2 \geqslant 180^\circ$. Látható, hogy $CB'D\sphericalangle + \alpha < CB'D\sphericalangle + \alpha + XCB'\sphericalangle = 180^\circ - B'DC\sphericalangle < 180^\circ$, és hasonlóan $ADB'\sphericalangle + \beta < 180^\circ$. Emiatt ez az eset nem fordulhat elő a fenti bizonyításban.



„Kínai étterem” – a véletlen permutációkról 2.

2.2 A „kínai étterem folyamat” (Chinese restaurant process)

Most már rátérhetünk a címben szereplő témánkra.

Hogyan értjük, hogy a tanulók véletlen sorrendben érkeznek? Vagy általánosabban: *hogyan modellezhetjük a „véletlen permutációkat”?*

Nyilván sokféleképpen képzelhetjük el az előbbit, de talán még szemléletesebb, ha a „karácsonyi ajándékozásra” gondolunk. Itt minden tanuló nevét bedobják egy kalapba, jól összekeverik, majd a tanulók egyesével kihúznak egy-egy nevet. Ha itt a sorsolás véget is érne, akkor ez egy jó modell lenne a véletlen permutációra. Azonban a karácsonyi ajándékozásnál vigyázni kell arra is, hogy senki ne húzza önmagát. Ennyiben tehát nekünk nem jó szemléltetés, maradunk az eredetinél, amikor meg van engedve, hogy egyesek önmagukat húzzák.

Ez a modell jó, előállít egy véletlen permutációt – de van vele egy probléma. Ha pl. kiderül, hogy valakit még meg akarnak hívni az osztálykarácsonyra, akkor az egész sorsolást elölről kell kezdeni. A modell nem „dinamikus”. És persze a ciklusok sem fognak közvetlenül látszani. A ciklus-szerkezet és az újrakódolás alapján azonban (lásd a 4. feladat megoldását) lehet dinamikus modellt is csinálni – ez lesz az úgynevezett *„Kínai étterem folyamat”* (*Chinese restaurant process*).

A továbbiakhoz érdemes megjegyezni, hogy vélhetően honnan a folyamat neve. Talán onnan, hogy úgy képzeljük: a kínai vendéglőben egy-egy asztal körül praktikusan végtelen sokan ülhetnek, és bármely két vendég széke közé le lehet tenni még egy széket.

Tekintsük egy n elemű permutáció újrakódolt alakját. Gondoljuk emberek-nek a permutáció elemeit, a számuk azt jelzi, hányadikként érkeztek a vendéglőbe. Az első – az 1-gyel véget érő – ciklus tagjait ültessük az első asztalhoz abban a sorrendben, ahogy a ciklusban jönnek. A második – az első asztalhoz le nem ültetettek közül a legkisebb sorszámúval véget érő – ciklus tagjait ültessük a második asztalhoz, szintén a ciklus sorrendjében, és így tovább. Tegyük fel, hogy van már egy eljárásunk, amely minden újrakódolt permutációt ugyanolyan $\left(\frac{1}{n!}\right)$ valószínűséggel állít elő. Megérkezik az új vendég, fogja a székét és le akar ülni valamelyik asztalhoz, vagy új asztalt is kezdhet. Olyan – természetesen a véletlenen alapuló – utasítást akarunk neki adni, amellyel elérhető, hogy minden $n+1$ elemű permutáció újrakódolt alakja is egyenlő valószínűséggel „valósuljon meg”. Hogy mit akarunk, azt pontosabban a következő – a középponti kérdésről lévén szó ez alkalommal szám nélküli – feladatban fogalmazzuk meg.

Feladat. *Tegyük fel, hogy az újonnan érkező vendégnek van egy véletlen szám előállítója. (Mondjuk egyenletes eloszlással forgat körbe egy $n+1$ csúcsú szabályos sokszöget.) Milyen valószínűséggel üljön az egyes asztalokhoz a székével, hogy most minden $n+1$ elemű újrakódolt permutáció ugyanolyan valószínűséggel álljon elő, ha azt látja, hogy az i-edik asztalnál a_i számú ember ül?*

Megoldás. Tippelhetnénk arra, hogy valahogy úgy kell a valószínűségeket választani, hogy az egyes asztalnál ülők száma ne nagyon térjen el egymástól. De ez nem jó tipp. Azt kell ugyanis elérnünk, hogy kijelölve mondjuk a „balra tarts” irányt az új vendég bármely asztalnál ülőtől balra egyforma valószínűséggel üljön le és ugyanilyen valószínűséggel kezdjen új asztalt. Ez összesen $n+1$ helyet jelent, tehát mindegyik helyre $\frac{1}{n+1}$ valószínűséggel kell leülnie. Tehát az i-edik asztalhoz $\frac{a_i}{n+1}$ valószínűséggel ül le, új asztalt $\frac{1}{n+1}$ valószínűséggel kezd. (Vagyis úgy vesszük, hogy az első üres asztalnál egy hely van).

Ez a választás jó, ugyanis azt jelenti, hogy az n elemű véletlen permutáció újrakódolt alakjának bármely két eleme közé, illetve az elejére vagy a végére ugyanolyan valószínűséggel tesszük az $n+1$ számot. Tehát ha az n elemű véletlen permutációk egyforma valószínűséggel álltak elő, akkor valóban egyenlő valószínűséggel áll elő minden $n+1$ elemű permutáció is.

Ez lesz tehát a

„Kínai étterem folyamat" (KÉF). *Az első vendég leül az első asztalhoz. A második vendég* $1/2$–$1/2$ *valószínűséggel ül az első vendég mellé, vagy kezd új asztalt. Ezután az n-edik új vendég $\frac{a_i}{n}$ valószínűséggel ül az i-edik asztalhoz, ha ott érkezésekor a_i számú ember ül, illetve $\frac{1}{n}$ valószínűséggel kezd új asztalt. (Az i-edik asztalnál a_i helyre ülhet, az üres asztalnál egy hely van.)*

Beláttuk, hogy ez a modell minden azonos elemszámú permutációt ugyanolyan valószínűséggel állít elő. A leírt folyamat eredménye a véletlen permutációk egy dinamikus modellje. Dinamikus, mert az új ember érkezésekor nem kell mindent elölről kezdenünk, mint a karácsonyi sorsolásnál.

A KÉF erejét szemlélteti az, amilyen egyszerűvé válik segítségével a 3. feladat meg-oldása (de lásd a következő feladatok megoldását is):

7. feladat*.[1]

Adjunk választ a KÉF segítségével arra a kérdésre, hogy milyen valószínűséggel lesz n elem egy véletlen permutációjában két előre kijelölt elem azonos ciklusban? (A 3. *feladat „nyelvén" megfogalmazva: Mi a valószínűsége annak, hogy valamelyik (előre kijelölt) másik helyen, például az első helyen ülő tanulónak is fel kell állnia?)*

2.3. További kérdések a véletlen permutációk ciklus-szerkezetéről

Folytathatjuk is a kérdezést. Megkérdezhetjük például a következőket:

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a második helyen ülő tanulónak is fel kell állnia? És mi a valószínűsége annak, hogy mindkettő megússza, hogy fel kelljen állnia?

A következő két feladat általánosságban veti fel ezeket a kérdéseket. Az elsőre adott megoldások mindegyike egészen más szemlélet alapján közelíti meg a feladatot. Így összehasonlíthatjuk a kombinatorikus-számolós, a csoportelméleti-kódolós és a valószínűségi szemléletmódot.

8. feladat. *Mi a valószínűsége annak, hogy a* 3. *feladatban nemcsak az n-edik helyen ülőnek, hanem még $s-1$ (előre kijelölt) másik helyen ülő ember mindegyikének fel kell állnia? (Értelemszerűen az n helyen ülőt már nem választhatjuk ki.) Kissé átfogalmazva a kérdést: Mi a valószínűsége annak, hogy összesen s előre kijelölt helyről fel kell állnia az ott ülőnek? És a permutációk nyelvén megfogalmazva: Mi a valószínűsége annak, hogy n elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt elem egy ciklusban lesz?*

1. megoldás *számolással.* A kérdés megválaszolására alkalmazható a 3. feladat első megoldásának a gondolatmenete.

[1] A *-gal jelölt feladatok megoldása a függelékben található.

A számolás áttekinthetősége érdekében a számolást az $s=4$ esetben hajtjuk végre. Megint jelölje k azt, hogy hány ember áll fel összesen. Ezek közül $k-4$ választható szabadon az $n-4$ további ember közül, ezt $\binom{n-4}{k-4}$-féleképp tehetjük meg. A k ember ismét $(k-1)!$-féleképpen alkothatja a ciklust, a maradó $n-k$ ember pedig bármilyen sorrendben ülhet a maradó $n-k$ helyen, ez egy $(n-k)!$-os szorzó. Összességében ez $(n-4)!(k-1)(k-2)(k-3)=6(n-4)!\binom{k-1}{3}$ lehetőséget jelent, és ezt kell minden $k=4,5,\dots,n$-re összeadni. Felhasználjuk, hogy

$$\sum_4^n \binom{k-1}{3} = \binom{n}{4},$$

így az összeg $6(n-4)!\binom{n}{4}=\frac{n!}{4}$. Tehát a keresett valószínűség $1/4$. Az általános esetben a

$$\sum_s^n \binom{k-1}{s-1} = \binom{n}{s}$$

összefüggést kell használni, és a keresett valószínűség $1/s$.

Megjegyzés. A 3. feladat második megoldása közvetlenül nem általánosítható. A harmadik megoldásból viszont, amely az „újrakódolást” használja, gyorsan kiolvasható a válasz.

2. megoldás *az „újrakódolás” segítségével.* Először tisztázzuk a következőt. Nyilván elég azt vizsgálnunk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy az utolsónak érkező tanulóval együtt másik $s-1$, előre kijelölt helyen ülőnek is fel kell állnia. Az is nyilvánvaló, hogy nem változtat a valószínűségen, ha ehelyett azt vizsgáljuk, hogy nem az utolsó, hanem az *elsőnek érkező* – tehát az első helyen ülő – tanuló kezdi a felállást és másik, előre kijelölt helyen ülő $s-1$ tanulónak kell még felállnia. És ez könnyen lefordítható az újrakódolás segítségével. A megfelelő permutáció újrakódolt alakjánál ugyanis ez azt jelenti, hogy a kijelölt $s-1$ helynek a sorszámai mind előbb jönnek az 1-nél. Vagyis a kérdés a permutációk nyelvén a következőre egyszerűsödik: *Mi a valószínűsége, hogy az első n szám egy véletlen permutációjának az újrakódolásánál előre kijelölt $s-1$ szám előbb jön az 1-esnél?*

Most is csoportosítjuk az újrakódolt permutációkat. Két permutáció akkor kerül azonos csoportba, ha az 1-es és a másik $s-1$ kijelölt szám összességében ugyanazt az s helyet foglalja el, másrészt a többi szám a két permutációban ugyanúgy helyezkedik el. Így minden egyes csoportba $s!$ permutáció kerül, hiszen az s kitüntetett számot ennyiféleképpen lehet permutálni. És ezek közül nyilván $(s-1)!$ olyan van, ahol az 1 van az utolsó helyen, vagyis az $s-1$ kijelölt szám után. A válasz tehát $1/s$. És az eredeti kérdésre visszatérve megint azt kaptuk, hogy a permutációk $1/s$-ed részében fog mind az s kijelölt helyen ülő tanulóra sor kerülni.

A permutációkra vonatkozóan a következőt kaptuk:

Tétel. *Annak a valószínűsége, hogy n elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt s elem egy ciklusban van, $1/s$.*

Megjegyzés a fenti 2. megoldáshoz. Ez a megoldás nyilván elegánsabb az előző megoldásnál. Viszont ugyanaz a fogalmi nehézség van benne, amire az újrakódolásnál már utaltunk. Elvileg hasonló fogalmi nehézség van a következő megoldásnál is, de a KÉF szemléletessége miatt ez könnyebben „fogható”. Ráadásul a megoldás a 7. feladat megoldásának az általánosítása.

3. megoldás *a „kínai étterem folyamat” segítségével.* A kimondott tételre adunk egy új bizonyítást. Tudjuk, hogy a „kínai étterem folyamat” során az n vendég minden permutációja ugyanolyan valószínűséggel áll elő. Ez viszont azt is jelenti, hogy nyugodtan feltehetjük, hogy az előre kijelölt s elem az első s szám, vagyis a KÉF nyelvén: az első s vendég. A kérdés tehát erre egyszerűsödik: Mi a valószínűsége, hogy a „kínai étterem folyamat” során az első s vendég ugyanannál az asztalnál fog ülni?

Minthogy az első vendég benne van, az a kérdés, hogy milyen valószínűséggel fog az utána érkező $s-1$ vendég mindegyike az ő asztalához ülni. A második vendég nyilván $1/2$ valószínűséggel ül az ő asztalához. Most már ketten ülnek ennél az asztalnál, így a harmadik vendég már $2/3$ valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni. Ugyanígy az i-edik vendég érkezésekor már $i-1$ ember ül ennél az asztalnál, tehát ő $(i-1)/i$ valószínűséggel fog oda leülni. A keresett valószínűséget úgy kapjuk, hogy ezeket az értékeket összeszorozzuk $i=2,3,\ldots,s$-re. A szorzat, s így a keresett valószínűség $1/s$.

9. feladat. *Mi a valószínűsége annak, hogy a* 3. *feladatban* $s-1$ *előre kijelölt helyen ülő tanuló egyikének sem kell felállnia az utolsóval együtt? Vagy átfogalmazva: mi a valószínűsége annak, hogy elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt* $s-1$ *elem egyike sincs egy előre kijelölt* s*-edikkel egy ciklusban?*

Megoldás. Ez a valószínűség ugyanúgy kiszámolható, mint a 8. feladatban kérdezett valószínűség is kiszámolható volt.

Az ott közölt második megoldás gondolata is alkalmazható ebben az esetben. Megint feltehető, hogy az az elem, amivel a többi nem lehet egy ciklusban, épp az 1-es. A permutációkat ugyanúgy csoportosítjuk, mint ott, és most az a kikötés, hogy a többi $s-1$ elem mindegyike az 1-es után jöjjön az újrakódolásnál. Megint minden csoportban $s!$ permutáció van és közülük megint $(s-1)!$ teljesíti a kikötést. A keresett valószínűség most is $1/s$.

Végül ugyanúgy, mint ott, most is alkalmazható a KÉF is. Most az a kérdés, hogy mi annak a valószínűsége, hogy az első után érkező $s-1$ vendég egyike sem ül az első asztalhoz. A második vendég $1/2$ valószínűséggel ül más asztalhoz, a harmadik vendég vagy a másodikkal ül egy asztalhoz, vagy új asztalt kezd, ennek $2/3$ a valószínűsége, és általában az i-edik vendég a számára lehetséges $i$hely közül bárhova ülhet, kivéve az első asztalához, ez egy helyet zár ki. Tehát $(i-1)/i$ annak a valószínűsége, hogy ő a kikötésünknek megfelelő helyre ül. Megint ezeket az értékeket kell összeszorozni és az eredmény ismét $1/s$.

Tételként megfogalmazva a nyert eredményt:

Tétel. *Annak a valószínűsége, hogy* n *elem egy véletlen permutációjában* $s-1$ *előre kijelölt elem egyike sem lesz egy* s*-edik előre kijelölttel egy ciklusban,* $1/s$.

10. feladat*. *Mi a valószínűsége annak, hogy elem egy véletlen permutációjában előre kijelölt elem mindegyike különböző ciklusban lesz?*

Ismét alkalmazható mindhárom megoldás (lásd a függelékben), és a válasz a következő:

Tétel. *Annak a valószínűsége, hogy n elem egy véletlen permutációjában s előre kijelölt elem mindegyike más ciklusban lesz,* $1/s!$.

2.4. Várható ciklushossz és ciklusszám

A „kínai étterem folyamat” bevezetésénél már láttuk, rossz várakozás az, hogy a ciklusok hossza egyenletesen fog eloszlani. A KÉF modell ennek az ellenkezőjét mutatja: a „tipikus” esetben a ciklusok nagysága egyáltalán nem lesz egyenletes. (Ez kiderül például a 9. feladatnál is.) Ha egy asztalnál a vendégek száma egyszer nagyobb a többinél, akkor onnantól kezdve nagyobb valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni a következő vendég, ami után megint még nagyobb valószínűséggel fog ideülni a következő stb. Ez persze még csak heurisztikus érv. De a következő fel-adatban ezt egy módon pontosan is megfogalmazzuk.

11. feladat. *Várhatóan hány ember fog részt venni a* 3. *feladat „forgásában”, ha az osztályban n tanuló van? Vagy ugyanez az „éttermes” megfogalmazásban: Az n-edik vendég érkezése után várhatóan hány ember fog ülni az első vendég asztalánál?*

1. megoldás. Felhasználjuk, hogy a várható értékek akkor is összeadódnak, ha a változók nem függetlenek. Legyen $X_i$az a valószínűségi változó, amelynek értéke 1, ha az i-edik vendég az első asztalhoz ült, és 0, ha nem. (Vagyis X_i az „i-edik vendég az első asztalnál ül” esemény karakterisztikus változója vagy indikátora.) Az első asztalnál ekkor $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ vendég fog ülni. Ennek a változónak a várható értékét keressük. Ez tehát megegyezik az egyes változók várható értékének az összegével. Az első változó mindig 1 (az első vendég az első asztalnál ül), a többi változó várható értéke $1/2$, hiszen ennyi a valószínűsége annak, hogy az i-edik vendég az első asztalnál ül. A keresett várható érték tehát $(n+1)/2$.

2. megoldás. A 8. feladat megoldása során megfogalmazott állítás alapján egy másik, gyorsabb bizonyítást is adhatunk ugyanerre. Ott láttuk, hogy minden 1 és n közötti k-ra ugyanannyi, $1/n$ a valószínűsége annak, hogy az első asztalnál k vendég ül. Így a várható érték $\sum\limits_1^n \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$.

Tétel. *Az első n szám egy véletlen permutációjában az* 1*-et tartalmazó ciklus várható elemszáma* $(n+1)/2$.

12. feladat*. *Állításunk tehát azt mondja, hogy az első asztalnál ülők számának várható-értéke a vendégek számának felénél* $1/2$*-del több. Másrészt azt mondja, hogy bármely vendégre igaz, hogy ennyi az ő asztalánál ülő vendégek számának várható értéke. De lehetetlen, hogy két – vagy pláne több – asztalnál üljenek ennyien. Ha A az első vendég asztalánál ülők száma, B a második vendég asztalánál ülők* *száma, akkor e két valószínűségi változó mindegyikének $(n+1)/2$ a várható értéke, így összegük várható értéke $n+1$, több, mint a vendégek száma. Hogyan oldható fel ez az ellentmondás?*

13. feladat*. *Következik-e az előbb megfogalmazott tételből, hogy a legnagyobb ciklus várható elemszáma (a legfoglaltabb asztalnál ülő vendégek száma) is $(n+1)/2$?*

Egy véletlen permutáció legnagyobb ciklusának várható értékét pontosan meghatározni nehezebb feladat. Ez Golomb-nak sikerült, aki 1964-ben bizonyította, hogy ha M_n jelöli az n elemű véletlen permutáció legnagyobb ciklusának várható értékét, akkor M_n/n egy állandóhoz tart, amelynek értéke $0{,}624\,329\,9\ldots$, az úgynevezett Golomb–Dickman-féle konstans.

Nemcsak a legnagyobb ciklus várható hossza érdekes kérdés, hanem az is, hogy várhatóan hány ciklus van n elem egy véletlen permutációjában. Ez számolással aránylag nehezen jön ki, a KÉF segítségével egyszerű.

Jelöljük ugyanis $E(n)$-nel ezt a várható értéket. $E(1)=1$, $E(2)=3/2$ nyilvánvaló. Általában ha $E(n-1)$-et már ismerjük, akkor a KÉF szerint az érkező n-edik vendég $1/n$ valószínűséggel kezd új asztalt, azaz növeli a ciklusok számát. Tehát $E(n)=E(n-1)+1/n$. Ebből következik, hogy

Tétel. *Egy n elemű véletlen permutációban a ciklusszám várható értéke* $\sum\limits_{1}^{n}\dfrac{1}{n}$.

A KÉF alkalmazása az alábbi feladattal lesz „kerek”:

14. feladat*. *Bizonyítsuk be a KÉF segítségével is a 6. feladat állítását, amely szerint annak a valószínűsége, hogy egy adott elem egy n elemű véletlen permutációban pontosan k elemű ciklusban van, k-tól függetlenül mindig $1/n$.*

Befejezés

Egyrészt szeretném még egyszer hangsúlyozni, hogy *Gyenes Zoltánnal együtt* gondoltuk át az itt leírtak legnagyobb részét. Remélhetőleg sikerült valamennyire érzékeltetni, hogy a „kínai étterem folyamat” segítségével milyen jól szemléltethetők és kezelhetők a véletlen permutációk egyszerű tulajdonságai. Elegánsan szemlélteti pl. a ciklusszám várható értékét, de különösen frappánsnak tűnik ebből a szempontból a 7. feladat megoldása, valamint az utána következő három feladat hasonló megoldása. És érdemes megfontolni a következőt is. Ha a „kínai étterem folyamatot” minden előzmény nélkül definiáljuk, és úgy kérdezzük meg, hogy vajon az első két vendég, vagy az utolsó kettő fog-e nagyobb valószínűséggel egy asztalnál ülni, akkor erre – a háttér ismerete nélkül – elég nehéznek látszik a válasz.

Függelék – megoldások

5. feladat. Csak az identitáson, azaz az $1\ 2\ \ldots\ n$ permutáción nem változtat. Minden más permutációnál az első elmozduló szám hátrébb kerül az újrakódolásnál.

7. feladat. Beláttuk, hogy a KÉF minden n elemű véletlen permutációt ugyanolyan valószínűséggel állít elő. De ez azt is jelenti, hogy bármely két vendégre ugyanannyi lesz a valószínűsége annak, hogy ez a két vendég egy asztalnál ül. Elég tehát az első két vendégre kiszámolni ezt a valószínűséget. Az első vendég biztosan az első asztalhoz ül, a második pedig $1/2$ valószínűséggel ül mellé. Ennyi tehát a valószínűsége, hogy n elem egy véletlen permutációjában két előre kijelölt elem egy ciklusban van.

10. feladat. Ismét alkalmazható mind a háromféle megoldás. Kijön számolással. Kijön az újrakódolással is. Most itt is fel kell tennünk, hogy az első szám van kijelölve és a kikötés az, hogy ezek nagyság szerint fordított sorrendben jöjjenek. A csoportok most is azok, mint a korábbi két megoldásban (lásd a 8. feladatnál), minden csoportban $s!$ permutáció van, de ezek közül most minden csoportban csak egy felel meg a kikötésünknek, tehát a keresett valószínűség $1/s!$.

Végül alkalmazható a KÉF is, és most az a kikötés, hogy az első s vendég mindegyike új asztalt kezdjen, ez az i-edik vendég esetében $1/i$ valószínűséggel történik, tehát a keresett valószínűség $1/s!$-nak adódik.

12. feladat. Nincs ellentmondás. Az $A+B$ valószínűségi változó értéke ugyanis akár $2n$ is lehet, ha az összes vendég az első asztalnál ül, azaz az egész permutáció egyetlen ciklus. Ebben az esetben ugyanis, és általában is, ha az első két vendég egy asztalnál ül, azt a ciklust, amelyben ülnek, ez a változó kétszer számolja meg.

13. feladat. Nem. Ez a várható érték nyilvánvalóan nagyobb, hiszen minden olyan eset, amikor az első elem nem a legnagyobb ciklusban van – azaz nem az első asztalnál ülnek a legtöbben – a leghosszabb ciklus várható értékéhez többet ad hozzá, mint az első asztalnál ülők várható értékéhez.

A 3. feladat első megoldásában használt számolással könnyen kijön, hogy ha $k > n/2$, akkor $P(\text{van pontosan } k \text{ hosszú ciklus}) = 1/k$. Másrészt ha van ilyen hosszú ciklus, akkor biztosan ez a leghosszabb, így minden ilyen k-ra 1-et ad a „legnagyobb ciklus hossza” valószínűségi változó várható értékéhez. Ez önmagában $(n+1)/2$, és ehhez jönnek még azok az esetek, amikor csak kisebb ciklusok vannak. Páros n-re is könnyű látni, hogy $P(\text{van pontosan } n/2 \text{ hosszú ciklus}) > 1/n$, tehát a legalább $n/2$ hosszú ciklusok is több, mint $(n+1)/2$-t adnak a várható értékhez.

14. feladat. Elég ezt belátni az első elemről. Tehát a KÉF-nél elég azt belátni, hogy az első vendég asztalánál $1/n$ valószínűséggel ülnek pont k-an (k-tól függetlenül).

$n = 1, 2$-re könnyen belátható az állítás. Tegyük fel, hogy n-re már tudjuk az állítást. Bebizonyítjuk n helyett $(n+1)$-re is.

Azt nézzük, hogy hogyan ülhet pontosan k ember az első asztalnál, miután az $(n+1)$-edik vendég leült. Ez kétféleképp lehetséges:

1) Az utolsó vendég az első asztalhoz ült és így lettek ott k-an. Ez akkor van, ha az első n vendég közül $k-1$ vendég ül az első asztalnál és az utolsó vendég

ehhez az asztalhoz ül. Az előbbi valószínűsége az indukciós feltevés szerint $1/n$, az utolsó vendég pedig $\frac{k-1}{n+1}$ valószínűséggel fog ehhez az asztalhoz ülni.

Ennek az esetnek a valószínűsége tehát $\frac{k-1}{n(n+1)}$.

2) Az utolsó vendég nem ide ült, de már az első n vendég után is k vendég ült az első asztalnál. Utóbbinak megint $1/n$ a valószínűsége az indukciós feltevés szerint. Annak a valószínűsége pedig, hogy az utolsó vendég nem ide ült, $\frac{n+1-k}{n+1}$.

Ennek az esetnek a valószínűsége tehát $\frac{n+1-k}{n(n+1)}$

A két esetet összeadva azt kapjuk, hogy a valószínűség éppen $\frac{1}{n+1}$, és ezt akartuk belátni.

Surányi László

58. Rátz László Vándorgyűlés

Győr, 2018. július 3–6.

Az idei vándorgyűlést lapunk alapítója, Arany Dániel városában, Győrött rendezte meg a Bolyai János Matematika Társulat. Jó választás volt, hiszen idén ünnepli a KöMaL 125 éves fennállását. Ez az évforduló több helyen is visszaköszönt, pl. egy plakátkiállítás formájában, de a középiskolás tanárverseny feladatait is régebbi és kevésbé régi KöMaL-feladatok alkották (a feladatokat és az eredményeket külön közöljük).

A vándorgyűlésről hosszú beszámoló olvasható az Érintő Elektronikus Matematikai Lapok szeptemberi számában*. Az előadások anyagai megtekinthetők a vándorgyűlés honlapján (`http://www.bolyai.hu/rlv2018.htm`).

A 2019-es vándorgyűlés helyszíne Gödöllő, ide ismét nagy létszámban várja a matematikatanárokat a Bolyai János Matematikai Társulat.

A középiskolai tanárok versenyének feladatai

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyet a szám számjegyeinek összegével akár növelünk, akár csökkentünk, csupa egyenlő jeggyel írt számot kapunk? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4. (*KöMaL,* 1959)

2. Mennyi a 99999 szám (5 db 9-es) köbében a számjegyek összege? (A) 72; (B) 90; (C) 99; (D) 108; (E) 144. (*KöMaL,* 2012)

3. Egy számot nevezzünk *egoistának,* ha minden számjegye annyiszor szerepel a számban, amennyi maga a számjegy. Egoista szám például a 132332. Hány hatjegyű egoista szám van? (A) 15; (B) 21; (C) 60; (D) 81; (E) 82. (*KöMaL,* 2007)

*`http://www.ematlap.hu/index.php/tanora-szakkor-2018-09/782-arany-daniel-nyomdokain-gyorben`.

4. Hány olyan n egész szám van, amelyre $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_n(n+1) = 10$ teljesül? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4. (*KöMaL,* 2003)

5. Legfeljebb hány részre osztható fel a sík 4 darab párhuzamos oldalú téglalappal? (A) 22; (B) 26; (C) 28; (D) 30; (E) 32. (*KöMaL,* 1991)

6. Az első 1000 pozitív egész szám közül legfeljebb hányat választhatunk ki úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám összege ne legyen osztható a különbségükkel? (A) 330; (B) 331; (C) 332; (D) 333; (E) 334. (*KöMaL,* 2007)

7. Rögzíteni szeretnénk a függönyt a karnisra. Az egyenlő távolságokat akkor tudjuk egyszerűen biztosítani, ha a két szélső csipesz odacsíptetése után a maradékban van középső, sőt azt is megköveteljük, hogy ez minden további kettéosztásnál, a középső csipesz rögzítése után is teljesüljön. Hány csipeszt tehetünk a karnisra, ha így szeretnénk rögzíteni a függönyt? (A) 31; (B) 32; (C) 33; (D) 34; (E) 35. (*KöMaL,* 2004)

8. Tetszőleges x valós számra legyen $f(x)$ a $4x+1$, $x+2$, $-2x+4$ értékek minimuma. Mennyi $f(x)$ legnagyobb értéke? (A) 2; (B) $2\frac{1}{3}$; (C) $2\frac{1}{2}$; (D) $2\frac{2}{3}$; (E) 3. (*KöMaL,* 2003)

9. A KML légitársaság ingajáratokat közlekedtet néhány város között úgy, hogy egy városból nem lehet háromnál több másikba közvetlenül eljutni. Legfeljebb egy átszállással viszont már bárhonnan eljuthatunk bárhová. Legfeljebb hány város között járnak a gépek? (A) 7; (B) 8; (C) 9; (D) 10; (E) 11. (*KöMaL,* 1992)

10. Hány megoldása van az $x+y+z=100$ egyenletnek a pozitív egész számok körében? (A) 4755; (B) 4753; (C) 4851; (D) 4950; (E) 5050. (*KöMaL,* 2006)

11. Egy 10 emeletes házban egyszer a lift a földszintről indult. Útja során csak egész emeleten állt meg, mégpedig mindegyiken pontosan egyszer. Közben legfeljebb hány méter utat tett meg, ha két szomszédos szint közti különbség 4 m? (A) 200; (B) 220; (C) 240; (D) 260; (E) 280. (*KöMaL,* 1981)

12. Egy labirintus folyosói egy 10-oldalú konvex sokszög oldalai és átlói. Legalább hány mécsest kell elhelyeznünk a labirintusban ahhoz, hogy minden járat meg legyen világítva? (A) 5; (B) 9; (C) 10; (D) 11; (E) 12. (*KöMaL,* 1987)

13. Legfeljebb hány zárt intervallumot adhatunk meg a számegyenesen úgy, hogy bármely három közül legyen két egymást metsző, viszont bármely négynek a közös része üres legyen? (A) 5; (B) 6; (C) 7; (D) 8; (E) 9. (*KöMaL,* 1988)

14. Adott négy pozitív szám, a, b, c, d. Az ab, ac, ad, bc, bd, cd szorzatok közül ötöt ismerünk, ezek 2, 3, 4, 5, 6. Mennyi a hatodik szorzat értéke? (A) 2,4; (B) 3,6; (C) 4,8; (D) 8; (E) 12. (*KöMaL,* 2009)

15. Egy ötszög négy belső szöge 120°-os. Az ezekkel a szögekkel szemközti, egymáshoz csatlakozó négy oldal hossza sorban: 2, 8, 5, 5. Milyen hosszú az ötödik oldal? (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) 5. (*KöMaL,* 2011)

16. Hány valós gyöke van a $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0$ egyenletnek? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4. (*KöMaL,* 1987)

17. Legkevesebb hány egyenes vágással lehet egy 5×5-ös négyzetet egységnyi élhosszúságú négyzetekre felvágni, ha az egyes vágások után kapott részeket tetszés szerint rendezhetjük el az újabb vágás előtt, és így egyszerre többüket is kettévághatjuk? (A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 7; (E) 8. (*KöMaL,* 1989)

18. Egy kerek asztalnál hazugok és igazmondók ülnek, összesen 30-an. Tudjuk, hogy minden hazudós két szomszédja közül pontosan az egyik hazudós. A 30 ember közül 12-en azt mondják, hogy nekik pontosan egy hazudós szomszédjuk van, a többiek pedig azt, hogy mindkét szomszédjuk hazudós. Hány hazudós ül az asztalnál? (A) 12; (B) 13; (C) 14; (D) 15; (E) 16. (*KöMaL,* 2009)

19. Mi a valószínűsége annak, hogy 3 kockával egy hatost dobunk? (A) $\frac{25}{36}$; (B) $\frac{25}{54}$; (C) $\frac{25}{72}$; (D) $\frac{25}{108}$; (E) $\frac{25}{216}$. (*KöMaL,* 1934)

20. Három egymást követő páros szám szorzata $87XXXXX8$ alakú. Mennyi ebben a nyolcjegyű számban a számjegyek összege? (A) 42; (B) 43; (C) 44; (D) 45; (E) 46. (*KöMaL,* 1981)

21. Hány olyan pozitív egész n szám van, amelynek $\frac{n}{2}$ darab pozitív osztója van? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4. (*KöMaL,* 1995)

22. Egy szám négy prímszám szorzata. Melyik ez a szám, ha tudjuk, hogy a négy prímszám négyzetösszege 476? (A) 1947; (B) 1986; (C) 1989; (D) 1995; (E) 2013. (*KöMaL,* 1989)

23. A 20×20-as sakktábla néhány mezőjén bábu áll. Egy bábut akkor vehetünk le a tábláról, ha annak sorában vagy oszlopában a mezőknek legalább a fele üres. Legalább hány bábura van szükségünk ahhoz, hogy azokat alkalmasan elhelyezve egyiküket se lehessen levenni? (A) 100; (B) 120; (C) 121; (D) 144; (E) 145. (*KöMaL,* 2011)

24. Tímár Mihály nehéz helyzetbe került, mert lekopott a kincset rejtő zsákról a vörös félhold. Annyit tud, hogy a négy zsák közül a legnehezebbikben a búzába rejtve ott van a kincs. Három mérés során az derült ki, hogy az első zsák a másodikkal együtt kisebb, a harmadikkal együtt ugyanakkora, a negyedikkel együtt pedig nagyobb tömegű, mint a másik két zsák. Hányadik zsákban van a kincs? (A) 1.; (B) 2.; (C) 3.; (D) 4.; (E) Nem dönthető el egyértelműen. (*KöMaL,* 2006)

25. Öt különböző színű kockával dobunk. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a dobások összege 11? (A) 205; (B) 210; (C) 216; (D) 224; (E) 228. (*KöMaL,* 1994)

26. Egy háromszög két oldalának hossza 12 és 18. Egy másik, ehhez hasonló, de vele nem egybevágó háromszög két oldalának hossza ugyancsak 12 és 18. Mekkora a kisebb kerületű háromszög harmadik oldalának hossza? (A) 7; (B) 8; (C) 9; (D) 10; (E) 11. (*KöMaL,* 2011)

27. Egy 12 fős csoport tagjait hányféleképpen lehet 6 párba osztani? (A) 720; (B) 1440; (C) 4320; (D) 10 395; (E) 12 496. (*KöMaL,* 1928)

28. Adott egy szabályos 13 oldalú sokszög. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai a sokszög csúcsai közül valók és a háromszög tartalmazza a sokszög középpontját? (A) 66; (B) 78; (C) 91; (D) 143; (E) 208. (*KöMaL,* 1985)

29. Hány olyan $\overline{abc}$ háromjegyű prímszám van, amelynek valamely többszöröse az a, b, c számjegyek valamilyen más sorrendjével írható fel? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4. (*KöMaL,* 1959)

30. Egy játékkockával addig dobunk, míg hatos nem jön ki. Mi a valószínűsége annak, hogy közben nem dobunk ötöst? (A) $\frac{1}{6}$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{3}$; (D) $\frac{1}{2}$; (E) $\frac{5}{6}$. (*KöMaL,* 1974)

A feladatsort **Róka Sándor** állította össze és **Kiss Géza** lektorálta

A középiskolai tanárok versenyének eredménye

1. Fridrik Richárd (Szeged, Magister Universitas) .... 110 pont
2. Fonyó Lajos (Keszthely, Keszthelyi Vajda János Gimn.) .... 105 pont
3. Baloghné Cseh Judit (Szolnok, Varga Katalin Gimn.) .... 101 pont
4. Mahler Attila (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn.) .... 98 pont
5. B. Varga József (Temerin, Petar Kočić Ált. Isk.) .... 97 pont
6. Csanády Zsuzsa (Budapest, Baár-Madas Református Gimn.) .... 91 pont
7. Fonyóné Németh Ildikó (Keszthely, Keszthelyi Vajda János Gimn.) ..... 88 pont
8. Szabadfalviné Kormányos Anikó (Miskolc, Földes Ferenc Gimn.) ...... 84 pont
8. Jeneiné Bicsák Krisztina (Budapest, Szent István Gimn.) .... 84 pont
10. Vértes Judit (Budapest, Kölcsey Ferenc Gimn.) .... 82 pont.

Az általános iskolai tanárok versenyének* eredménye

1. Egyed László (Bajai III. Béla Gimn.) .... 111 pont
2. Paróczay Eszter (Gödöllői Premontrei Szent Norbert Ált. Isk. és Gimn.) . 97 pont
3. Bajcsi Barnabás (Lakszakállas, Magyar Tannyelvű Alapiskola) .... 91 pont
4. Aszódiné Pálfi Edit (Kecskemét, Zrínyi Ilona Ált. Isk.) .... 86 pont
5. Miklós Ildikó (Vámosmikolai Ált. Tagisk.) .... 85 pont
6. Tóth Gabriella (Csantavér, Hunyadi János Ált. Isk.) .... 77 pont.

A 2018. évi Beke Manó Emlékdíjasok

A Beke Manó Emlékdíj Bizottság döntése alapján 2018-ban a díj második fokozatában részesült **Bíró Éva, Csóka Gézáné, Csordásné Szécsi Jolán, Gulyásné Nemes Katalin, Maróti Lászlóné, Maksa Gyula** és **Paulovits György.**

A részletes indoklás honlapunkon (`www.komal.hu`) olvasható.

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{x}=6-x. \qquad (5\ pont)$$

b) Oldjuk meg a $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ intervallumon az alábbi egyenletet:

$$\sin^2 x+\cos x=-1. \qquad (6\ pont)$$

*Az általános iskolai tanárok versenyének feladatait nem közöljük.

2. A májusban megírt emelt szintű matematika érettségi dolgozatok 1. feladatának eredményessége látható az alábbi táblázatban:

A vizsgált év	2013	2014	2015	2016	2017
Eredményesség (%)	84	88	79	86	83

a) Határozzuk meg az eredményességek terjedelmét, átlagát és szórását. (*4 pont*)

Csaba érettségi bizonyítványában az alábbi osztályzatok szerepelnek: 3; 4; 5; 4; 3; 4.

b) Legkevesebb hány osztályzatot kellene törölni a bizonyítványából, hogy az osztályzatok mediánja megváltozzon? (*4 pont*)

Csaba 12. osztályos év végi bizonyítványában 7 db 4-es és 5 db 5-ös osztályzat szerepel, melyek közül véletlenszerűen kiválasztunk 3 osztályzatot.

c) Igazoljuk, hogy ha az osztályzatokat *visszatevés nélkül* választjuk ki, akkor annak a valószínűsége, hogy 2 db 4-est és 1 db 5-öst választottunk $\frac{21}{44}$. (*4 pont*)

3. Egy paralelogrammában az átlóhosszak négyzetének összege 74,45, az átlóhosszak négyzetének különbsége 32,13.

a) Számítsuk ki a paralelogramma átlóinak hosszát. (*4 pont*)

b) Igaz-e, hogy a paralelogramma átlóinak felezőpontján átmenő, annak hosszabbik oldalával párhuzamos egyenes két egyenlő területű részre osztja a paralelogrammát? (*4 pont*)

c) Határozzuk meg a paralelogramma szomszédos oldalhosszainak négyzetösszegét. (*6 pont*)

4. Egy konyhai papírtörlő tekercs 80 darab 0,5 mm vastag téglalap alakú lapból áll. Egy papírlap 240 mm hosszú és 230 mm széles téglalap, melyek a szélességüknél perforációs (tépést megkönnyítő) résszel kapcsolódnak egymáshoz. A tekercs közepén lévő üres henger átmérője 40 mm.

a) Hány teljes fordulatot tesz meg az üres henger, ha az egész papírtekercset körbe letekerjük? (A perforációs részek méretétől tekintsünk el.) (*9 pont*)

Az egyik ismert márkájú papírtörlő tekercs lapjaira mintákat is nyomtatnak. A gyártósoron 8 különböző mintából csak 3-féle mintát használnak fel egy lapra. A gyártósoron az összes lehetséges mintahármast beállítják a gépeken, amelyeket egymás után folyamatosan nyomtatnak a papírtörlő lapjaira.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott tekercs egy lapját kiválasztva a tekercsen van még egy ugyanilyen mintázatú másik lap? (*5 pont*)

II. rész

5. A térképrészleten egy háromszög alakú telek látható, melynek Toldi úti oldala 50 m, Petőfi úti oldala 65 m és Mikszáth úti oldala 75 m hosszú. A telket Csaba, László és Levente örökli, akik megállapodnak, hogy a Toldi úttal párhuzamos kerítésekkel három egyenlő területű részre osztják fel a telket úgy, hogy mindenkinek legyen kijárata a Mikszáth útra, a főútra.

a) Milyen hosszú drótkerítést kell venniük a telkek szétválasztásához? (*6 pont*)

A helyi építési szabályzat nem engedélyezi olyan épület építését, amelynek két szomszédos fala által bezárt szög 60°-nál kisebb.

b) Kiadható-e építési engedély arra az épületre, amelyet úgy terveznek, hogy a Toldi és a Mikszáth utca sarkán fog állni, és külső falai ezzel a két utcával párhuzamosak lesznek? (*4 pont*)

Csaba, László és Levente megállapodtak abban, hogy a telek felosztása után kockadobással döntik el, hogy milyen sorrendben választanak a telkek közül. Mindenki dob egyet egy szabályos dobókockával, és ha nincs azonos dobás, akkor a legnagyobbat dobó választ először, majd a második legnagyobbat dobó másodszor, végül a legkisebb számot dobó kapja a maradék telekrészt. Ha van egyenlő a dobott számok között, akkor a dobás érvénytelen és addig dobnak újra, amíg nem lesz három különböző eredmény.

c) Mekkora valószínűséggel választ először Levente telket? (*6 pont*)

6. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x)=\frac{x^3}{8}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2} \quad \text{és} \quad g(x)=-x^2+2x.$$

a) Adjuk meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit. (*5 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az f és g függvények grafikonjának három közös pontja van. (*5 pont*)

c) Számítsuk ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt terület nagyságát az $x_1=0$ és $x_2=2$ határok között. (*6 pont*)

7. *a*) Hány különböző 124 jegyű tízes számrendszerbeli természetes szám képezhető 62 db nulla és 62 db egyes számjegyből? (Elegendő csak a kiszámítás módját megadni.) (*3 pont*)

b) Mutassuk meg, hogy a 62 db nullából és 62 db egyesből álló 124-jegyű tízes számrendszerbeli természetes számok egyike sem lehet négyzetszám. (*5 pont*)

c) Határozzuk meg annak a számrendszernek az alapszámát, amelyben a 124 felírható olyan 3 jegyű számként, melynek minden számjegye azonos. (*8 pont*)

8. Az egyetemi felvételi eljárásban július közepéig lehet módosítani azoknak a szakoknak a sorrendjét, amelyekre felvételizni szeretnénk. Márta 5 különböző államilag támogatott képzésre jelentkezett, és közülük három szak esetén beadta a jelentkezést az önköltséges képzésre is.

a) Hány különböző sorrendben adhatja be a módosításnál ezeket a szakokat, ha az nem fordulhat elő, hogy egy bizonyos szakból előkelőbb helyen áll az önköltséges képzés, mint az államilag finanszírozott? (*5 pont*)

Márta a módosítás után sajnos csak az önköltséges képzésre jutott be, amelynek díja félévenként 250 000 Ft. Szülei az elmúlt 5 évben havi 20 000 Ft-ot tettek félre erre a célra. A megtakarítás 5 évig egy olyan számlán volt, amely havonta 1%-ot kamatozott, és az összeget havonta tőkésítették.

b) Legfeljebb hány félévnyi tandíjra elegendő a teljes lekötött összeg? (*5 pont*)

Márta úgy döntött, hogy a lekötött összegből 500 000 Ft-ot rögtön berak a bankba, majd a következő év elején még újabb 500 000 Ft-ot hozzátesz. Ebben a konstrukcióban a kamatot évente tőkésítették, azaz minden év végén adták hozzá a bent lévő összeghez a kamatot.

c) Hány százalék volt az éves kamat, ha Márta a második év végén csak a kamatokból 76 250 Ft-ot tudott felvenni? (*7 pont*)

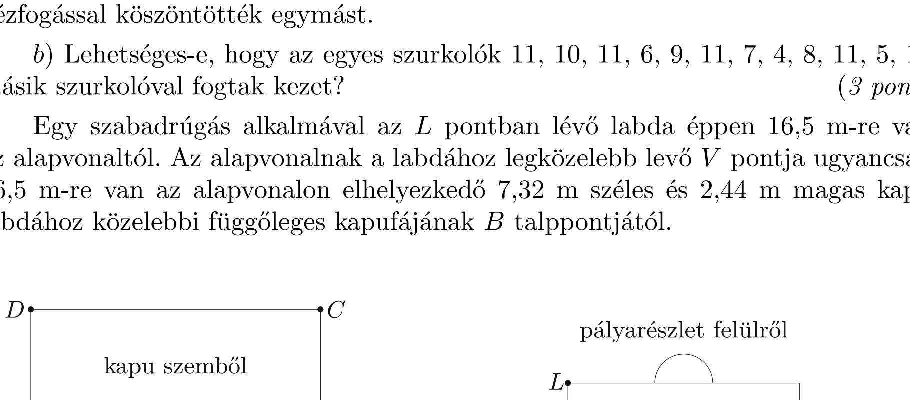
9. Az Oroszországban rendezett labdarúgó világbajnokságra nagy létszámú horvát baráti társaság utazott ki. Az első három horvát mérkőzést a társaság 90-90-90%-a tekintette meg.

a) Legalább illetve legfeljebb a szurkolók hány százaléka láthatta mindhárom mérkőzést? (*4 pont*)

Horvátország az első mérkőzését Nigéria ellen vívta a kalinyingrádi (régi porosz Königsberg) stadionban. Egy sorban 12 horvát szurkoló ült, akik közül néhányan kézfogással köszöntötték egymást.

b) Lehetséges-e, hogy az egyes szurkolók 11, 10, 11, 6, 9, 11, 7, 4, 8, 11, 5, 11 másik szurkolóval fogtak kezet? (*3 pont*)

Egy szabadrúgás alkalmával az L pontban lévő labda éppen 16,5 m-re van az alapvonaltól. Az alapvonalnak a labdához legközelebb levő V pontja ugyancsak 16,5 m-re van az alapvonalon elhelyezkedő 7,32 m széles és 2,44 m magas kapu labdához közelebbi függőleges kapufájának B talppontjától.



c) Mekkora szögben látja a L pontban álló focista a BD szakaszt, ha szemmagassága 174 cm-en van? (*9 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2018/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Adjuk meg azon $P(x;y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:*

a) $(x^2-y^2)(x^2+y^2-4)=0$;

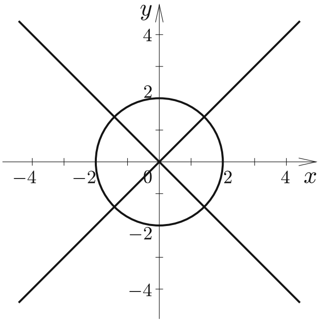
b) $(x^2-y)^2+(x^2+y^2-14y+36)^2=0$. (*11 pont*)

Megoldás. *a*) A bal oldalon álló kifejezést háromtényezős szorzatként is írhatjuk: $(x-y)(x+y)(x^2+y^2-4)=0$. Három eset van.

I. eset: $y=x$. Az ilyen tulajdonságú P pontok a koordinátasík I. és a III. negyedének szögfelezőjét alkotják.

II. eset: $y=-x$. Az ilyen tulajdonságú P pontok a koordinátasík II. és a IV. negyedének szögfelezőjét alkotják.

III. eset: $x^2+y^2=4$. Az ilyen tulajdonságú P pontok az origó középpontú és 2 egység sugarú körvonalat adják.



A feladat megoldását a három ponthalmaz egyesítése adja, amit a *vázlatrajz* szemléltet.

b) Két nemnegatív szám összege csak akkor lehet 0, ha mindkét szám 0. Ezek alapján a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2,\\ x^2+y^2-14y+36&=0.\end{aligned}\right\}$$

A helyettesítést elvégezve x^2-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$x^4-13x^2+36=0,$$

$$(x^2)_1=4,\quad (x^2)_2=9.$$

Négy értéket kapunk x-re: $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-3$, $x_4=3$. Az egyenletrendszer első egyenletébe visszahelyettesítve kapjuk a második koordinátákat: $y_1=4$, $y_2=4$, $y_3=9$, $y_4=9$.

Vagyis a keresett ponthalmazban négy pont van: $P_1(-2;4)$, $P_2(2;4)$, $P_3(-3;9)$, $P_4(3;9)$.

Megjegyzés. Az egyenletrendszer második egyenlete $x^2+(y-7)^2=13$ alakra is hozható. Vagyis az $y=x^2$ egyenlettel adott parabola és az $x^2+y^2-14y+36=0$ egyenlettel adott $K(0;7)$ középpontú, $r=\sqrt{13}$ sugarú kör közös pontjainak koordinátáit határoztuk meg.

2. *A* $\overline{\text{SzÁMADÓ}}$ *és az* $\overline{\text{ADÓSzÁM}}$ *egy-egy olyan hatjegyű, a* $\overline{\text{SzÁM}}$ *és az* $\overline{\text{ADÓ}}$ *pedig egy-egy olyan háromjegyű szám, amelyben az* Sz, Á, M, A, D *és* Ó *betűk különböző pozitív számjegyek.*

a) Mennyi a $\overline{\text{SzÁM}}+\overline{\text{ADÓ}}$ *összeg, ha* $\overline{\text{SzÁMADÓ}}+\overline{\text{ADÓSzÁM}}=678\,678$?

b) Adjuk meg a $\overline{\text{SzÁMADÓ}}$ *számot, ha még azt is tudjuk, hogy* $\text{Sz}>\text{A}$, *valamint* $\overline{\text{SzÁM}}\cdot\overline{\text{ADÓ}}=90\,585$.

c) Mennyi az $\overline{\text{ADÓSzÁM}}$, *ha* $7\cdot\overline{\text{ADÓSzÁM}}=6\cdot\overline{\text{SzÁMADÓ}}$? (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen: $\overline{\text{SzÁM}}=x$, $\overline{\text{ADÓ}}=y$. Ekkor $\overline{\text{SzÁMADÓ}}=1000x+y$, $\overline{\text{ADÓSzÁM}}=1000y+x$. Ezek alapján:

$$1000x+y+1000y+x=678\,678,$$
$$1001(x+y)=678\,678,$$
$$x+y=678.$$

Vagyis: $\overline{\text{SzÁM}}+\overline{\text{ADÓ}}=678$.

b) Mivel $\overline{\text{SzÁM}}\cdot\overline{\text{ADÓ}}=90\,585$, ezért a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} y&=678-x,\\ xy&=90\,585.\end{aligned}\right\}$$

A behelyettesítés után másodfokú egyenletet kapunk: $x^2-678x+90\,558=0$. Megoldóképlettel: $x_1=495$, $x_2=183$. Mivel $\text{Sz}>\text{A}$, ezért $\overline{\text{SzÁM}}=x=495$.

A keresett hatjegyű szám: $\overline{\text{SzÁMADÓ}}=495\,183$.

c) A már bevezetett jelölésünkkel:

$$7(1000y+x)=6(1000x+y),$$
$$6994y=5993x,$$
$$2\cdot13\cdot269\cdot y=13\cdot461\cdot x,$$
$$2\cdot269\cdot y=461\cdot x.$$

Mivel x és y is háromjegyű szám, ezért csakis $\overline{\text{SzÁM}}=x=2\cdot269=538$, $\overline{\text{ADÓ}}=$ $=y=461$ lehet. Vagyis $\overline{\text{ADÓSzÁM}}=461\,538$.

3. *A Szép Utazások iroda tájékoztatójában a repülőgépen szállítható csomagokról ez olvasható:*

„Az iroda által bérelt járatokon 15 kg/fő *feladott poggyász és* 1 db 8 kg/fő *kézipoggyász szállítása díjtalan, a többletsúlyért fizetni kell. Mindegyik poggyásznak téglatest alakúnak kell lennie. A feladott poggyász egyik élhossza sem lehet több, mint* 150 cm, *és a három különböző irányú él hosszának összege nem haladhatja meg a* 220 cm*-t. A kézipoggyász maximális hossza* 56 cm, *maximális szélessége* 45 cm, *maximális mélysége* 25 cm *lehet, azonban a három méret összesen nem haladhatja meg a* 115 cm*-t.”*

a) Bea kézipoggyásznak való kisbőröndöt vásárol az utazáshoz. A boltban a megfelelő bőröndök egyik élhossza 25 cm. *Szeretné, ha az élhosszak összege a megengedett maximális, ugyanakkor a bőrönd felszíne* 8500 cm^2 *lenne. Milyen méretű bőrönd felelne meg ezeknek a feltételeknek?*

b) László az utazáshoz bőröndöt szeretne vásárolni, amibe a feladható poggyászként engedélyezett 15 kg*-ot bepakolhatja. A neki tetsző bőröndök egyik élének hossza* 40 cm *volt. Milyen méretű bőröndöt válasszon ezek közül, ha szeretné, hogy a térfogata maximális legyen? Mekkora lesz ekkor a bőrönd térfogata?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a három különböző irányú él hosszának összege 115 cm, és az egyik él 25 cm, ezért a másik két él hossza legyen x cm és $90-x$ cm. Ezek alapján a felszín:

$$2\cdot\big[25x+25(90-x)+x(90-x)\big]=8500,$$

$$25x+2250-25x+90x-x^2=4250,$$

$$x^2-90x+2000=0.$$

Megoldóképlettel: $x_1=50$, $x_2=40$. Ekkor a $90-x$ élhosszra a 40, illetve az 50 adódik.

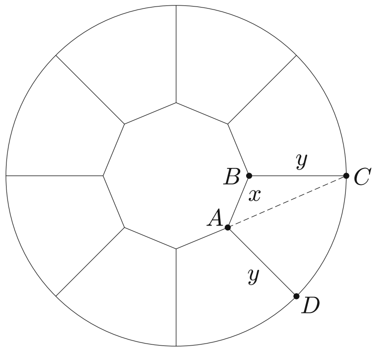
Vagyis a kisbőrönd három adata: 25 cm, 50 cm, 40 cm, ami a kiírás további feltételeinek is megfelel.

b) Mivel maximális térfogatot szeretnénk elérni, ezért az élek összegére vonatkozó maximumot használjuk. Az élek hossza: 40 cm, x cm és $180-x$ cm. Ekkor a térfogatot x függvényében meg tudjuk adni: $V(x)=40\cdot x\cdot(180-x)$.

Mivel ennek a másodfokú függvénynek a főegyütthatója negatív, ezért van maximuma. Azt is tudjuk, hogy a zérushelyei a 0 és a 180, ezért a maximum helye: $x=90$. Vagyis a maximális térfogatú bőrönd adatai: 40 cm, 90 cm, 90 cm. Ezek az adatok a tájékoztatóban szereplő összes kérésnek megfelelnek.

A megadott feltételek mellett a maximális térfogat:

$$V(90)=40\cdot 90\cdot(180-90)=324\,000\ (\mathrm{cm}^3).$$



4. *A Fővárosi Nagycirkusz* 13 méter *átmérőjű porondjának vázlatát mutatja az* ábra. *A vízi cirkuszi előadásban a porond kilenc, azonos területű része függőlegesen, le-föl mozgatható.*

a) Mekkora a porond közepén látható szabályos nyolcszög területe?

b) A nyolc egybevágó (trapézszerű) síkidomot a könnyebb mozgatás miatt körben egy nagyon speciális anyaggal borították. Ehhez előzetesen meg kellett határozni ezeknek a síkidomoknak a kerületét. Mekkora a kerülete az ABCD trapézszerű síkidomnak?

c) A nyolc egybevágó síkidom függőleges mozgatásához megépített szerkezet miatt minden ilyen síkidom alatt szükség volt egy átlós merevítőre. Adjunk képletet az AC merevítő hosszára az ábra x és y hosszúságú szakaszának ismeretében. (A képletben előforduló szögfüggvényértékek négy tizedes jegy pontossággal szerepeljenek.) *(14 pont)*

Megoldás. *a*) A kör alakú porond sugara $R=6{,}5$ m, ezért a területe: $T = 6{,}5^2\cdot\pi = 42{,}25\cdot\pi$ (m^2).

Mind a kilenc síkidom – a nyolc egybevágó (trapézszerű) és a középen látható szabályos nyolcszög – területe egyenlő. Vagyis a keresett síkidom területe:

$$t=\frac{T}{9}=\frac{42{,}25\cdot\pi}{9}\approx 14{,}748\ (\mathrm{m}^2).$$

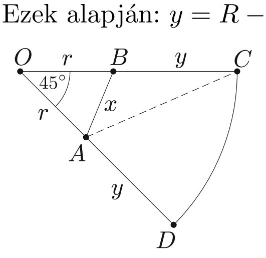
b) Az $ABCD$ trapézszerű síkidom kerületének CD íve a $R=6{,}5$ m sugarú körvonal nyolcadrészével megegyező hosszúságú: $\frac{2\cdot 6{,}5\cdot\pi}{8}\approx 5{,}105$ (m).

Az $AD=BC=y$ szakasz hosszát megkapjuk, ha a porond sugarából elvesszük a 14,748 m^2 területű szabályos nyolcszög köré írt körének r sugarát.

A nyolcszög területét nyolc egybevágó egyenlőszárú háromszög területének összegeként is megkapjuk. Ezeknek a háromszögeknek r hosszúságú a száruk, és 45° a szárszögük. Vagyis a nyolcszög területe:

$$t=8\cdot\frac{r^2\cdot\sin 45^\circ}{2}=14{,}748,\quad \text{amiből}\quad r\approx 2{,}283\ \text{m}.$$

Ezek alapján: $y=R-r=6{,}5-2{,}283=4{,}217$ (m).



Az AB szakasz hossza a 14,748 m^2 területű szabályos nyolcszög oldalának hosszával egyenlő. Ezt az OAB egyenlőszárú háromszögből kaphatjuk például koszinusztétellel:

$$x=\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cdot\cos 45^\circ}=$$

$$=\sqrt{2\cdot 2{,}283^2-2\cdot 2{,}283^2\cdot\cos 45^\circ}\approx 1{,}747.$$

A kapott eredmények alapján a keresett kerület:

$$K = 5{,}105 + 2 \cdot 4{,}217 + 1{,}747 = 15{,}286 \text{ (m)}.$$

c) A szabályos nyolcszög egy belső szöge: $\alpha = \frac{(8-2)\cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$. A trapézszerű síkidom B-nél lévő β szögére teljesül, hogy $\alpha + 2\beta = 360^\circ$, azaz $\beta = 112{,}5^\circ$. Az ABC háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt: $AC^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 112{,}5^\circ$. Tehát a merevítő hosszát a következő képlettel számolhatjuk:

$$AC = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 112{,}5^\circ} \approx \sqrt{x^2 + y^2 + 0{,}7654 \cdot xy}\,.$$

II. rész

5. *Rebeka új szemüveget vásárol, de nem szeretné, hogy a lencsékért* 25 000 Ft*-nál többet fizessen. A szaküzletben kiderül, hogy ha hagyományos lencsét vásárolna, akkor* 4280 Ft*-ot fizetne a két lencséért. Rebeka tudja, hogy a minőséget a különböző típusú bevonatok javíthatják, ezért tükröződésmentes és karcolás mentes bevonatot kér a lencsékre. A bevonatok mindegyikének* 99 Ft/cm^2 *az ára. (A lencsék felületét síknak vehetjük.) Azt is eldöntötte, hogy a hagyományosnál vékonyabb lencsét szeretne választani. A készlet szerint ez lehet* 10, 20, 30, 40, *illetve* 50%*-kal vékonyabb. Ezeknek a lencséknek az ára a hagyományoshoz képest rendre* 40, 80, 160, 320, 640%*-kal drágább.*

Egy lencse határvonalát az $f(x) = 2 - \frac{2}{25}x^2$ *és a* $g(x) = \frac{x^2}{5} - 5$ *hozzárendeléssel megadott függvények grafikonja által meghatározott síkidom határvonala adja. A koordinátarendszer egysége* 5 mm*-rel egyenlő. Mekkora területű részt foglal el egy lencse az asztalon? A hagyományos lencséhez képest hány százalékkal választhat vékonyabb lencsét Rebeka?* (*16 pont*)

Megoldás. Meghatározzuk, hogy a megadott függvények hol metszik egymást:

$$2 - \frac{2}{25}x^2 = \frac{x^2}{5} - 5,$$

$x_1 = -5$, $x_5 = 5$. A kérdéses terület nagyságát határozott integrállal számoljuk ki, az intervallum a $[-5; 5]$. A két „görbealatti terület” különbsége adja a síkidom területét:

$$T = \int_{-5}^{5} \left(2 - \frac{2}{25}x^2 - \frac{x^2}{5} + 5\right) \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{5} \left(7 - \frac{7}{25}x^2\right) \mathrm{d}x = 14 \cdot \int_{0}^{5} \left(1 - \frac{1}{25}x^2\right) \mathrm{d}x.$$

Alkalmazzuk a Newton–Leibniz tételt:

$$T = 14 \cdot \left[x - \frac{1}{25} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^5 = 14 \cdot \left(5 - \frac{1}{25} \cdot \frac{125}{3}\right) = \frac{140}{3} \text{ (területegység)}.$$

Mivel a koordinátarendszer egysége 5 mm-rel egyenlő, ezért egy lencse $\frac{35}{3}$ cm^2-es részt foglal el az asztalon.

Két lencsére kétféle réteget vásárol Rebeka, amelyeknek 99 Ft/cm^2 az ára. Vagyis ezekért összesen $2\cdot 2\cdot 99\cdot \frac{35}{3}=4620$ Ft-ot fog fizetni. A maradék 20 380 Ft-ból kell döntenie, hogy milyen vékony lencsét vásárolhat.

A készlet legvékonyabb tagjától visszafelé számoljunk. Az 50%-os lencsék ára $4280\cdot 7{,}4=31\,672$ Ft lenne. Ilyet nem vehet. A 40%-os lencsék ára $4280\cdot 4{,}2=$ $=17\,976$ Ft lenne. Ezt már választhatja Rebeka.

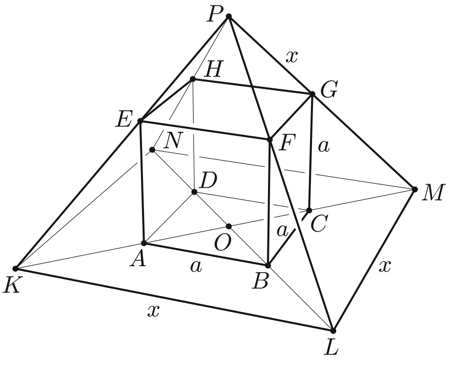
6. *A Rubik-kocka feltalálásának évfordulójára díszdobozos kiadást terveznek. Az egyik változat szerint legyen a doboz egy olyan négyoldalú szabályos gúla, amelynek alapéle ugyanolyan hosszú, mint az oldaléle. Az elképzelés szerint a kocka egyik lapja illeszkedik a gúla alaplapjára, az ezzel párhuzamos lap csúcsai pedig a gúla oldaléleire.*

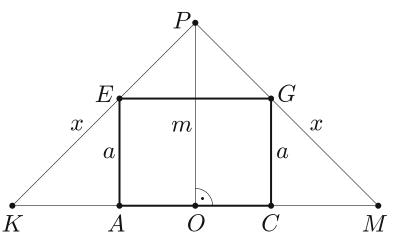
a) Mekkora legyen a doboz éleinek hossza, ha a Rubik-kocka élhosszúsága: $a=5{,}7$ cm?

b) A sok-sok terv közül azonnal elvetették azokat, amelyeknél a játék a doboz 35%-át sem tölti ki. A fenti terv megfelelő-e ezen feltétel ismeretében? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Használjuk a *vázlatrajzok* jelöléseit. Vettük a gúla P csúcsára és az alaplap két szemközti csúcsára, a K-ra és az M-re illeszkedő síkmetszetét. Ez egy egyenlőszárú háromszög, amelynek szára x cm, az alapja egy x oldalhosszúságú négyzet átlójának hosszával egyenlő, azaz $x\sqrt{2}$ cm hosszú. Ennek a háromszögnek az alaphoz tartozó magassága a KOP derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel:

$$OP=m=\sqrt{x^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$





Mivel $OP=KO=MO\left(=\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$, ezért KOP (és MOP is) egyenlőszárú derékszögű háromszög. $KA=KO-AO=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-a)$, mivel AO egy a oldalú négyzet átlójának fele.

A KOP derékszögű háromszög hasonló a KAE derékszögű háromszöghöz, ugyanis a PKO szög közös hegyesszög. Ezek alapján KAE is egyenlőszárú derékszögű háromszög. Vagyis $KA=AE$, azaz $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-a)=a$.

Fejezzük ki az x-et, és helyettesítsük be az a adott értékét: $x = a\big(1+\sqrt{2}\big) \approx$ $\approx 13{,}8$ (cm).

A doboz éleinek hossza tizedcentiméter pontossággal: 13,8 cm.

b) A gúla alaplapjának élhossza már ismert: $x = a\big(1+\sqrt{2}\big) \approx 13{,}8$ (cm). Ezek alapján a gúla magassága: $m = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 13{,}8 \approx 9{,}8$ (cm). A díszdoboz térfogata:

$$V_1 = \frac{x^2 \cdot m}{3} = \frac{13{,}8^2 \cdot 9{,}8}{3} \approx 622{,}1 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A kocka térfogata: $V_2 = a^3 = 5{,}7^3 \approx 185{,}2$ (cm^3).

Százalékban kifejezve: $\frac{V_2}{V_1} \cdot 100$, azaz kerekítve 29,8%-át foglalja el a Rubik kocka a doboz térfogatának. Vagyis ez a terv nem felel meg az elvárásoknak.

7. *a*) *A tízes számrendszerben felírt egyjegyű a, kétjegyű $\overline{ab}$ és háromjegyű $\overline{abb}$ szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első, második és tizenkettedik tagja. (Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.) Hány darab megfelelő kétjegyű szám van? Mennyi a legnagyobb megfelelő kétjegyű szám esetén a számtani sorozat első 20 tagjának összege?*

b) *A pozitív számokból álló (a_n) mértani sorozat kilenc egymást követő tagjából képezzünk három számot úgy, hogy összeadjuk az első hármat, aztán a következő hármat, és végül az utolsó hármat. Mutassuk meg, hogy az így kapott három szám tízes alapú logaritmusa egy számtani sorozat három egymást követő tagja lesz.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a számtani sorozat első tagja a, differenciája d. Vagyis:

$$\begin{aligned} a_1 &= a, \\ a_2 &= \overline{ab} = 10a + b = a + d, \\ a_{12} &= \overline{abb} = 100a + 11b = a + 11d. \end{aligned}$$

Az a_2 alapján $11d = 11(9a+b) = 99a + 11b$, a_{12} alapján $11d = 99a + 11b$. Tehát tetszőleges a és b esetén megfelelő az a, $\overline{ab}$, $\overline{abb}$ számhármas.

Az a tetszőleges pozitív számjegy (9 lehetőség), a b pedig tetszőleges számjegy lehet, de nem egyenlő a-val (9 lehetőség). Így $\overline{ab}$ 81-féle szám lehet. Ezek közül a legnagyobb a 98. Ebben az esetben a sorozat első eleme 9, a differenciája 89.

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \cdot 9 + 19 \cdot 89) = 17\,090.$$

b) Legyen a mértani sorozat kilenc egymást követő tagja: a; aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6, aq^7, aq^8, ahol $a > 0$, $q > 0$. Megadjuk a feladat szövege szerinti három számot a-val és q-val:

$$\begin{aligned} &\lg(a + aq + aq^2); \\ &\lg(aq^3 + aq^4 + aq^5) = \lg(a + aq + aq^2) + 3\lg q; \\ &\lg(aq^6 + aq^7 + aq^8) = \lg(a + aq + aq^2) + 6\lg q. \end{aligned}$$

Ez egy $3\lg q$ differenciájú számtani sorozat három egymást követő tagja.

8. *Az $ABCDEFGH$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az $ABCD$ alaplapra az AE, BF, CG és DH élek merőlegesek. Tudjuk, hogy a HAD szög* $30°$*-os, a FAB szög pedig* $60°$*-os.*

a) Mekkora az AFH háromszög területe, ha a téglatest térfogata $3375\ \mathrm{cm}^3$*?*

b) Mekkora szögben hajlik a téglatest AG testátlója az $ABCD$ laphoz?

c) Dávid a téglatest ábráját a 8 csúccsal, a 12 élével és az AH, valamint AF éllel egy gráfnak tekinti. Barbara pedig a hiányzó élek berajzolásával készített egy teljes gráfot. Azt állítja, hogy rajzolás közben minden csúcsot érintett, viszont egy élt csak egyszer rajzolt meg, és közben a ceruzáját nem kellett felemelnie a papírról. Miért tartjuk ezt hihetőnek? Melyik csúcsból kezdhette a rajzolást, és melyik csúcsba érkezhetett? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen $AB=a$. Mivel az FAB derékszögű háromszögben A-nál $60°$-os szög van, ezért $AF=2a$, és Pitagorasz-tétellel $BF=a\sqrt{3}$. A téglalapban $BF=DH$, azaz $DH=a\sqrt{3}$. Mivel a HAD derékszögű háromszögben A-nál $30°$-os szög van, ezért $AH=2a\sqrt{3}$, és Pitagorasz-tétellel $AD=3a$. Most már a-val kifejeztük a téglatest mindhároméle oldalának hosszát. Ezek segítségével a téglatest $EFGH$ lapjának FH lapátlóhossza is megadható:

$$FH=\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a\,.$$

Koszinusz-tétellel meghatározható az AFH háromszög A-nál lévő φ szöge:

$$\begin{aligned}
FH^2&=AF^2+AH^2-2\cdot AF\cdot AH\cdot\cos\varphi,\\
\left(\sqrt{10}a\right)^2&=(2a)^2+\left(2a\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 2a\cdot 2a\sqrt{3}\cdot\cos\varphi,\\
10&=4+12-2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos\varphi,\\
\cos\varphi&=\frac{3}{4\sqrt{3}},\\
\varphi&\approx 64{,}34°.
\end{aligned}$$

Felírhatjuk a téglatest térfogatát: $V=a\cdot\sqrt{3}a\cdot 3a=3\sqrt{3}\cdot a^3=3375$, ahonnan $a\approx 8{,}66$ cm. Használhatjuk az AFH háromszögre a szinuszos területképletet:

$$T_{AFH\triangle}=\frac{AF\cdot AH\cdot\sin 64{,}34°}{2}=\frac{2a\cdot 2a\sqrt{3}\cdot\sin 64{,}34°}{2}\approx 234{,}2\ (\mathrm{cm}^2).$$

b) A kérdéses λ szög a CAG derékszögű háromszög A-nál lévő szögével egyenlő: $\operatorname{tg}\lambda=\frac{\sqrt{3}\,a}{\sqrt{10}\,a}=\sqrt{0{,}3}$, $\lambda\approx 28{,}7°$.

c) A megadott A, B, C, D, E, F, G és H csúcspontokkal adott gráfban a fokszámok rendre a következők: 5, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 4. Mivel a 8 csúcsú teljes gráf minden pontjának 7 a fokszáma, ezért a Barbara által rajzolt A, B, C, D, E, F, G és H csúcspontokkal adott gráfban a fokszámok rendre a következők: 2, 4, 4, 4, 4, 3, 4, 3. Mivel pontosan két páratlan fokszámú csúcs van, ezért hihetőnek tartjuk Barbara kijelentését. Az F és a H csúcsok fokszáma páratlan, ezért az egyik a kiindulópont, a másik a végpont lehet.

Ilyen módon egy lehetséges útvonal megadható, például: $H-B-G-D-B-E-C-A-G-E-D-F-C-H-F$.

9. *Legyen n pozitív egész szám. Adottak az alábbi sorozatok:*

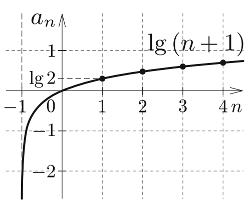
$$\{a_n\}=\big\{\lg(n+1)\big\};$$

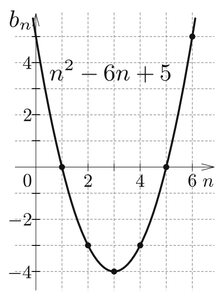
$$\{b_n\}=\left\{\frac{n^3-5n^2-n+5}{n+1}\right\};$$

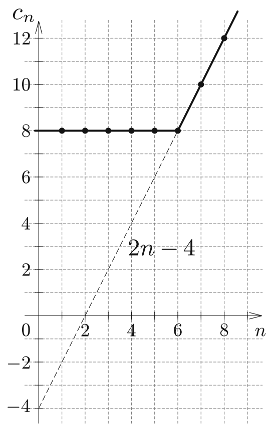
$$\{c_n\}=\big\{|n+2|+|n-6|\big\}.$$

Válaszoljunk (indoklással) mindhárom esetben, hogy a sorozat alulról, felülről korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem. Ha van, adjunk meg egy alsó, illetve felső korlátot. (*16 pont*)

Megoldás. Az lg függvény szigorú monoton növekedése miatt az $\{a_n\}$ sorozat is szigorú monoton növekedő. Ebből az is következik, hogy a sorozat első tagja, azaz az $\lg 2$ alsó korlát (jelen esetben a legnagyobb). Az lg függvény tulajdonságainak ismeretében tudjuk, hogy felső korlát nincs.







A $\{b_n\}$ sorozat általános tagjának formuláját egyszerűsíthetjük:

$$b_n=\frac{n^3-5n^2-n+5}{n+1}=\frac{n^2(n-5)-(n-5)}{n+1}=\frac{(n-5)(n-1)(n+1)}{n+1}=$$
$$=(n-5)(n-1)=n^2-6n+5.$$

A másodfokú kifejezés főegyütthatója 1, zérushelyei az 1 és az 5, minimum helye a 3. A sorozat szempontjából ez azt jelenti, hogy először csökkenő, aztán növekedő. Vagyis nem monoton a sorozat.

A másodfokú függvény tulajdonsága alapján mondható, hogy a sorozat egyik alsó korlátja (jelen esetben a legnagyobb alsó korlátja) a b_3, azaz -4. A másodfokú függvény tulajdonságaiból az is következik, hogy ennek a sorozatnak nincs felső korlátja.

Ha $n=1,2,3,4,5$, akkor a $\{c_n\}$ hozzárendelési szabálya: $c_n=|n+2|+|n-6|=$ $=n+2-(n-6)=8$.

Ha $n>5$, akkor a $\{c_n\}$ hozzárendelési szabálya: $c_n=|n+2|+|n-6|=$ $=n+2+n-6=2n-4$. Mivel a lineáris függvény meredeksége most pozitív, ezért ezekre az n-ekre a sorozat szigorúan monoton növekedő.

Összességében monoton növekedő, hiszen a sorozat első öt tagja 8, a továbbiak pedig ennél nem kisebbek.

Az elmondottakból az is következik, hogy a sorozat alulról korlátos. Egy lehetséges alsó korlát 8 (ami a legnagyobb alsó korlát). A lineáris függvény ismeretében azt is tudjuk, hogy felső korlát nincs.

Számadó László
Budapest

Matematika feladat megoldása

B. 4912. *Bizonyítsuk be, hogy az $5x^2-4y^2=2017$ egyenletnek nincs egész megoldása.*

(*3 pont*)

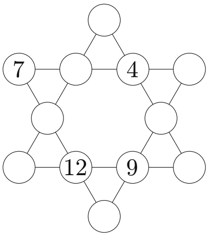
Megoldás. Alakítsuk át az 5-tel oszthatóság szempontjai alapján azonosan az $5x^2-4y^2=2017$ diofantikus egyenletet: $5(x^2-y^2)+y^2=5\cdot 403+2$. A bal oldalon az 5-tel való osztás maradékát az y^2 maradéka adja, míg a jobb oldal ötös maradéka 2. Vizsgáljuk meg a négyzetszámok lehetséges ötös maradékait. Egy egész szám négyzetének ötös maradékát az ötös maradék négyzete határozza meg, mivel $(5a+b)^2=25a^2+10ab+b^2$ alapján azonnal látható, hogy az első két tag osztható 5-tel. Elegendő tehát az ötös maradékok négyzeteinek maradékait áttekintenünk. Ezek rendre a 0, 1, 2, 3, 4 számok négyzetének ötös maradékai, azaz 0, 1, 4, 4, 1. A bal oldali kifejezés ötös maradéka 0, 1 vagy 4, míg a jobb oldali ötös maradék 2. A két oldal semmilyen egész számokra nem lehet egyenlő egymással, az egyenletnek nincs egész megoldása.

Richlik Róbert (Budapest XIV. Kerületi Szent István Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 202 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 187, 2 pontot 6 tanuló. 0 pontos 7, nem versenyszerű 2 tanuló dolgozata.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (599–603.)

K. 599. Helyezzük el a kis körökbe az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 számokat úgy, hogy bármelyik négy, egy egyenesen fekvő körben lévő számok összege ugyanannyi legyen, sőt a csillag csúcsaiba írt számok összege is ezt a számot adja. Néhány számot előre beírtunk a körökbe. Adjuk meg az összes lehetséges kitöltést.



K. 600. Egy háromjegyű szám valamelyik számjegyét elhagyva egy kétjegyű számot kaptunk, ennek a számnak valamelyik számjegyét elhagyva pedig egy egyjegyű számot. Melyik lehet ez a háromjegyű szám, ha a háromjegyű, a kétjegyű és az egyjegyű számok összege 1001?

K. 601. Egy hegyesszögű ABC háromszögbe olyan 4 cm oldalhosszúságú $PQRS$ négyzetet lehet írni, melynek P és Q csúcsa az AB oldalon, R csúcsa a BC oldalon, S csúcsa pedig az AC oldalon van. Mekkora a háromszög területe, ha az AB oldal hossza 8 cm?

K. 602. András és Pali játszanak. A nyertes mindig x, a vesztes mindig y pontot kap ($x > y$ egész számok), döntetlen nincs. Néhány kör után Andrásnak 30, Palinak 25 pontja van, mert Pali csak kétszer nyert. Mennyit kap a nyertes?

K. 603. Gondoltam egy kétjegyű számra. A számjegyeinek összegét jelölje S, szorzatát pedig P. Milyen számra gondolhattam, ha $P+S$ megegyezik ezzel a számmal?

Beküldési határidő: 2018. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Közlemény

A 2018/6. számunkban megjelent végeredményt utólag az alábbiakban módosítottuk:

Mivel egy 2–3. díjas versenyzőt szabálytalan versenyzés miatt kizártunk a pontversenyből, a **B.** jelű matematika feladatok 1–8. osztályosok versenyében *Baski Bence* 2. díjat nyert, az utána következő versenyzők pedig 1-gyel jobb helyezést értek el, mint előtte.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1504–1510.)

Feladatok 10. évfolyamig

1	3	4
6	8	9
10	12	20

C. 1504. Egy 3×3-as táblázat celláit kitöltjük az *ábra* szerint. Egy lépésben megcserélhetünk egymás között n darab olyan számot, melyek legnagyobb közös osztója n, úgy, hogy egyikük sem marad a helyén. Elérhető-e ilyen lépésekkel, hogy az eredeti táblázathoz képest az egyik, illetve a másik átlóra való tükrözés szerinti elrendezésbe kerüljenek a számok?

C. 1505. Mekkora hányadát fedik le a játéktér területének egy sakktáblán a sötét mezők körülírt körei?

Feladatok mindenkinek

C. 1506. Oldjuk meg a $p^q + 1 = q^p$ egyenletet, ahol p, q pozitív prímszámokat jelöl.

C. 1507. Egy tompaszögű, egyenlő szárú háromszög szárainak felezőmerőlegesei az alapot három egyenlő részre osztják. Mekkorák a háromszög szögei?

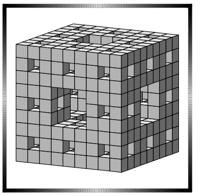
C. 1508. Határozzuk meg xy értékét, ha $x + y = 1$ és $x^3 + y^3 = \frac{1}{2}$.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1509. Filteres teát forgalmazó cég a dobozok 10%-ában egy-egy ajándékutalványt rejtett el. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 10 doboz vásárlása esetén 1-nél több utalványra teszünk szert?

C. 1510. Egy egyenes csonkakúp alapkörének 8 cm, fedőkörének 5 cm a sugara. Alkotójának hossza 12 cm. Ha a csonkakúpot elfektetve gurítjuk, palástjának pontjai egy körgyűrűt fednek be. Határozzuk meg a körgyűrű külső és belső körének sugarát, valamint azt, hogy hányszor fordul körbe a csonkakúp, mire visszaér a kiinduló helyzetbe.

Beküldési határidő: 2018. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4982–4989.)

B. 4982. Az $ABCD$ konvex deltoid AC és BD átlói az E pontban metszik egymást úgy, hogy $AE < CE$. Az AC átló felezőpontja F. Az ABE és CDE körök második, E-től különböző metszéspontja M. Mutassuk meg, hogy $EMF\sphericalangle = 90°$.

(*3 pont*)

B. 4983. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2+2x-3-\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}}=\frac{2}{x^2-2x-3}.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Laczkó László* és *Szoldatics József* (Budapest)

B. 4984. Mutassuk meg, hogy minden pozitív egész x számhoz található olyan pozitív egész y, amelyre x^3+y^3+1 osztható az $x+y+1$ számmal. Van-e olyan pozitív egész x, amelyhez végtelen sok ilyen tulajdonságú y létezik?

(*4 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 4985. Adott négy egyenes úgy, hogy közülük bármelyik három meghatároz egy háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ennek a négy háromszögnek a magasságpontja egy egyenesre illeszkedik.

(*5 pont*)

B. 4986. Jelölje KP azt a 64 térbeli pontot, amelyeknek mindhárom koordinátája 1, 2, 3 vagy 4. Kata és Péter térbeli amőbát játszanak a KP pontjain. Kata kezdi a játékot, kiválaszt egy tetszés szerinti pontot KP-ből, és azt kékre színezi. A második lépésben Péter választ egy, az előzőtől különböző pontot, és azt pirosra színezi. Ezután felváltva színeznek kékre, illetve pirosra egy korábban még színezetlen KP-beli pontot. Az győz, aki először színez a saját színére négy, egy egyenesre illeszkedő pontot. Mutassuk meg, hogy Katának mindegy, hogy az első lépésben az $(1,1,2)$ vagy a $(2,2,1)$ pontot színezi kékre.

(*5 pont*) Javasolta: *Benkő Dávid* (South Alabama)

B. 4987. Az ABC hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög körülírt körének középpontja O, magasságpontja pedig M, az A csúcsból induló magasság talppontja D, az AB oldal felezőpontja F. Az F pontból kiinduló és az M ponton átmenő félegyenes az ABC háromszög körülírt körét a G-ben metszi.

a) Bizonyítsuk be, hogy az A, F, D, és G pontok egy körön vannak.

b) Jelöljük a fenti kör középpontját K-val, a CM szakasz felezőpontját E-vel. Igazoljuk, hogy $EK=OK$.

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 4988. Egy $(m+2)\times(n+2)$-es táblázatnak levágjuk a négy darab 1×1 méretű „sarkát”. Az így kapott csonka táblázat első és utolsó sorának, illetve első és utolsó oszlopának minden mezőjére egy-egy (tetszőleges) valós számot írunk.

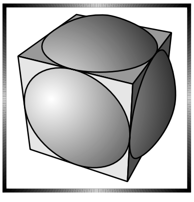
Igazoljuk, hogy a táblázat maradék $m\times n$-es „belseje” egyértelműen kitölthető valós számokkal úgy, hogy minden ide eső szám megegyezzen a négy szomszédjának átlagával.

(*6 pont*) (*Iráni feladat*)

B. 4989. Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalainak felezőpontjai rendre D, E és F. Jelölje a háromszög súlypontját S. Tegyük fel, hogy az AFS, BDS és CES háromszögek kerülete egyenlő. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög szabályos.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2018. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (734–736.)

Október havi számunkban az A jelű feladatok téves sorszámozással kerültek kitűzésre. A sorszámokat helyreállítjuk, a téves sorszámmal beküldött októberi feladatokat elfogadjuk. A hibáért elnézést kérünk.

A. 734. Tetszőleges, 3-mal nem osztható pozitív egész m-re tekintsük az $\{1,2,\ldots,m-1\}$ halmazon az $x\mapsto 3x \pmod m$ permutációt. Ez a permutáció néhány diszjunkt ciklusra bomlik; például $m=10$ esetén a ciklusok $(1\mapsto 3\mapsto 9\mapsto 7\mapsto 1)$, $(2\mapsto 6\mapsto 8\mapsto 4\mapsto 2)$ és $(5\mapsto 5)$. Milyen m számok esetén lesz a ciklusok száma páratlan?

A. 735. Tetszőleges $f:[0,1]\to[0,1]$ függvényre jelölje $P_n(f)$ az

$$\underbrace{f\big(\ldots f}_{n}(x)\ldots\big)$$

függvény fixpontjainak számát, vagyis az olyan $x\in[0,1]$ pontok számát, amelyekre $\underbrace{f\big(\ldots f}_{n}(x)\ldots\big)=x$. Mutassunk példát olyan szakaszonként lineáris, folytonos, szürjektív $f:[0,1]\to[0,1]$ függvényre, amelyre alkalmas $2<A<3$ számmal a $\frac{P_n(f)}{A^n}$ sorozat konvergál.

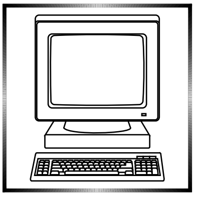
A 2018. évi *Schweitzer Miklós emlékverseny 8. feladata* nyomán

A. 736. Legyen P egy pont az ABC háromszög síkjában. Jelölje az A, B, C pontok P-re vonatkozó tükörképét rendre A', B', illetve C'. Legyen A'', B'' és C'' rendre az A', B', C' tükörképe a BC, CA, illetve AB egyenesre. Legyen az $A''B''$ és az AC egyenes metszéspontja A_b, és legyen az $A''C''$ és az AB egyenes metszéspontja A_c. Jelölje ω_A az A, A_b, A_c pontokon átmenő kört. Az ω_B és ω_C köröket hasonlóan definiáljuk. Bizonyítsuk be, hogy ω_A, ω_B, és ω_C koaxiálisak, vagyis közös hatványvonaluk van.

Javasolta: *Navneel Singhal,* Delhi és *K. V. Sudharshan,* Csennai, India

Beküldési határidő: 2018. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok



I. 466. A mérgezett csoki egy nagyon egyszerűen leírható kétszemélyes játék. A játékosok felváltva „törnek” a táblából és az veszít, akinek a végén csak a mérgezett kocka marad. Ismert, hogy a kezdőnek van nyerő stratégiája, de az csak az $N \times N$ és a $2 \times N$ méretű tábla esetén fogalmazható meg egyszerűen, más méretű táblát használva a játék valós izgalmat hordoz.

A játékról bővebben például a

`http://web.cs.elte.hu/szakdolg/ghorvath.pdf`

címen elérhető diplomamunkában olvashatunk.

Ebben a feladatban a következő formában játszunk:

- a csokoládétábla N sorból és M oszlopból áll;
- az egyes csokoládékockákat két egész számmal azonosítjuk;
- a mérgezett csokoládékocka az (M, N) számpárral adható meg;
- a táblából minden lépésben legalább egy kockát törünk le. A törést minden esetben a teljes csokoládétábla $(1, 1)$ sarkával „szemközti” (i, j) számpárral adjuk meg. Ekkor minden, még meglévő (x, y) csokoládékockát elveszünk, amelyre $x \leqslant i$ és $y \leqslant j$.

A játékosok dokumentálni szerették volna a játékot, ezért a soron következő lépést egy kártyalapra írták, majd a másik játékos előző lépését tartalmazó lapra helyezték. Ez a módszer sajnos nem volt jó, mert egy ajtónyitáskor keletkező huzat a kártyákat lesodorta az asztalról és azok összekeveredtek. Készítsünk programot, amely a kártyákat egy lehetséges törési sorrendbe állítja és megadja, hogy a meghatározott sorrend esetén az egyes versenyzőkhöz hány csokoládékocka került.

A program standard bemenetének első sorában a csokoládétábla mérete, az oszlopok és a sorok száma, azaz M és N, valamint a kártyalapok K száma található. A következő K sorban az egyes kártyákon szereplő oszlop, sor értékpárok szerepelnek. A kimenet első sorában K egész szám szerepel: a töréseket leíró kártyák egy lehetséges sorrendje. A második sorban ezen sorrend esetén az első, illetve a második játékos által letört kockák száma. Az elválasztó karakter minden esetben a szóköz. A bemenetben egyetlen szám értéke sem nagyobb 1000-nél.

Példa bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Példa kimenet**
`10 12 3` `7 10 / 5 4 / 3 8`	`2 3 1` `58 12`

Beküldendő egy `i466.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a működéséhez szükséges egyéb fájlok, továbbá a hozzá kapcsolódó dokumentáció. Utóbbi világítson rá a problémamegoldás lényeges elemeire, valamint tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 467 (É). Idézet a Wikipédiáról: „A Steam egy tartalomtovábbító és -kezelő rendszer, amelyet a Valve Software fejlesztett ki. Funkciói különféle számítógépes szoftverek (túlnyomórészt játékok) digitális áruházi rendszerben történő értékesítése, többjátékos módok menedzselése, és közösségépítő háló fenntartása … 2015-ben a Steam-en eladott, illetve itt érvényesített termékek értéke meghaladta a három és fél milliárd dollárt, … több mint 125 millió felhasználója van."*

Feladatunk a Steam-en elérhető toplistás játékok adatainak feldolgozása adatbázis-kezelő program segítségével. Forrás: `http://steamcharts.com/top` (utolsó letöltés 2018. 01. 07.).

1. Készítsünk új adatbázist steam néven. A letölthető adatállományokat importáljuk az adatbázisba a fájlnévvel azonos nevű táblákba. Beolvasáskor állítsuk be a megfelelő típusokat és kulcsokat. Az állományok tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású szövegfájlok, az első sorok a mezőneveket tartalmazzák.
2. Amelyik feladat megoldásához szükségünk van rá, alakítsunk ki megfelelő kapcsolatokat a táblák között.

Táblák:

jnev (azon, jneve)

azon	adott játék azonosítója (szám), kulcs;
jneve	az adott játék neve (szöveg).

infok (azon, mdatum, fkiado, cimkek, ara, mertekszama, merteknev, fnyelv, fhang, ffelirat)

azon	az adott játék azonosítója (szám), kulcs;
mdatum	a játék megjelenésének dátuma (dátum);
fkiado	a játék fejlesztője / a játék kiadója (szöveg);

*`https://hu.wikipedia.org/wiki/Steam`.

cimkek	a játékot jelölő címkék (szöveg);
ara	a játék ára euróban megadva, ingyenes játék esetében üres (szám);
mertekszama	minden értékelés száma (szám);
merteknev	minden értékelés nevesítve (szöveg);
fnyelv	a játék felületének nyelve, vesszővel elválasztva több nyelv esetén (szöveg);
fhang	a játék beszélt nyelve, több nyelv esetén vesszővel elválasztva (szöveg);
ffelirat	a játék feliratának nyelve, több nyelv esetén vesszővel elválasztva (szöveg).

stat (azon, jazon, datum, oraszam)

azon	az adott statisztika azonosítója (szám), kulcs;
jazon	a játék azonosítója (szám);
datum	a statisztikában résztvevő dátum (dátum);
oraszam	az adott dátumon a játékkal játszott órák száma (szám).

rend – az adott operációs rendszer alatt javasolt minimum értékek (azon, jazon, oprend, verzio, proc, mem, graf, halozat, tarh)

azon	az adott konfiguráció azonosítója (szám), kulcs;
jazon	az adott játék azonosítója (szám);
oprend	operációs rendszer (szöveg);
verzio	az adott operációs rendszer verziója (szöveg);
proc	processzor (szöveg);
mem	memória nagysága GB-ban megadva (szám);
graf	grafikus megjelenítés, ha nincs megadva üres (szöveg);
halozat	szükséges-e széles sávú internetkapcsolat (logikai);
tarh	szabad tárhely mérete GB-ban megadva (szám).

Készítsük el a következő feladatok megoldását. Az egyes lekérdezéseknél ügyeljünk arra, hogy mindig csak a kért értékek jelenjenek meg és más adatok ne. Megoldásainkat a zárójelben lévő néven mentsük el.

3. Melyik napon játszottak több órát a Steam-en: szenteste, vagy újév napján? Jelenítsük meg a dátumot. (3csucsnap)
4. Az ingyenes játékok közül melyiknek van a legtöbb értékelése? Írassuk ki a játék nevét. (4ingyenertek)
5. Hány esetben nincsen megadva a javasolt grafikus kártya típusa, ha egyébként az adott operációs rendszer verzió támogatott? (5hiany)
6. Mennyibe kerülne megvásárolni azokat a fizetős játékokat, amelyeknek több, mint 150 000 értékelése van és azok nagyon pozitívak? Az eredményt euróban jelenítsük meg, tizedes helyek nélkül. (6ara)
7. Vizsgáljuk meg, hogy hány Multiplayer játék érhető el Windows, és hány MacOS operációs rendszerre. (7multi)
8. Készítsünk lekérdezést, ami összehasonlítja, hogy átlagosan hány GB szabad helyet igényelnek azok a MacOS operációs rendszer alatt futtatott játékok, melyekhez szükséges szélessávú internetkapcsolat, és amelyekhez nem. (8osszehasonlitas)

9. Készítsünk jelentést, ami szemlélteti, hogy a „Dota 2” játékkal hány órát játszottak decemberben az egyes napokon. A jelentésben az óraszám szerint csökkenő sorrendben jelenjenek meg az értékek és a hozzá tartozó napok. A jelentés címe legyen Dota 2 – december. (9dota)
10. Összesen hány nyelven érhetőek el az egyes játékok felületei? Jelenítsük meg a játék nevét, és a nyelvek számát. (10nyelv)

Beküldendő egy tömörített `i467.zip` állományban az adatbázis, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott adatbázis-kezelő neve és verziószáma.

I. 468. A Mastermind játék már korábban is előkerült az informatika feladatok között. Most ennek a *számjegyes* változata szerepel feladatunkban: kitalálandó négy számjegy, amelyek akár egyformák is lehetnek. A játékot egy számítógép ellen játssza az általunk írt program. A számítógép „gondol” négy számra, majd programunk minden lépésben négy számot tippel, válaszként pedig megkapja, hogy hány számjegy van jó helyen és mennyi szerepel még a tippünkből a gondolt számok között rossz helyen.*

Az ellenféllel az alábbi formában kommunikálhatunk a kezdés, kérdés és rákérdezés parancsokkal.

művelet	**url**	**válasz**
kezdés	`http://localhost/mm/ellenfel.php?muvelet=kezdes`	`OK`
kérdés	`http://localhost/mm/ellenfel.php?muvelet=kerdes&ertek=1234`	`2 1`
kérdés	`http://localhost/mm/ellenfel.php?muvelet=kerdes&ertek=1245`	`0 2`
rákérdezés	`http://localhost/mm/ellenfel.php?muvelet=rakerdezes&ertek=5334`	`4 0`

A táblázat válasz oszlopában a kérdésnél és a rákérdezésnél a számok között pontosan egy szóköz van. Nem cél, hogy a lehető legkevesebb lépésben jussunk megoldásra, de törekedjünk arra, hogy olyan kérdést ne tegyünk fel, amely ellentmondásban van a korábban kapott válaszokkal.

A feladat megoldásaként a versenykiírásban szereplő eszközökkel elkészíthető alkalmazások mellett más programozási eszközöket, akár webes alkalmazásokat is elfogadunk. Feltétel, hogy a program indítását követően a rákérdezéssel bezárólag ne legyen szükség felhasználói beavatkozásra és a futás során ne igényeljen aktív netkapcsolatot.

Beküldendő egy `i468.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a működéséhez szükséges egyéb fájlok, továbbá a hozzá kapcsolódó dokumentáció. Utóbbi a problémamegoldás lényeges elemeire világít rá, valamint tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

---

* `https://hu.wikipedia.org/wiki/Mastermind#Számjegyes_változat`.

Értékelés: 4 pont jár, ha a program szabályos eszközökkel kitalálja a megoldást, további 4 pontot ér, ha a kérdések nincsenek ellentmondásban a korábban kapott válaszokkal. A körültekintően elkészített dokumentáció 2 pontot ér.

I/S. 30. Matekórán Bence és osztálytársai az összeadást, szorzást és a négyzetre emelést gyakorolják a következő módon: A tanár felír a táblára egy $N \times M$-es táblázatba számokat, ezután felad Q számolási feladatot a diákoknak. Egy-egy feladatban kiválasztja egy tetszőleges $A \times B$ téglalap alakú részét a táblázatnak, majd megkéri a diákokat, hogy az ott levő számok mindegyikét szorozzák meg a-val és az eredményhez adjanak hozzá b-t, majd minden így kapott számot emeljenek négyzetre, végül adják össze őket. Az így kapott összeg kiszámítását jelenti egy-egy feladat.

Bence lázadó típus, ezért a végén csak a páros számokat adja össze. Adjuk meg mind a Q feladatra, hogy milyen eredményt kapott Bence. Egy feladat elvégzése után a táblázat változatlan marad, tehát mindegyik feladatnál az eredeti táblázat számaival kell dolgozni, de természetesen más a és b értékekkel, illetve más-más táblázatrészben.

Bemenet: az első sor tartalmazza a táblázat sorainak N, oszlopainak M számát és a kérdések Q számát. A sorok fentről lefelé 0-tól $(N-1)$-ig vannak indexelve, az oszlopok balról jobbra 0-tól $(M-1)$-ig. A következő N sor M számot tartalmaz: a táblázat számait fentről lefelé és balról jobbra. A következő Q sor mindegyike hat számot tartalmaz: az a, b, n_1, m_1, n_2, m_2 számokat, ekkor azon a táblázatrészen kell elvégezni a műveleteket, aminek bal felső sarkának sorindexe n_1, oszlopindexe m_1; jobb alsó sorának sorindexe n_2, oszlopindexe m_2. Az itt levő számokat kell megszorozni a-val, hozzájuk adni b-t, négyzetre emelni a kapott számot, majd a párosakat összeadni.

Kimenet: Q sort tartalmazzon, az i. sor az i. feladat eredményét.

Bemenet (a / jel sortörést jelent)	**Kimenet** (a / jel sortörést jelent)

`3 4 4`
`1 2 4 2 / 4 3 5 2 / 8 5 5 1`
`2 2 0 1 1 3 / 1 1 0 0 0 0`
`1 2 2 0 2 3 / 2 1 2 0 2 3`
	`416 / 4 / 100 / 0`

Korlátok: $1 \leqslant N, M \leqslant 1000$, $1 \leqslant Q \leqslant 10^6$, $0 \leqslant a, b$ és a táblázat elemei $\leqslant 100$, egészek.

A pontok 20%-a kapható, ha $N \cdot M \cdot Q \leqslant 10^6$; további 20% kapható, ha $a = 1$, $b = 0$; további 20% kapható, ha $b = 0$; további 40% kapható az eredeti bemenetre. Időlimit: 0,5 mp.

S. 129. Egy város csatornahálózatát csomópontok és a csomópontok között levő csatornák alkotják. A városban összesen N darab csomópont van és $N-1$ darab csatorna, a csatornák és csomópontok egy összefüggő hálózatot alkotnak. A csomópontok különböző magasságokban vannak, a 0 indexű csomópont van a legalacsonyabban. Egy p csomópont magasabban van, mint egy r csomópont, ha a p és 0 indexű csomópontok távolsága nagyobb, mint az r és 0 indexűeké. A lejtés miatt minden csatornában egy irányban folyik a víz, a magasabban levőtől az alacsonyabban levőig. Egy csomópontból abba a csatornába folyik a víz, amelyik a vizet egy alacsonyabban levő csomóponthoz szállítja, ha van ilyen csatorna. Ha nincs, akkor a csomópontban felgyűlik a víz, nem folyik sehova. Az előbbiekből adódik, hogy kezdetben a víz mindenhonnan a 0 indexű pontba folyik, ahol az felgyűlik. Az év során csatornák dugulnak el, ilyenkor használhatatlanok, nem folyik bennük a víz. Az eldugult csatornákat lehet, hogy megtisztítják, ilyenkor újra folyik bennük a víz. Kezdetben minden csatorna tiszta.

Georgie papírcsónakokkal játszik, a csónakot elhelyezi egy p indexű csomópontban. Ekkor a papírcsónak – követve a víz folyását – végül egy r indexű csomópontban köt ki, ahol felgyűlik a víz. Segítsünk Georgienak megtalálni ezt az r csomópontot.

Bemenet: Az első sorban található a csomópontok N és a tevékenységek Q száma. A következő $N-1$ sorban a csomópontok indexei vannak: az i. sorban egy j szám, azt jelenti, hogy az i és j indexű pontokat csatorna köti össze, amin j felé folyik a víz. (A 0 indexűből nem folyik sehova.) A következő Q sor mindegyike egy x és egy p számot tartalmaz. Ha $x=1$, akkor Georgie elhelyez egy papírcsónakot a p csomópontnál. Ha $x=0$, akkor az a csatorna, ami p-ből szállítja a vizet eldugul, ha eddig folyt benne a víz, vagy kitisztul, ha el volt dugulva.

Kimenet: Minden papírcsónak elhelyezés után írjuk ki (szóközzel elválasztva), hogy melyik indexű csomópontba kell mennie Georgienak, hogy megtalálja a csónakját.

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**

`23 27`
`0 / 0 / 0 / 11 / 11 / 13 / 13 / 14`
`14 / 14 / 1 / 1 / 1 / 2 / 3 / 3`
`5 / 5 / 5 / 6 / 9 / 9`
`0 1 / 1 0 / 1 2 / 1 11 / 1 7 / 1 22`
`0 9 / 0 5 / 1 5 / 1 17 / 1 4 / 1 6`
`1 14 / 1 21 / 1 10 / 1 15 / 0 19 / 0 5`
`1 19 / 1 18 / 1 5 / 1 12 / 0 9 / 1 22`
`0 1 /1 19 / 1 11`
	`0 / 0 / 1 / 1 / 0`
	`5 / 5 / 1 / 1 / 0`
	`9 /0 / 0 / 19 / 1`
	`1 / 1 / 0 / 19 / 0`

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 10^5$, $1 \leqslant Q \leqslant 10^5$.

Értékelés: a pontok 20%-a kapható, ha $N \cdot Q \leqslant 10^6$; további 30% kapható, ha csatorna csak eldugulhat, nem tisztulhat ki; további 50% kapható az eredeti korlátokra. Időlimit: 0,5 mp.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2018. december 10.

Segner János András, a turbina atyja

(Pozsonyszentgyörgy, 1704. 10. 09. – Halle, 1777. 10. 05.)

Magyarországon született és *Segner Hungarusnak* vallotta magát. Ő volt az első Magyarországról származó tudós professzor, akit a nemzetközi tudománytörténet jegyez.

A pozsonyi, valamint a győri evangélikus líceum és a Debreceni Református Kollégium diákja volt. Tanulmányait a Jénai Egyetemen folytatta, ahol matematikát, fizikát, kémiát és orvostudományt tanult. Három doktori disszertációt készített (matematikából, kémiából, és orvostudományból). Matematikai dolgozatában *Descartes előjeltételével* foglalkozott.

A jénai egyetemi tanulmányok befejezése után rövid ideig Debrecen városának fizikus-orvosa volt, utána németországi egyetemeken lett professzor: Jenában (1732–1735), Göttingenben (1735–1755) és Halléban (1755–1777). Egyik megalapozója volt a híres „Göttingeni iskolának". Részt vett az új csillagvizsgáló megalapításában és felszerelésében.

Nagyon jó matematika tankönyveket írt. Szénássy Barna* azt emelte ki, hogy Segnernek a tankönyvei azért váltak ismertté, mert jó érzékkel emelte ki a múlt hagyományaiból a feledésbe merült, hasznosítható eredményeket, a jelen lényeges vívmányait pedig módszeres feldolgozással tette elérhetővé a széles néprétegek számára. Több elemi algebrai és geometriai bizonyítás az ő írása alapján lett ismert. Így fordulhatott elő, hogy sokáig őt tartották a *Cavalieri-elv* felfedezőjének. Munkáit latinul vagy németül írta. Egyes szavait (pl. valódi tört, tizedes tört, az arányoknál a kültag, beltag) sok nyelvben ma is tükörfordításban használják. Nagyon jó tanár volt.

Polihisztor volt, gyakorlati ember. Számos találmány, eljárás fűződik a nevéhez, pl. vetőmag csávázása, szeszfőzés, kanócos olajlámpa, mentőöv, takarékos és füstszegény kályha tervezése, egy csillagászati észlelőműszer, a meteorológiai adatok matematika értékelése, szerencsejátékok találati valószínűségének meghatározása, a logarléc őse.

Az elméleti kutatások területén matematikából a nagy Fermat-tétel, az algebrai egyenletek gyökeinek grafikus ábrázolása, a differenciálszámítás, fizikából a mágnesség, a súrlódás kérdései is foglalkoztatták. Legkiemelkedőbbek és maradandók a fizikában elért eredményei. Legjelentősebb felfedezése a hidraulika területén történt, megalkotta a *reakciós turbina ősét, az ún. Segner-kereket,* amit Euler mutatott be a Német Tudományos Akadémián (1750, 1752). Eredményei képezték az *Euler-egyenletek* alapját, melyek a merev testek és folyadékok mechanikájának alapvető törvényei.

*Matematikus, tudománytörténész, egyetemi tanár (1913–1995).

Meg kell viszont említeni, hogy Segner megosztó egyéniség volt. Nem kedvelte a németeket, a magyar diákokat viszont pártfogolta. Nagy tudása miatt becsülték, de megalkuvást nem ismerő természetét sokan nem kedvelték.

Emlékét elsősorban Debrecen, Pozsony és Halle őrzi több-kevesebb viszontagsággal. Debrecenben, a Klinika területén, 2017 októberében állították fel újra a Mikus Sándor Kossuth-díjas szobrászművész által 1974-ben készített Segner-szobrot.

A KöMaL 1969. márciusi számában kitűzött **F. 1655.** feladatban igazolni kellett az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d > 0)$ valós együtthatós polinom $f(x_0)$ értékének $(0 < x_0 < 1)$ grafikus úton való megkeresésére Segner által adott eljárás helyességét.

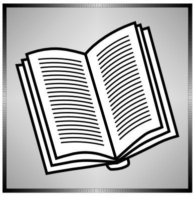
Dörrie: A diadalmas matematika című könyvében pedig az *Euler-problémának* a Segner által adott megoldását találjuk meg. Euler 1751-ben Goldbach-hoz írt levelében vetette fel ezt a problémát: *„Az n-oldalú síkbeli konvex sokszög hányféleképpen bontható fel egymást nem metsző átlók segítségével háromszögekre?”*

Kántor Sándorné Varga Tünde

Megjegyzés. 2018 tavaszán jelent meg Kovács László *Segner János András: Egy jeles hungarus a 18. századból* című könyve, amely innen letölthető: `http://real.mtak.hu/74845`.

A könyv címlapján látható Reibenstein festménye (`http://math.bme.hu/~hujter/segner.jpg`), az a Segnerről készült arckép, amely a KöMaL hátsó borítóján is látható. Az érdeklődők számára ajánljuk az Érintő online matematikai lapok 2018. júniusi cikkét: `http://ematlap.hu/index.php/interju-portre-2018-06/692-segner-janos-andras-a-matematikatanar`, vagy azt a videót, amelyben Gazda István bemutatja a Segner-kötetet:

`https://drive.google.com/open?id=1MBElpuOP8IKcSxQRx92mu_6xpcqpzzqy`.



Feynman és a legkisebb hatás elve

Egy emlékezetes feladat

Az 1930-as évek elején történt, hogy a középiskolában unatkozni látszó (később Nobel-díjas fizikus) *Richard Feynmant* tanára a következő feladattal kívánta felélénkíteni: Győződjön meg arról, hogy egy eldobott tárgy két adott időpont között (adott repülési idő mellett) éppen azt a röppályát „választja”, amelyet a mechanikai *legkisebb hatás elve* (másnéven *Hamilton-elv*) előír számára [1]. Az elv szerint a repülés kezdeti t_1 és végső t_2 időpontja közötti $t_2 - t_1 = T$ időben *valamennyi elképzelhető mozgáspálya közül* az valósul meg, amelyen a K kinetikus és V potenciális energia különbségének, az $L(t)=K(t)-V(t)$ függvénynek a mozgás során vett időbeli átlagértéke, amit $\langle L\rangle$ módon jelölünk, minimális[1].

Feynman ezt az elvet „elbűvölően érdekesnek” találta, és lelkesedése az évek során sem csökkent. Az addig csak a klasszikus fizikában alapvető hatáselv, pályafogalom Feynman nyomán bekerültek a részecskefizika kvantummechanikai eszköztárába.

Mivel a legkisebb hatás elve a mai középiskolásokat is érdekelheti, nézzük meg Feynman feladatát egy speciális esetben, ahol elegendó az egyenletesen gyorsuló mozgás ismerete, a matematikai analízis módszereire, variációszámításra nincs szükség.

Az elv működésben

A kiindulási helyzet: valaki $t_1=0$ pillanatban labdát dob fel az x_a távolságban álló ház y_a magasan lévő emeleti ablakában várakozó társának. Az ablak vízszintes (x) és függőleges (y) tengelyeken mért koordinátái a mozgás síkjában $(x_\mathrm{a},y_\mathrm{a})$, a labdáé a feldobás pillanatában $(0,0)$. Az iskolában tanultak szerint a labda pályája parabola, a mozgást leíró egyenletek a t idő függvényében

$$x=ut,\qquad y=-\frac{g}{2}t^2+\left(\frac{uy_\mathrm{a}}{x_\mathrm{a}}+\frac{gx_\mathrm{a}}{2u}\right)t \tag{1}$$

(ahol g a nehézségi gyorsulás). A repülés teljes T idejét az x irányú, állandó $v_x=u$ sebesség rögzíti: $T=x_\mathrm{a}/u$. A kicsit szokatlan alakban felírt (1) összefüggésben a függőleges irányú kezdősebességet az $y(t=T)=y_\mathrm{a}$ feltétel rögzíti.

Ha tehát az elv „működik”, akkor például a $(0,0)$ és az$(x_\mathrm{a},y_\mathrm{a})$ pontokon átmenő, ugyanakkora T repülési idővel, de egy *tetszőlegesen* választott a paraméterrel jellemzett,

$$x=ut,\qquad y=-at^2+\left(\frac{uy_\mathrm{a}}{x_\mathrm{a}}+\frac{ax_\mathrm{a}}{u}\right)t \tag{2}$$

egyenletekkel leírt parabolapályán az $L(t)=K(t)-V(t)$ (az ún. Lagrange-függvény) *időbeni átlagértéke*, $\langle L\rangle$, bármely $a\neq g/2$ választása esetén *nagyobb kell legyen*, mint a ténylegesen megvalósuló $a=g/2$ pálya esetén.

Megjegyzés. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a labda mozgása x irányban egyenletes. A legkisebb hatás elve megengedné ugyan, hogy másféle időfüggésű mozgásokra is kiszámítsuk a Lagrange-függvény átlagát, és ezek minimumát keressük, de ekkor ismét a variációszámítás matematikai nehézségeibe ütköznénk. Ha olyan mozgások körében keressük a legkisebb hatást, amelyek mindössze egyetlen paramétertől, az a mennyiségtől függenek, a probléma egy egyváltozós, ráadásul kvadratikus függvény szélsőértékének

[1] A szakirodalomban a „legkisebb hatáson” az $S=(t_2-t_1)\langle L\rangle$ *hatásfüggvény* minimumát (általánosan stacionárius, vagyis a pálya kis változtatására „első közelítésben” változatlanul maradó) értékét értik. De mivel (t_2-t_1) rögzített, S minimuma egyben $\langle L\rangle$ minimuma is. (Az átlagértéket használó megfogalmazás Feynmantól ered [1].) A „pálya” itt nemcsak a pályagörbe *alakjára* vonatkozik, az elv a pályagörbe meghatározásán túl a megvalósuló mozgás teljes, tér- és időbeli leírását adja.

megkeresésére egyszerűsödik, ez pedig elemi úton, (teljes négyzetté alakítással) megoldható.

A (2) egyenletekkel leírt mozgás x irányban egyenletes, y irányban egyenletesen gyorsuló, ezért

$$v_x = u, \qquad v_y = -2at + \left(\frac{uy_\mathrm{a}}{x_\mathrm{a}} + \frac{ax_\mathrm{a}}{u}\right).$$

Ezzel az m tömegű tárgy Lagrange-függvénye:

$$L = K - V = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) - mgy =$$

$$= \frac{m}{2}\left[u^2 + \left(-2at + \frac{uy_\mathrm{a}}{x_\mathrm{a}} + \frac{ax_\mathrm{a}}{u}\right)^2\right] - mg\left[-at^2 + \left(\frac{uy_\mathrm{a}}{x_\mathrm{a}} + \frac{ax_\mathrm{a}}{u}\right)t\right],$$

ami $u = x_\mathrm{a}/T$ felhasználásával így is felírható:

$$L = \frac{m}{2}\left[\frac{x_\mathrm{a}^2}{T^2} + \left(-2at + \frac{y_\mathrm{a}}{T} + aT\right)^2\right] - mg\left[-at^2 + \left(\frac{y_\mathrm{a}}{T} + aT\right)t\right].$$

Mivel ez a kifejezés t-ben kvadratikus, időbeli átlagértéke elemi számolással megkapható.

$$\langle L\rangle = \langle A\cdot t^2 + B\cdot t + C\rangle = A\langle t^2\rangle + B\langle t\rangle + C,$$

ahol

$$A = ma(2a+g),$$

$$B = -m(g+2a)\left(\frac{y_\mathrm{a}}{T} + aT\right),$$

$$C = m\left(\frac{x_\mathrm{a}^2 + y_\mathrm{a}^2}{2T^2} + \frac{a^2T^2}{2} + ay_\mathrm{a}\right)$$

időfüggetlen kifejezések.

Látható, hogy csak t^2 és t átlagára van szükségünk a $(0,T)$ intervallumon, ami definíció szerint a függvény alatti terület elosztva az időintervallum hosszával. A t^2 parabola alatti területet a $(0,T)$ szakaszon már Arkhimédész kiszámította [2], ez $\frac{1}{3}T^3$, tehát $\langle t^2\rangle = \frac{1}{3}T^2$, és nyilvánvalóan $\langle t\rangle = \frac{1}{2}T$. Ezzel, valamint A, B és C beírásával kapjuk:

$$\langle L\rangle = \langle K - V\rangle = \frac{m}{2}\left[\frac{1}{3}T^2\left(a - \frac{g}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_\mathrm{a}^2 + y_\mathrm{a}^2}{T^2} - gy_\mathrm{a} - \frac{g^2T^2}{12}\right)\right].$$

Ez a kifejezés $a = \frac{g}{2}$-nél valóban minimális, bármely „hegyesebb” $(a > g/2)$ vagy „laposabb” $(a < g/2)$ pálya (és az $a = 0$ egyenes is) nagyobb $\langle L\rangle$-re vezet.

De honnan tudja a labda?

A legkisebb hatás elve tehát parabolapályákra szorítkozva beigazolódott, de az elv *minden más alakú pályát* tekintetbe véve is a jó eredményt adja [1].[2] De hogyan? A labda ismeri a távoli jövőjét? Tudja minden $0 < t < T$ pillanatban, merre kell továbbrepülnie ahhoz, hogy a már megtett és a *még hátralévő utat* is magában foglaló egész pályájára számított $\langle L \rangle$ átlagérték (és vele az S hatásfüggvény) valamennyi elképzelhető pálya közül a legkisebbnek bizonyuljon?

A távoli jövő előrelátása a *klasszikus mechanika szerint* valójában nem szükséges, mert a legkisebb hatás elvéből *matematikailag következnek* a labda *közvetlen* jövőjét minden helyen és időpontban meghatározó Newton-féle mozgásegyenletek (és viszont, a Newton-egyenletekből levezethető a hatáselv), ezért nem csoda, hogy a megvalósuló pálya éppen az, amelyen $\langle L \rangle$ minimális. A hatáselv a klasszikus mechanikában egyszerűen a mozgásegyenletek matematikailag tömör, előnyös (koordináta-rendszertől független) megfogalmazásának tekinthető.

De ha ez csak egyszerű matematika, mit talált korának egyik legnagyobb fizikusa (aki idén éppen 100 éves lenne) a legkisebb hatás elvében „elbűvölően érdekesnek”? Hogyan „vizsgálják meg” a részecskék a kvantumfizika Feynman-féle megfogalmazásában az összes elképzelhető pályát ahhoz, hogy kiválasszák az optimálisat, a megvalósulót? Erről egy következő írásban lesz szó, ahol a legkisebb hatás elve és néhány további, hasonlóan „célt megfogalmazó” (integrális) fizikai elv kapcsolatára is fény derül.

Irodalom

[1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Mai fizika 6.,* 71. fejezet, Műszaki Könyvkiadó, 1970.

[2] Simonovits András: *Válogatott fejezetek a matematika történetéből,* 25. old., Typotex, 2009.

Solt György
Svájc, Zug

Megoldásvázlatok a 2018/7. szám emelt szintű fizika gyakorló feladatsorához

Tesztfeladatok

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	D	A	A	B	A	B	B	A	D	D	C	D	C	B

[2] A legkisebb hatás elvét *L. Euler* (1707–1783) és *J. L. Lagrange* (1736–1813) ilyen irányú eredményeit felhasználva mai formájában *W. R. Hamilton* (1805–1865) fogalmazta meg 1834-ben.

Számolásos feladatok

1. *a*) A síkkondenzátor kapacitása

$$C=\varepsilon_0\frac{A}{d}=8{,}85\cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}}\cdot\frac{5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2}{0{,}02\ \mathrm{m}}=2{,}21\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}=2{,}21\ \mathrm{pF}.$$

b) Töltés hatására a kondenzátoron

$$U=\frac{Q}{C}=\frac{2\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}}{2{,}21\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}}=905\ \mathrm{V}$$

feszültség alakul ki.

A kondenzátorban tárolt energia

$$E=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\cdot 2{,}21\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}\cdot(905\ \mathrm{V})^2=9{,}06\cdot 10^{-7}\ \mathrm{J}.$$

2. Egy $\ell_1=80$ cm hosszúságú fonálinga lengésideje:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{0{,}8\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}=1{,}79\ \mathrm{s}.$$

Ez az inga 1 perc alatt 60 s/1,79 s = 33,5 lengést végez.

A megadott feltétel szerint a második inga ennél 2-vel többet, azaz 35,5-et leng, vagyis a lengésideje 60 s/35,5 = 1,69 s.

Ismét a lengésidőre vonatkozó összefüggést felhasználva:

$$1{,}69\ \mathrm{s}=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}},$$

ahonnan a másik inga hossza: $\ell_2=0{,}71$ m.

3. Mivel a közös hőmérséklet megbecslése nem egyszerű feladat, vizsgáljuk meg, hogy mennyivel több vagy kevesebb energiával rendelkezik a rendszer a kiindulási állapotban, mint egy hasonló össztömegű, 0 °C hőmérsékletű vizet tartalmazó másik rendszer.

A jég energiája negatív, mert a hőmérséklete 0 °C alatt van:

$$E_{\text{jég}}=-L_{\text{olvadás}}\,m_{\text{jég}}-c_{\text{jég}}\,m_{\text{jég}}|\Delta T_{\text{jég}}|=$$

$$=-2256\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}\cdot 6\ \mathrm{kg}-2{,}1\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\ {}^\circ C}}\cdot 6\ \mathrm{kg}\cdot 20\ {}^\circ\mathrm{C}=-2262\ \mathrm{kJ}.$$

A víz energiája pozitív:

$$E_{\text{víz}}=c_{\text{víz}}\,m_{\text{víz}}\Delta T_{\text{víz}}=4{,}2\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\ {}^\circ C}}\cdot 4\ \mathrm{kg}\cdot 60\ {}^\circ\mathrm{C}=1008\ \mathrm{kJ},$$

és a vízgőz energiája is pozitív:

$$E_{\text{gőz}} = L_{\text{forrás}}\, m_{\text{gőz}} + c_{\text{gőz}}\, m_{\text{gőz}} \Delta T_{\text{gőz}} =$$
$$= 2256\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \cdot 2\ \text{kg} + 4{,}2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\ {}^\circ\text{C}} \cdot 2\ \text{kg} \cdot 100\ {}^\circ\text{C} = 5352\ \text{kJ}.$$

Az összenergia

$$E_{\text{összes}} = E_{\text{jég}} + E_{\text{víz}} + E_{\text{gőz}} = -2262\ \text{kJ} + 1008\ \text{kJ} + 5352\ \text{kJ} = +4098\ \text{kJ} > 0.$$

Mivel az összenergia pozitív a rendszer hőmérséklete 0 °C-nál magasabb. Nézzük meg, hogy ez az energia milyen hőmérsékletre tudja emelni a rendszert:

$$E_{\text{összes}} = c_{\text{víz}}\, m_{\text{összes}} \Delta T,$$

ahonnan (feltételezve, hogy $\Delta T < 100$ °C, tehát az egyensúlyi állapotban csak víz lesz jelen):

$$\Delta T = \frac{E_{\text{összes}}}{c_{\text{víz}}\, m_{\text{összes}}} = \frac{4098\ \text{kJ}}{4{,}2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\ {}^\circ\text{C}} \cdot 12\ \text{kg}} = 81{,}3\ {}^\circ\text{C}.$$

4. *a*) A 18 m hosszú lánc tömege $m_{\text{lánc}} = 18 \cdot 0{,}5\ \text{kg} = 9\ \text{kg}$. Ez azt jelenti, hogy kezdetben $m_{\text{lánc}} + m_{\text{vödör}} = 24$ kg tömeget kell emelni, a legvégén pedig csak $m_{\text{vödör}} = 15$ kg-ot. Mivel a lánc homogén, ezért az össztömeg, és ezzel együtt a szükséges erőhatás is a vödör elmozdulásával lineárisan csökken. Ebből kiindulva

$$F_{\max} = (m_{\text{vödör}} + m_{\text{lánc}})g = 24\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 235\ \text{N},$$
$$F_{\min} = m_{\text{vödör}}\, g = 15\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 147\ \text{N}.$$

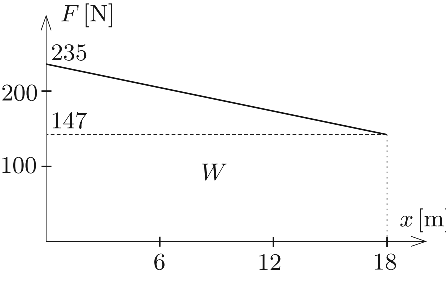
A lánc súlya méterenként

$$\frac{G}{\ell} = 0{,}5\ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4{,}9\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

b) Jelölje x a vödör elmozdulását! Ekkor az erő-elmozdulás függvény matematikai alakja a következő:

$$F(x) = 235\ \text{N} - 4{,}9\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \text{x},$$

és a függvény grafikonját az *ábra* mutatja.



c) A munkavégzést a függvény alatti terület kiszámításával adhatjuk meg. A teljes munka

$$W = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2}\,\ell = \frac{235\ \text{N} + 147\ \text{N}}{2}\, 18\ \text{m} = 3438\ \text{J}.$$

Ennek harmada 3438 J/3 = 1146 J. Ennyi munkát kell elvégezni minden embernek. Tegyük fel, hogy az első ember x_1 hosszat húzott a kötélen, ekkor a munkavégzése (az SI egységek elhagyásával):

$$1146 = \frac{235 + 235 - 4{,}9\,x_1}{2}\,x_1,$$

vagyis

$$4{,}9\,x_1^2 - 470\,x_1 + 2292 = 0.$$

A másodfokú egyenletből x_1 meghatározható, értéke 5,2 m. (A második gyök 90,6 m, ez nyilván nem felel meg a feladat feltételeinek.) Tehát az első embernek 5,2 m-t kell húzni a vödrön.

Az előbbihez hasonlóan megkereshetjük a második váltás helyét is:

$$2292 = \frac{235 + 235 - 4{,}9\,x_2}{2}\,x_2,$$

vagyis

$$4{,}9\,x_2^2 - 470\,x_2 + 4584 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldása: $x_2 = 11{,}0$ m. (A második gyök ebben az esetben sem megfelelő.)

Tehát 5,2 m-nél és 11,0 m-nél kell váltani ahhoz, hogy mindhárom ember egyenlő mértékben végezzen munkát.

Markovits Tibor
Budapest

Mérési feladat megoldása

M. 378. *Méréssel határozzuk meg, hogy egy szúnyogháló (vagy hasonló, finom szövésű anyag) hány százalékkal csökkenti az ablak fényáteresztő képességét!*

(*6 pont*) Közli: *Nagy Piroska Mária,* Dunakeszi

Megoldás.

A mérésnél használt eszközök

– Fotoellenállás (WK 65037 1K5 típusú);
– digitális multiméter;
– leakasztott ablak;
– 2 hokedli;
– szúnyogháló;
– állvány, rögzítővel;

– felcsavarozható lámpa;
– 3 különböző fényforrás (normál izzó, LED-es izzó, gyertyaégő);
– fonál;
– colstok.

A mérés menete

I. módszer

1. Először fel kellett vennem a fotoellenállás karakterisztikáját, vagyis a megvilágítás és az ellenállás nagysága közötti kapcsolatot. Ehhez rögzítettem a lámpát az állványra, majd a normál izzót becsavarva elhelyeztem azt egy teljesen elsötétített szobában. Itt kifeszítettem a fonalat, és az általa meghatározott egyenes mentén mozgatva a multiméterre kötött fotoellenállást 10 cm-enként megmértem annak értékét. (A távolságot colstokkal mértem.)

Felhasználtam, hogy a fotoellenállás megvilágítása a pontszerűnek tekintett fényforrástól mért távolság négyzetével fordítottan arányos. A távolság 10 cm-től 4 m-ig változott, és a legkisebb távolsághoz tartozó megvilágítást (önkényesen) 1-nek választottam. (Ez utóbbit azért tehettem meg, mert a feladat nem abszolút megvilágításokat, hanem csak az arányokat kérdezi.)

Ezután a normált „fényerősséget" (a megvilágítás erősségét) a mért ellenállás függvényében logaritmikus skálán ábrázolva a kapott pontokra egyenes illeszthető, ebből pedig adódik a megvilágítás erőssége (E) és a kΩ egységekben mért ellenállás (R) közötti hatványfüggvény alakú kapcsolat: $E = 0{,}32 \cdot R^{-1{,}71}$.

2. A leakasztott ablakot a két hokedlire helyeztem, aláraktam a fotoellenállást (a multiméterre kapcsolva), majd a lámpával megvilágítva leolvastam az ellenállást szúnyogháló nélkül, azután pedig az ablakra helyezett szúnyoghálóval.

3. Ezek után a karakterisztika alapján kapott összefüggésbe helyettesítve a mért ellenállásértékeket megkaptam a (normált) megvilágításokat, ezekből pedig már számszerűsíthetően a fényáteresztő képesség változását.

4. A mérést 3 fajta fényforrással (normál izzó, LED-es izzó, gyertyaégő), mindegyiküknél 5 különböző fotoellenállás-izzó távolságnál végeztem el. A mérési eredményeket táblázatban rögzítettem.

II. módszer

A mérést az előzővel hasonló módon és elven, csak más „érzékelővel" is elvégeztem. A Google Play áruházból ingyenesen letöltöttem a „Light Meter Tools - Trial" alkalmazást egy okostelefonra. Ennek segítségével az első kamerával közvetlenül tudtam mérni a megvilágítás erősségét. Ezek után az előzővel analóg módon ugyanazon az öt távolságon és mindhárom izzóval elvégeztem a mérést, és az adatokat táblázatba foglaltam.

A mérés pontossága

A mérési hiba nagyságát az adatok szórásából becsültem meg. A hiba okai:
– a karakterisztika pontatlan meghatározása (az egyenesillesztés hibája);
– az ellenállásmérés pontatlansága;
– a távolságok pontatlan mérése;

– az izzók kis mértékű villogása (fényerősség-ingadozása);
– a szúnyogháló egyenetlenségei (nem egyenletes a „rácsozottsága”);
– a megvilágítás telefonos mérésének hibája.

A mérés értékelése, eredmények

Az I. módszer adataiból a fényáteresztő képesség csökkenése $(38 \pm 2)\%$, a II. módszer adataiból az eredmény $(31 \pm 6)\%$. Látható, hogy a fotoellenállással történő mérés lényegesen pontosabb, mint a letöltött alkalmazásé, de a két eredmény a hibahatáron belül megegyezik egymással.

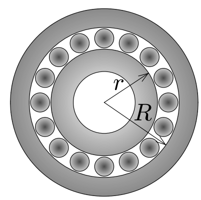
Olosz Adél (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn., Szakgimn. és Óvoda, 11. évf.)

5 mérési jegyzőkönyv érkezett. 6 pontot kapott Fajszi Bulcsú, Krasznai Anna, Morvai Orsolya és Olosz Adél megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 1 dolgozat.

Fizika gyakorlatok megoldása

G. 634. *Az ábrán látható golyóscsapágy belső gyűrűje mozdulatlan, a golyók középpontjai* 0,2 m/s *sebességgel futnak körbe. Mekkora a külső gyűrű fordulatszáma, ha* $r = 3$ cm, $R = 4$ cm?

(*3 pont*)



Megoldás. Jelöljük a golyóközéppontok sebességének ismert nagyságát v_0-lal, a forgásban lévő golyók kerületi sebességét pedig v_k-val.

A golyók azon pontjainak sebessége, amelyek a *belső* gyűrűvel érintkeznek:

$$v_\text{belső} = v_0 - v_\mathrm{k} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_\mathrm{k} = v_0 = 0{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A golyók azon pontjainak sebessége, amelyek a *külső* gyűrűvel érintkeznek:

$$v_\text{külső} = v_0 + v_\mathrm{k} = 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ugyanekkora kerületi sebességgel mozognak a külső gyűrű belső pontjai, hiszen a golyók egyik gyűrűhöz képest sem csúsznak.

A külső gyűrű belső határának kerülete:

$$K = 2\pi R = 25{,}1\ \mathrm{cm} = 0{,}251\ \mathrm{m}.$$

A külső gyűrű forgásának periódusideje $T = \frac{K}{v_\text{külső}} = 0{,}63$ s, a fordulatszáma pedig

$$f = \frac{1}{T} = 1{,}59\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

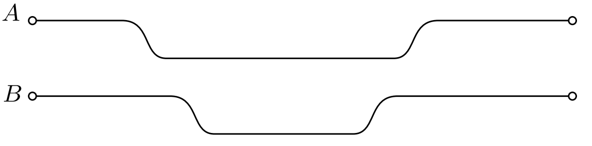
A csapágy külső gyűrűje tehát másodpercenként mintegy 1,6 fordulatot tesz meg, percenkénti fordulatszáma pedig 96.

Papanitz Ákos (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 9. évf.)

41 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 3, hiányos (1 pont) 5, hibás 21 dolgozat.

G. 637. *Két golyót azonos kezdősebességgel, egyszerre indítunk egy-egy vízszintes, sík felületen. A mozgás során mindkét golyó legurul egy lejtőn, majd felgurul az eredeti szintre, és így jut el az út végére. Az utak hossza ugyanakkora, és a lejtők mélysége is megegyezik. A súrlódási veszteségektől mindkét esetben eltekinthetünk.*

Melyik golyó ér hamarabb az út végére?



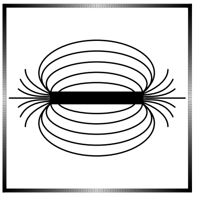
(*3 pont*)

Megoldás. Az A esetben ér az út végére hamarabb a golyó. A lejtőn legurult golyóknak nagyobb (de egymáshoz viszonyítva ugyanakkora) a sebessége, mint amivel elindítottuk azokat. Az A esetben többet megy a golyó a felület mélyebb részén, vagyis tovább megy nagyobb sebességgel. Miután újra felmennek a lejtőn, minkét golyó lelassul az eredeti sebességére. Az A esetben a golyó hosszabb úton és hosszabb ideig mozog nagyobb sebességgel, ezért ez a golyó ér hamarabb az út végére.

Osváth Klára (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 8. évf.)

46 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 6, hibás 4 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5003. *Két ℓ hosszúságú fonálinga közvetlenül egymás mögött, egymással párhuzamos síkokban lenghet. Árnyékuk merőlegesen egy falra vetődik, időnként áthalad egymáson. Mindkét ingát ugyanakkora (kicsiny) szögben kitérítjük, majd t_0 időkülönbséggel elengedjük. (t_0 kisebb, mint az ingák lengésideje.)*

a) Mikor találkozik az árnyékuk először?

b) Mikor következik be az n-edik találkozás?

(*4 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

Megoldás. Az ingák árnyéka a falon ugyanakkora amplitúdójú és ugyanakkora frekvenciájú harmonikus rezgőmozgással mozog:

$$y_1(t) = A\cos(\omega t + \omega t_0), \qquad y_2(t) = A\cos(\omega t).$$

Az A amplitúdó nagysága a kezdeti kitéréstől függ, az ω körfrekvencia mindkét inga esetén $\sqrt{g/\ell}$, a lengésidő pedig $T = 2\pi/\omega$.

A falra vetített árnyékok akkor találkoznak, ha $y_1(t) = y_2(t)$, vagyis ha

$$\cos(\omega t + \omega t_0) = \cos(\omega t), \qquad (t > 0).$$

Ha két szög koszinusza megegyezik, akkor vagy a két szög különbsége, vagy pedig az összege 2π egész számú többszöröse. Az első eset nem fordulhat elő, hiszen $0 < \omega t_0 < \omega T = 2\pi$. A másik lehetőség: $2\omega t + \omega t_0 = n \cdot 2\pi$, ahol n egész szám. Innen

$$t_n = n\,\frac{\pi}{\omega} - \frac{t_0}{2} = \frac{nT - t_0}{2} = \frac{2n\pi\sqrt{\ell/g} - t_0}{2}.$$

A $t_n > 0$ feltétel miatt $n \geqslant 1$, és t_n éppen az árnyékok n-edik találkozásának időpontja.

Kondákor Márk (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

47 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 20, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 1 dolgozat.

P. 5023. *Egy 25°-os lejtőn lecsúszó test sebessége a lejtő alján negyede annak a sebességnek, mint amekkorát súrlódás nélkül érhetett volna el. Mekkora a súrlódási együttható?*

(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

Megoldás. Ha a lejtő magassága h és a hajlásszöge α, a lejtő teljes hossza:

(1) $$\ell = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

1. A súrlódásos esetben (lásd az *1. ábrát*) felírható a munkatétel. Mivel a testet a lejtőhöz nyomó erő $mg\cos\alpha$, a csúszó súrlódási erő $\mu mg\cos\alpha$, fennáll, hogy

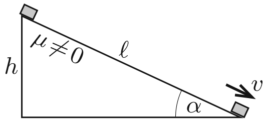
$$mgh - \mu(mg\cos\alpha)\cdot\ell = \frac{1}{2}mv^2,$$

azaz (1) ismeretében

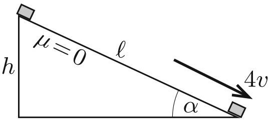
(2) $$gh - \mu g\frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2}v^2.$$

2. Súrlódásmentes esetben (lásd a *2. ábrát*) csak konzervatív erők hatnak, így alkalmazható a mechanikai energiamegmaradás törvénye:

(3) $$mgh = \frac{1}{2}m(4v)^2, \qquad \text{azaz} \qquad v^2 = \frac{gh}{8}.$$



1. ábra



2. ábra

A (2) és (3) egyenletekből (v^2 kiküszöbölése és $gh\neq 0$-val való egyszerűsítés után) kapjuk, hogy

$$1-\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{16},$$

ahonnan a csúszási súrlódási együttható értéke:

$$\mu=\frac{15}{16}\operatorname{tg}25^\circ\approx 0{,}44.$$

Urszuly Csenge (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.)

79 dolgozat érkezett. Helyes 51 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 11, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 3 dolgozat.

P. 5028. *Egy* 1 *méter hosszúságú, zárt hengeres tartályban levegő van. A tartályt a vízszintes hossztengelye irányában állandó gyorsulással mozgatjuk, miközben a bezárt levegő hőmérsékletét mindvégig állandó,* $T=273$ K *értéken tartjuk. Mekkora* a_0 *gyorsulás esetében lenne a tartály elején a levegő nyomása*

a) 0,1%*-kal kisebb,*

b) feleakkora, mint a tartály hátulján?

Útmutatás: *A földi légkör sűrűsége – ha a hőmérséklet mindenhol* $T=273$ K *lenne – a barometrikus magasságformula szerint változna:* $\varrho(h)=\varrho_0\mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}$*, ahol* M *a levegő átlagos* moláris tömege, *és kb.* 5500 *méter magasságban csökkenne a sűrűség a tengerszinten mérhető érték felére.*

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Az a_0 gyorsulású tartályhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben egy m tömegű testre $F=ma_0$ nagyságú (a gyorsulással ellentétes irányú) *tehetetlenségi erő* hat. A tartályban lévő gázmolekulák „szemszögéből” az a_0 gyorsulás (a tömeggel arányos tehetetlenségi erő miatt) éppen olyan hatású, mintha vízszintes irányú, $g'=a_0$ nehézségi gyorsulásnak megfelelő gravitációs erő is hatna a gázrészecskékre. (Az igazi, függőleges irányú g gyorsulás a_0 mellett még a 0,1%-os nyomásváltozáskor is elhanyagolható.) Ezek szerint a vízszintesen gyorsított tartályban lévő levegőre is alkalmazható a barometrikus „magasságformula”:

$$\varrho(\ell)=\varrho(0)\mathrm{e}^{-\frac{Ma_0\ell}{RT}},$$

ahol $\ell=1$ méter a tartály hossza. Ugyanilyen összefüggés teljesül a gyorsított gáz nyomására is, hiszen az ideális gázok állapotegyenlete szerint adott (állandó) hőmérsékleten a gáz nyomása egyenesen arányos a sűrűségével. Tehát fennáll

$$p(\ell) = p(0)\mathrm{e}^{-\frac{Ma_0\ell}{RT}},$$

vagyis

$$a_0 = -\frac{RT}{M\ell}\ln\frac{p(\ell)}{p_0}.$$

a) Ha $p(\ell) = p_0 - \frac{0{,}1}{100}p_0 = 0{,}999\,p_0$, akkor

$$a_0 = -\frac{8{,}31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\cdot 273\ \mathrm{K}}{29{,}1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}\cdot 1\ \mathrm{m}}\ \ln 0{,}999 = 78\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) Amennyiben $p(\ell) = \frac{p_0}{2}$, a gyorsulás kb. $5{,}4\cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, vagyis a földi g-nek több mint 5000-szerese.

Mamuzsics Gergő Bence (Kecskeméti Bolyai J. Gimn., 12. évf.)

30 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 12, hiányos (3 pont) 7 dolgozat.

P. 5035. *Télen a cinkék egyik kedvenc eledele a magokat is tartalmazó faggyúgolyó, amelyet például egy fa alsó ágára lehet fonállal felfüggeszteni. Egy ilyen golyóból akár két cinke is falatozhat egyszerre. Egy alkalommal a* 90 *gramm tömegű golyón lakmározó két cinke – valamitől megriadva – egyszerre röppent fel a golyóról, ugyanakkora kezdősebességgel, egymásra merőleges irányban úgy, hogy mindkét madár kezdősebessége a vízszintessel* 35°*-os szöget zárt be. Az egyenként* 18 *gramm tömegű cinkék közös felröppenését követően a golyót tartó függőleges fonál* 10°*-kal lendült hátra, majd* 1,4 *másodperces lengésidővel kezdett lengedezni.*

Mekkora kezdősebességgel röppentek fel a cinkék?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. *Adatok és megadott információk:*

A cinkék tömege $M = 18$ g $= 0{,}018$ kg.

A faggyúgolyó tömege $m = 90$ g $= 0{,}090$ kg.

A cinkék a vízszinteshez képest $\alpha = 35°$-os szögben szállnak fel.

A fonál $\beta = 10°$-os szögben lendül ki.

A faggyúgolyó-inga lengésideje $T = 1{,}4$ s.

A faggyúgolyó-inga (ismeretlen) hossza ℓ.

A faggyúgolyó (ismeretlen) kezdősebessége közvetlenül a cinkék felszállása után v_0.

A cinkék (ismeretlen) sebessége közvetlenül a felröppenésük után V_0.

A cinkék sebességvektorai a felröppenéskor 90°-os szöget zár be egymással.

A cinkék kezdősebességének vízszintes vetülete (ismeretlen) γ szöget zár be egymással.

A fonál hosszát a lengésidőből határozhatjuk meg:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},\qquad \text{ebből}\qquad \ell=\frac{gT^2}{4\pi^2}\approx 0{,}49\ \mathrm{m}.$$

A faggyúgolyó emelkedési magassága: $\Delta h=\ell-\ell\cos\beta=0{,}0074$ m. A faggyúgolyó kezdősebessége (az energiamegmaradás törvényét alkalmazva):

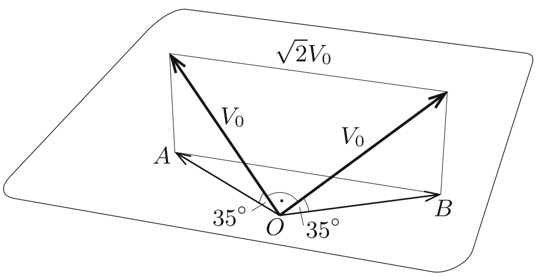
$$v_0=\sqrt{2g\Delta h}=0{,}38\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

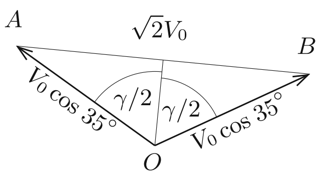
A cinkék felröppenésekor a fonál egy rövid ideig még függőlegesnek tekinthető, emiatt nem fejthet ki vízszintes irányó erőt a golyóra, és így a cinkék és a faggyúgolyó összes lendületének vízszintes komponense hirtelen nem változhat meg.

Megjegyzés. A felröppenés folyamata olyan, mint egy időben visszafelé lejátszódó rugalmatlan ütközés; a vízszintes irányú lendületek összege állandó marad, a mozgási energiák összege viszont – a madarak izmai által végzett munka következtében – megnő.

A felröppenő cinkék V_0 nagyságú sebességvektorai merőlegesek egymásra, végpontjaik tehát $\sqrt{2}V_0$ távolságra vannak egymástól. A sebességvektorok vízszintes vetületei (amelyek $V_0\cos 35^\circ$ hosszúságúak) *nem* merőlegesek egymásra, hanem valamekkora γ szöget zárnak be egymással. Az *ábráról* leolvasható, hogy

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}V_0}{V_0\cos 35^\circ}=0{,}863,\qquad \text{vagyis}\qquad \frac{\gamma}{2}=59{,}7^\circ.$$





Alkalmazzuk a lendületmegmaradás törvényét:

$$2MV_0\cos 35^\circ\cos\frac{\gamma}{2}-mv_0=0,$$

ahonnan a cinkék kérdezett kezdősebessége

$$V_0=\frac{m}{2M}\cdot\frac{1}{\cos 59{,}7^\circ\cos 35^\circ}v_0=2{,}5\cdot\frac{1}{0{,}505\cdot 0{,}819}\cdot 0{,}38\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 2{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Vaszary Tamás (Győr, Kazinczy Ferenc Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

50 dolgozat érkezett. Helyes Fajszi Bulcsú, Fekete Balázs Attila, Kolontári Péter, Marozsák Tóbiás, Sal Dávid és Vaszary Tamás megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 28, hiányos (1–3 pont) 13, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5042. *Egy hagyományos optikai rácsra merőlegesen olyan bíborszínű fényt bocsátunk, amely* 652 nm *hullámhosszú vörös és* 489 nm *hullámhosszú kék fény keveréke. A* 2 m *távolságra lévő ernyőn megfigyelhető legközelebbi bíborszínű fényfoltok távolsága* 20 cm. *Mekkora a rácsállandó?*

(*4 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

Megoldás. A fény hullámtermészete miatt az optikai rácson elhajlás tapasztalható. A különböző réseken áthaladó fényhullámok interferálnak egymással, és bizonyos irányokban erősítés jöhet létre. Az erősítés feltétele monokromatikus, λ hullámhosszúságú fénynél:

$$d\sin\alpha = k\cdot\lambda,$$

ahol d a rácsállandó, k pedig egész szám.

Mivel itt addítív (összeadó) színkeverésről van szó, hogy újra láthassuk a bíborszínű fényt a két összetevő maximális erősítését egyszerre kell megtapasztalnunk.

Felírható egy egyenletrendszer:

$$d\sin\alpha = k_1\cdot\lambda_{\text{vörös}},$$

$$d\sin\alpha = k_2\cdot\lambda_{\text{kék}},$$

vagyis

$$k_1\lambda_{\text{vörös}} = k_2\lambda_{\text{kék}},$$

azaz

$$652\,k_1 = 489\,k_2.$$

Ezek szerint a két hullámhossz legkisebb közös többszörösénél, 1956 nm-es útkülönbségnél lesz az első bíborszínű fényfolt az ernyőn, mert annál teljesül, hogy

$$1956\ \text{nm} = 3\cdot 652\ \text{nm} = 4\cdot 489\ \text{nm} = d\sin\alpha.$$

Az első erősítéshez tartozó szögre

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{20\ \text{cm}}{2\ \text{m}} = \frac{1}{10},\qquad \text{vagyis}\qquad \alpha = 5{,}71^\circ.$$

Ebből következik, hogy a rácsállandó

$$d = \frac{1956\ \text{nm}}{\sin\alpha} = \frac{1956\ \text{nm}}{0{,}099} \approx 2{,}0\cdot 10^{-5}\ \text{m}.$$

Stefán Boglárka Abigél (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

23 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (2 pont) 6 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 381. Készítsünk A4-es írólapból (vagy annak egy részéből) ragasztással papírhengert! Gurítsuk le a hengert az asztal tetején elhelyezett, éppen az asztal széléig érő lejtőről!

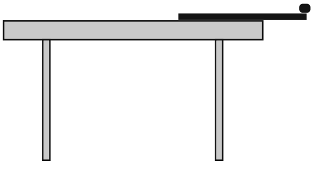
Mérjük meg, milyen messzire érkezik egy csúszásmentesen legördülő papírhenger az asztal szélének függőleges vetületétől! Hogyan függ ez a távolság a papírhenger átmérőjétől? Eredményeinket hasonlítsuk össze egy forgás nélkül lecsúszó és leeső kicsiny test (például egy pénzérme) vízszintes irányú elmozdulásával!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 649. Ha a gőzfürdőben mozgunk (például karjainkkal legyezni kezdünk), akkor a 40–60 °C-os gőzt a szokásosnál sokkal melegebbnek, szinte égetőnek érezzük. Miért?

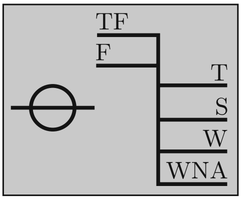
(*3 pont*)

G. 650. Áron azzal szórakozott, hogy a 30 cm hosszú, egyenes vonalzója végére tette a kicsi radírját, és az asztal szélére merőlegesen csúsztatta kifelé a vonalzót. Megmérte, hogy ha 11 cm-nél jobban kitolja, akkor a vonalzó lebillen. Mekkora a vonalzó és a radír tömegének aránya?



(*3 pont*)

G. 651. Az óceánjáró hajók oldalán látható az úgynevezett *Plimsoll-jel.* Ez megmutatja, hogy milyen mélyen merül be a vízbe a hajó a különböző vizekben, ha a megengedett maximális tömegű rakománnyal terhelik.*



A legfelső, TF jelű vonal a trópusi édesvíz (sűrűsége 996 kg/m^3) esetén érvényes bemerülést jelzi, alatta a mérsékelt övi édesvíz (sűrűsége 999 kg/m^3) esetén érvényes, F jelű vonal látható. Egy bizonyos hajón a két vonal távolsága 7 cm. Mekkora a téli tengervíz sűrűsége, ha a W feliratú, a téli tengervízben érvényes vonal a legfelső vonaltól 21 cm-rel lejjebb van?

(*4 pont*)

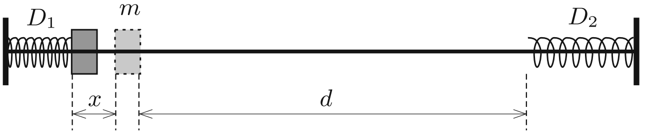
---

*TF = Tropical Fresh Water; F = Fresh Water; T = Tropical Seawater; S = Summer Seawater; W = Winter Seawater; WNA = Winter North Atlantic.

G. 652. Egy test nyugalomból indulva egy egyenes mentén mozog úgy, hogy gyorsulása időben egyenletesen növekszik a kezdeti zérus értékről másodpercenként 2 $\mathrm{m/s^2}$ értékkel. Mekkora a test sebessége az indulást követően 4 másodperc múlva?

(*4 pont*)

P. 5067. Egy súrlódásmentes rúdra felfűzünk két könnyű rugót, amelyek rugóállandója D_1, illetve D_2. A rugók egyik vége rögzített, másik végeik közötti távolság d. A rúdra felfűzött m tömegű, kis méretű testtel együtt az egyik rugót x-szel összenyomjuk, majd a testet elengedjük.

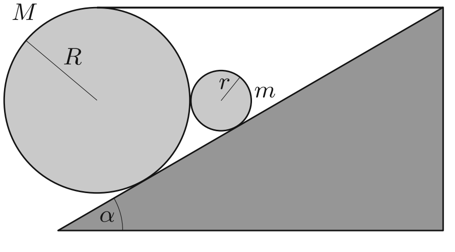


Mennyi idő múlva tér vissza elindulási helyére az m tömegű kis test? Függ-e ez az idő attól, hogy melyik rugóról indítjuk a testet?

(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 5068. Egy kicsiny, pontszerűnek tekinthető, m tömegű üstökös közeledik egy M tömegű, R sugarú, gömb alakú bolygó felé ($m \ll M$). Az üstökös sebessége a bolygótól nagyon messze v_0, és ha nem hatna rá a bolygó gravitációs tere, akkor d távolságra haladna el a bolygó középpontjától ($d > R$). Mekkora v_0 minimális értéke, amelynél az üstökös még nem ütközik a bolygóba? (A bolygón és az üstökösön kívül minden más égitest gravitációs hatását elhanyagolhatjuk.)

(*5 pont*) Közli: *Kovács József,* Szombathely

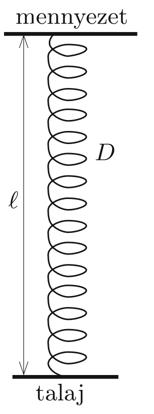


P. 5069. Egy α hajlásszögű lejtőre M tömegű, R sugarú, tömör hengert helyeztünk, amit egy vízszintes kötél köt össze a lejtő tetejével az *ábrán* látható módon. A test mellett található még egy m tömegű, r sugarú tömör henger. A két henger közötti súrlódás elhanyagolható, és az M tömegű henger nem emelkedik meg. Legalább mekkora az R sugarú henger és a lejtő közötti tapadási súrlódási együttható, ha a hengerek nem csúsznak meg a lejtőn?

Adatok: $\alpha = 30^\circ$, $R = 3r$, $M = 3m$.

(*5 pont*) Közli: *Takács Árpád,* Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium

P. 5070. Egy ℓ magasságú barlangban D rugóállandójú, feszítetlen állapotában $d < \ell$ hosszúságú, elhanyagolható tömegű rugó helyezkedik el függőleges helyzetben. A rugó egyik végét a barlang mennyezetéhez, a másik végét pedig a talajhoz rögzítették az *ábrán* látható módon.



A rugó közepére rárepül és a rugóba kapaszkodik egy m tömegű, kis méretű denevér, és a rugó vezérelte bonyolult rezgésbe kezd. (A denevér mozgása során a rugó semelyik darabja nem lazul meg.)

a) Hol fog megállni a denevér a rezgés lecsillapodása után? (A rugó még nagy megnyújtásnál is követi a Hooke-törvényt.)

b) Innen a denevér igen óvatosan visszamászik újra a talajtól mért $\ell/2$ magasságra. Legalább mekkora munkát végez eközben?

(*5 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő

P. 5071. Rugalmas fonálon lógó terhet 0-ról lassan növekvő erővel húzunk lefelé. A fonál F_1 erőnél szakad el. Milyen minimális erő alkalmazásánál szakad el a fonál, ha az erő azonnal felveszi értékét, és utána nem változik?

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

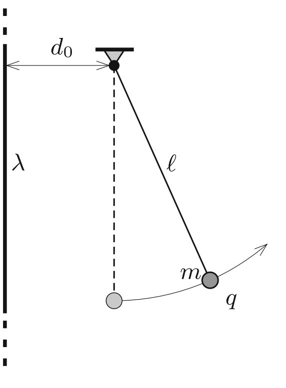
P. 5072. A neonatom átmérője 0,32 nm. Adjunk becslést arra, hogy a neongáz normál állapotában

a) egyetlen atom átmérőjének átlagosan hányszorosa az atomok egymástól mért távolsága;

b) az atomok termikus átlagsebessége hányszorosa a gázban terjedő hang sebességének!

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5073. Függőleges, igen hosszú (végtelennek vehető) egyenes szigetelőszál lineáris töltéssűrűsége $\lambda = 8\cdot 10^{-7}$ C/m. A száltól $d_0 = 5$ cm távolságban igen vékony, $\ell = 10$ cm hosszú szigetelőfonálra felfüggesztünk egy $m = 2$ g tömegű, $q = 7\cdot 10^{-8}$ C töltésű, kis méretű fémgolyót. A fonál függőleges állapotában a rögzítést lökésmentesen megszüntetjük.



a) Milyen messzire távolodik el a fémgolyó a szigetelőszáltól?

b) Mekkora a fonál függőlegessel bezárt szöge, amikor a golyó sebessége maximális? Mekkora ez a maximális sebesség?

c) Mekkora erő hat a felfüggesztésre, amikor leggyorsabban mozog a golyó?

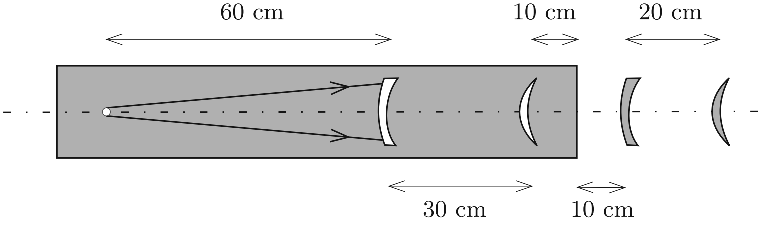
(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5074. Szabályos hatszög minden éle R ellenállású drótból áll. Az egyik csúcsból a nem szomszédos három másikba is mennek vezetékek átlósan, ugyanolyan drótból, mint amilyenből az oldalak állnak. Mekkora az eredő ellenállás ezen csúcs és a szemközti csúcs között?

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

P. 5075. Az *ábra* szerinti elrendezésben közös optikai tengelyen, egymással párhuzamosan négy vékony lencse helyezkedik el. Mindegyik lencse határfelületének görbületi sugara 5 cm, illetve 10 cm. Kettő közülük $n=1{,}5$ törésmutatójú üvegben lévő levegőlencse, kettő pedig ugyanilyen törésmutatójú üveglencse.

Az üvegben, az optikai tengelyen, a domborúan homorú lencsétől 60 cm-re egy pontszerű fényforrás van. A lencse másik oldalán, tőle 30 cm távolságra helyezkedik el a homorúan domború levegőlencse. Ettől 10 cm távolságra van az üveget határoló sík felület, amely merőleges az optikai tengelyre. A sík felülettől 10 cm-re található az üvegből készült domborúan homorú lencse, a negyedik (homorúan domború) lencse pedig a harmadiktól 20 cm-re van.



A négy lencse hová képezi le a pontszerű fényforrást?

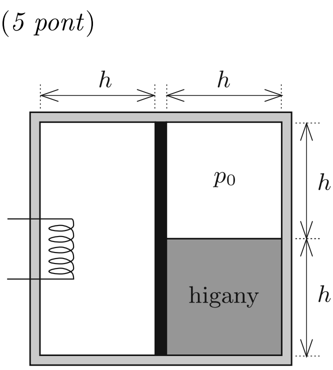
(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5076. Egy optikai rácsot a résekre merőlegesen, de a rács síkjához képest ferdén, 45°-os szögben világítunk meg monokromatikus, λ hullámhosszúságú lézerfénnyel. Határozzuk meg az elhajlási kép intenzitásmaximumainak számát és irányát, ha a rácsállandó

a) $d=\lambda$;

b) $d=5\lambda$.

(*5 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc* (Budapest)



P. 5077. Egy téglatest alakú, hőszigetelő falú tartály közepén jó hővezető anyagból készült dugattyú helyezkedik el. A dugattyútól balra V_0 térfogatú levegő van, a dugattyútól jobbra $V_0/2$ térfogatú, $p_0=76$ Hgcm $\approx 10^5$ Pa nyomású levegő és $h=38$ cm magas higanyoszlop található. A tartály teljes szélessége (a dugattyú vastagságán felül) $2h$, magassága szintén $2h$.

Egy beépített fűtőszállal lassan melegíteni kezdjük a bal oldali térrészt. A gázok hőmérséklete minden pillanatban megegyezik. Legfeljebb mekkora lehet a dugattyú elmozdulása, ha a higany, a tartály és a dugattyú hőtágulásától eltekintünk?

(*6 pont*) Közli: *Berke Martin,*
Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium

Beküldési határidő: 2018. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 68. No. 8. November 2018)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 479): **K. 599.** Write the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 in the circles, so that the sum of the four numbers along any straight line should be the same, and the sum of the numbers at the six points of the star should also be the same number. A few numbers are already entered. Find all possible arrangements. **K. 600.** If one digit of a three-digit number is omitted, a two-digit number will be obtained. By omitting one digit of that two-digit number, a one-digit number will result. What may be the initial three-digit number so that the sum of the three-digit number, the two-digit number and the final one-digit number is 1001? **K. 601.** The sides of a square $PQRS$ inscribed in an acute-angled triangle ABC are 4 cm long, vertices P and Q lie on side AB, vertex R lies on side BC, and vertex S lies on side AC. Given that the length of side AB is 8 cm, what is the area of the triangle? **K. 602.** Andrew and Paul are playing a game. The winner is always awarded x points and the loser always gets y points (where $x > y$ are integers). There is no draw. After a few rounds, we observe that Andrew has 30 points and Paul has 25 points since Paul has only won twice. How many points are awarded to the winner? **K. 603.** I have a two-digit number in mind. Let S denote the sum of the digits, and let P denote their product. What may be my number if it is equal to $P + S$?

New exercises for practice – competition C (see page 480): **Exercises up to grade 10: C. 1504.** A 3×3 table is filled in as shown. If the greatest common divisor of any set of n entries of the table is n, it is allowed to rearrange those entries so that none of them stay in place. With an appropriate succession of such steps, is it possible to achieve that the final arrangement of the numbers is a reflection of the original arrangement in one diagonal? In the other diagonal? **C. 1505.** Consider the circumscribed circles of all the black fields of a chessboard. What fraction of the total area of the 64 fields is covered by these disks altogether? **Exercises for everyone: C. 1506.** Solve the equation $p^q + 1 = q^p$, where p, q denote positive prime numbers. **C. 1507.** The perpendicular bisectors of the legs of an obtuse-angled isosceles triangle divide the base into three equal parts. Find the measures of the angles. **C. 1508.** Determine the value of xy, given that $x + y = 1$ and $x^3 + y^3 = \frac{1}{2}$. **Exercises upwards of grade 11: C. 1509.** A company selling teabags has placed gift vouchers in 10% of the boxes. If 10 boxes are bought, what is the probability of finding more than 1 voucher? **C. 1510.** The base radii of a right circular truncated cone are 8 cm and 5 cm. The slant height is 12 cm. If the truncated cone is laid on its side and rolled, it will trace out a circular ring in the plane. Determine the radii of the inner and outer circles of the ring, and find the number of times the truncated cone rotates about its axis while it rolls around and returns to its starting position.

New exercises – competition B (see page 481): **B. 4982.** The diagonals AC and BD of a convex kite $ABCD$ intersect at point E such that $AE<CE$. The midpoint of diagonal AC is F. The circles ABE and CDE intersect again at M. Show that $\angle EMF=90^\circ$. (*3 points*) **B. 4983.** Find the real solutions of the equation $x^2+2x-3-\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}}=\frac{2}{x^2-2x-3}$. (*4 points*) (Proposed by *L. Laczkó* and *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 4984.** Prove that for any positive integer x, there exists a positive integer y such that x^3+y^3+1 is divisible by the number $x+y+1$. Is there a positive integer x for which there are infinitely many y with this property? (*4 points*) (Proposed by *L. Surányi,* Budapest) **B. 4985.** Given that any three out of four lines determine a triangle, prove that the orthocentres of the four triangles are concurrent. (*5 points*) **B. 4986.** Consider the 64 points of the space for which each of the three coordinates is 1, 2, 3 or 4. Kate and Peter are playing a three-dimensional tic-tac-toe game on this set of points. Kate starts the game by selecting any point and colouring it blue. In the second step, Peter selects a different point and colours it red. Then they take turns by selecting further points and colouring them in blue or red. Whoever first completes a collinear set of four points of their own colour will win the game. Show that it makes no difference for Kate whether she starts by colouring the point $(1,1,2)$ or the point $(2,2,1)$ blue in the first step. (*5 points*) (Proposed by *D. Benkő,* South Alabama) **B. 4987.** The circumcentre of an acute-angled scalene triangle ABC is O, its orthocentre is M, the foot of the altitude drawn from vertex A is D, and the midpoint of side AB is F. The ray drawn from F through M intersects the circumcircle of triangle ABC at G. *a*) Prove that the points A, F, D and G are concyclic. *b*) Let K denote the circle in *a*), and let E be the midpoint of line segment CM. Prove that $EK=OK$. (*5 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 4988.** In an $(m+2)\times(n+2)$ table, we cut out the four 1×1 "corners". Arbitrary real numbers are written in each field of the first and last rows, and in the first and last columns of the truncated table obtained in this way. Prove that it is possible to fill in the remaining $m\times n$ "interior" of the table in a unique way with real numbers such that every number is the arithmetic mean of the four adjacent numbers. (*6 points*) (Competition problem from Iran) **B. 4989.** The midpoints of sides BC, CA and AB of a triangle ABC are D, E and F, respectively. Let S denote the centroid of the triangle. Assume that the perimeters of triangles AFS, BDS are CES equal. Show that triangle ABC is equilateral. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 482): **A. 734.** For an arbitrary positive integer m, not divisible by 3, consider the permutation $x\mapsto 3x \pmod{m}$ on the set $\{1,2,\ldots,m-1\}$. This permutation can be decomposed into disjoint cycles; for instance, for $m=10$ the cycles are $(1\mapsto3\mapsto9\mapsto7\mapsto1)$, $(2\mapsto6\mapsto8\mapsto4\mapsto2)$ and $(5\mapsto5)$. For which integers m is the number of cycles odd? **A. 735.** For any function $f\colon[0,1]\to[0,1]$, denote by $P_n(f)$ the number of fixed points of the function $\underbrace{f\big(\ldots f}_{n}(x)\ldots\big)$, i.e., the number of points $x\in[0,1]$ satisfying $\underbrace{f\big(\ldots f}_{n}(x)\ldots\big)=x$. Construct a piecewise linear, continuous, surjective function $f\colon[0,1]\to[0,1]$ such that for a suitable number $2<A<3$, the sequence $\frac{P_n(f)}{A^n}$ converges. (Based on the *8th problem of the Miklós Schweitzer competition,* 2018) **A. 736.** Let P be a point in the plane of triangle ABC. Denote the reflections of A, B, C about P by A', B' and C', respectively. Let A'', B'', C'' be the reflections of A', B', C' over the lines BC, CA and AB, respectively. Let the line $A''B''$ intersect AC at

A_b and let $A''C''$ intersect AB at a point A_c. Denote by ω_A the circle through the points A, A_b, A_c. The circles ω_B, ω_C are defined similarly. Prove that ω_A, ω_B, ω_C are coaxial, i.e., they share a common radical axis. (Proposed by *Navneel Singhal,* Delhi and *K. V. Sudharshan,* Chennai, India)

Problems in Physics

(see page 505)

M. 381. Make a cylinder from a sheet of A4-size paper (or some part of it) by gluing it. Roll it down from the top of an inclined plane, which is on a table such that its lower end is just at the rim of the table. Measure how far from the vertical projection of the rim of the table on the floor the cylinder reaches the floor. (The cylinder should roll without sliding.) How does this distance depend on the diameter of the cylinder? Compare your results with the horizontal displacement of a small object (e.g. a coin) which slides without rolling along the slope and falls from the end of the slope.

G. 649. If we move in a steam bath (for example we begin to fan ourselves with the arms), then we feel the 40–60 °C vapour much hotter, and it may feel like our skin is burning. Why? **G. 650.** Aaron played with his ruler and rubber. He put the small rubber to one end of the 30-cm long ruler and slowly slid the ruler along the tabletop, perpendicular to the rim of the table, such that the end of the ruler was sticking out from the table. He measured that when the ruler is sticking out more than 11 cm it falls down. What is the ratio of the masses of the ruler and the rubber? **G. 651.** On the hull of ocean liners there is a mark called the *Plimsoll line.* This shows the legal limit to which the ship may be loaded, indicating the maximum draft of the ship in specific water types and temperatures.* The topmost TF line marks the draft of the hull when the liner is in tropical fresh water (its density is 996 kg/m^3), whilst the F line below marks the maximum draft in case of fresh water in temperate zone (its density is 999 kg/m^3). On a specific ocean liner the distance between these two lines is 7 cm. What is the density of winter seawater if its mark on the hull of this liner is 21 cm below the topmost line? **G. 652.** An object starts from rest and moves along a straight line such that its acceleration increases uniformly in time, from the value of zero it increases by 2 m/s^2 in each second. What is the speed of the object 4 s after it started to move?

P. 5067. Two light springs, whose spring constants are D_1 and D_2 are put onto a frictionless rod. One end of each spring is fixed and the distance between their other ends is d. There is also a small object of mass m on the rod, and with this small object one of the springs is compressed by x, and then the object is released. How much time elapses until the object of mass m reaches its initial position? Does this time depend on the spring it was started from? **P. 5068.** A small comet of mass m, which can be considered point-like, approaches a spherical planet of mass M, and of radius R ($m \ll M$). The speed of the comet very far from the planet is v_0, and if the gravitational field of the planet did not exert any force on the comet, it would pass the planet at a distance of d from the centre of the planet ($d > R$). What is the minimum value of v_0, at which the comet does not hit the planet? (Apart from the planet and the comet, the gravitational fields of any other celestial objects can be neglected.) **P. 5069.** A solid cylinder of mass M and of radius R was placed onto a slope of angle of inclination of α. The cylinder is attached to the top end of the inclined plane by means of a horizontal thread as shown in the *figure.* Next to the object there is another cylinder of mass m and of radius r. Friction between the two cylinders is negligible, and the cylinder of mass M is not rising. What is the least value of the coefficient of static friction between the slope and the cylinder of radius R if the

*TF = Tropical Fresh Water; F = Fresh Water; T = Tropical Seawater; S = Summer Seawater; W = Winter Seawater; WNA = Winter North Atlantic.

cylinders do not slide on the slope? *Data:* $\alpha = 30^\circ$, $R = 3r$, $M = 3m$. **P. 5070.** There is a spring of spring constant D and of un-stretched length d in a cave of height ℓ. The spring is vertical, its mass is negligible and $d < \ell$. One end of the spring is attached to the ceiling and the other is attached to the ground of the cave as shown in the *figure.* A small bat of mass m flies to the midpoint of the spring, clings to the spring, and executes a complicated oscillatory motion driven by the spring. (Not any part of the spring gets loose during the motion of the bat.) *a*) Where will the bat be when the oscillation is ceased? (The spring obeys Hooke's law even in the case of very big extensions.) *b*) From this point the bat carefully climbs up to its original height of $\ell/2$ measured from the ground. What is the least amount of work performed by the bat during its climb? **P. 5071.** A load hanging on an elastic thread is pulled downwards by a force which is increased slowly from 0. The thread breaks at a force of F_1. What is the least value of the force at which the thread breaks, if the force immediately takes that value, and does not change after it? **P. 5072.** The diameter of a neon atom is 0.32 nm. Estimate that when the temperature of the neon gas is 0 °C and its pressure is 1 atm *a*) by what factor of the average distance between the atoms of the gas is greater than the diameter of a single neon atom? *b*) by what factor of the average thermal speed of the atoms is greater than the speed of sound in the gas? **P. 5073.** The linear charge density of a vertical very long ("infinitely" long) straight insulating thread is $\lambda = 8 \cdot 10^{-7}$ C/m. A small metal ball of mass $m = 2$ g and of charge $q = 7 \cdot 10^{-8}$ C, is hung by a very thin insulating filament of length $\ell = 10$ cm, at a distance of $d_0 = 5$ cm from the thread. Without any push the ball is released when the filament is vertical. *a*) How far will the metal ball move from the thread? *b*) What is the angle between the vertical and the filament when the ball moves at its maximum speed? What is this maximum speed? *c*) What force is exerted on the support when the ball is moving at its greatest speed? **P. 5074.** Each side of a regular hexagon consists of a piece of wire of resistance R. From one of the vertices of the hexagon there are wires leading diagonally to the other three not adjacent vertices of the hexagon. These wires are made of the same type of material as the wires of the sides. What is the equivalent resistance between this vertex and the opposite one? **P. 5075.** Parallel to each other there are four thin lenses along the same optical axis, as shown in the *figure.* The radii of the curvatures of each lens are 5 cm, and 10 cm. Two of the lenses are air lenses which are in glass of refractive index of $n = 1.5$, and the other two lenses are made of glass of the same refractive index. In the glass there is a point-like light source on the optical axis at a distance of 60 cm from the convex meniscus lens. On the other side of this lens at a distance of 30 cm there is the concave meniscus air lens. The boundary of the glass is at a distance of 10 cm from this concave meniscus air lens. From the boundary of glass at a distance of 10 cm there is the convex meniscus glass lens and the fourth (concave meniscus) glass lens is at a distance of 20 cm from the third one. Where is the image of the light source created by the four lenses? **P. 5076.** A monochromatic laser beam of wavelength λ is incident on a diffraction grating. The beam is perpendicular to the slits of the grating, and encloses an angle of 45° with the plane of the diffraction grating. Determine the number and the direction of the maxima of the diffraction pattern, if the grating spacing is *a*) $d = \lambda$; *b*) $d = 5\lambda$. **P. 5077.** There is a piston having good thermal conductivity in the middle of a cuboid-shaped container having thermally insulating walls. On the left side of the piston there is a sample of air of volume V_0, whilst on the right side there is a sample of air of volume $V_0/2$ at a pressure of $p_0 = 76$ Hgcm $\approx 10^5$ Pa, and a mercury column of height $h = 38$ cm. The total width of the container is $2h$ (not considering the width of the piston), and its height is also $2h$. By means of a built-in electric heater the left side of the system is slowly heated. The temperatures of the two samples of gases are the same at any time. At most what can the displacement of the piston be, if the expansion of the container, the piston and the mercury is neglected?