A Vénusz csak akkor látható, ha a Nap nincs a „közelében” az égbolton, tehát kora reggel vagy este (nem sokkal a naplemente után). Ha figyelembe vesszük a Föld tengely körüli forgásának irányát is, láthatjuk, hogy a P pontban álló ember *reggel* a jobb oldali ábrának megfelelő (*ii*) helyzetben figyelheti meg a Vénuszt; tehát olyankor, amikor a Nap „mögött” fog elhaladni.

Bekes Barnabás (Budapest, Városmajori Gimn. és Kós K. Ált. Isk. 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 72 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 28, hibás 20 dolgozat.

G. 632. *Egy* 900 km/h *sebességgel haladó repülőgép másodpercenként* 4 *liter üzemanyagot (kerozint) használ fel. Mekkora utat tesz meg percenként az az autó, amelyik* 100 *kilométerenként* 6,4 *liter benzint fogyaszt, és* 5 *óra alatt annyi benzinre van szüksége, amennyi kerozint kilométerenként fogyaszt a repülőgép?*

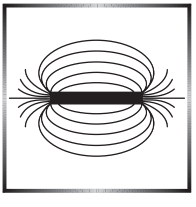
(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

Megoldás. A repülőgép, amelynek sebessége 900 km/h = 250 m/s, 1 másodperc alatt 4 liter kerozint használ fel, és ennyi idő alatt 250 métert tesz meg. Ezek szerint 1 kilométer megtételéhez 16 liter üzemanyagra van szüksége.

Az autó 100 kilométert tesz meg 6,4 liter benzin felhasználásával, és mivel 16 liter üzemanyagot fogyaszt 5 óra alatt, 2 óra alatt 6,4 liter benzint használ el. Tehát a sebessége 50 km/h, így percenként 0,833 kilométert tesz meg az autó.

Csanádi Réka (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.)

74 dolgozat érkezett. Helyes 70 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 2 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 4993. *A Calais-t Doverrel összekötő „Csalagút” hossza* 55 km, *ennek mintegy* 38 km-*es szakasza halad a La Manche csatorna alatt. Képzeljünk el a* 6371 km *sugarú, tökéletesen gömb alakú Földön egy* 40 km *hosszú, nyílegyenes vasúti alagutat a tenger szintje alatt, amelynek tenger alatti eleje és vége felett* 20 méter *magasan áll a víz.*

a) Milyen magasan áll a víz ennek az alagútnak a közepe felett?

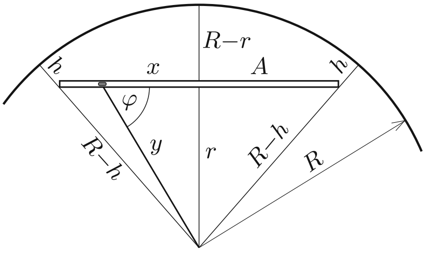
b) Ha ebben a vasúti alagútban nem lenne levegő, és eltekinthetnénk a súrlódástól is, mennyi idő alatt haladna át rajta az alagút egyik végéről nyugalmi helyzetből induló vagon csupán a Föld gravitációs vonzóerejének hatására?

c) Mekkora sebességgel száguldana át ez a vagon az alagút közepén?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. *a*) Az alagút két vége a felszín alatt $h=0{,}02$ km mélyen van, így távolsága a Föld középpontjától

$$R-h=6370{,}98 \text{ km}.$$



A Pitagorasz-tételből kiszámolható, hogy az alagút közepe a Föld középpontjától

$$r=\sqrt{6370,98^2-20^2} \text{ km} = 6370{,}949 \text{ km}$$

távolságra van, így

$$R-r = 6371{,}000 \text{ km} - 6370{,}949 \text{ km} = 0{,}051 \text{ km} = 51 \text{ m}$$

magasan áll az alagút közepe felett a víz (lásd a nem méretarányos *ábrát*).

b) A vagon és a Föld tömegközpontjának távolsága folyamatosan változik, ezért a vagonra ható gravitációs erő is folyamatosan változik. Amikor a vagon y távolságra van a Föld középpontjától, akkor a tömegvonzás szempontjából csak az M tömegű Földnek az y sugarú gömbön belüli, m^* tömegű része jön számításba, ahol

$$m^* = M\frac{\frac{4}{3}y^3\pi}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{y^3}{R^3}M.$$

Az m tömegű vagonra ható gravitációs erő:

$$F_{\text{grav}} = \gamma\frac{mm^*}{y^2} = \gamma\frac{mM}{R^3}\,y,$$

amelynek a pálya irányába eső, a pálya középpontja felé mutató komponense:

$$F = -F_{\text{grav}}\cdot\cos\varphi = -F_{\text{grav}}\,\frac{x}{y} = -\gamma\frac{mM}{R^3}\,x.$$

A képletben x a vagon és a pálya középpontjának távolságát jelöli. Láthatjuk, hogy a testre ható erő arányos a kitéréssel és azzal ellentétes irányú, ezért a test harmonikus rezgőmozgást végez, éppen úgy, mint egy

$$D=\gamma\frac{mM}{R^3}$$

rugóállandójú rugó által kifejtett erő hatására tenné. Jelen esetben a vagon egy félperiódusnyit mozog, tehát a menetideje:

$$t=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=\pi\sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}}=2531 \text{ s}\approx 42 \text{ perc}.$$

Megjegyzés. Felhasználva, hogy a nehézségi gyorsulás a Föld felszínén $g=\gamma M/R^2$, a vagon mozgásának ideje a $t=\pi\sqrt{R/g}$ összefüggésből is kiszámítható.

c) A vagon harmonikus rezgőmozgást végez $A = 20$ km-es amplitúdóval, ezért az alagút közepén lesz a legnagyobb a sebessége:

$$v_{\max} = A\frac{2\pi}{T} = 24{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 89{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Debreczeni Tibor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)

69 dolgozat érkezett. Helyes 28 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 10, hiányos (1–3 pont) 28, hibás 3 dolgozat.

P. 5006. *Egy* 200 g *tömegű strandlabdát függőlegesen lefelé erősen a talajra dobunk. A labda a legjobban benyomott állapotában egy* 10 cm *átmérőjű körlap mentén érintkezik a talajjal, és ekkor a labdában lévő levegő nyomása* 110 kPa *lesz.*

a) *Mekkora a labda tömegközéppontjának legnagyobb gyorsulása, ha a talaj száraz és egy kicsit göröngyös?*

b) *Más értéket kapnánk-e a gyorsulásra, ha a talaj sima és nedves volna, és emiatt a labda talajjal érintkező része alatt nem maradna levegő?*

(*A külső légnyomás* 100 kPa.)

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter*, Vácduka

I. megoldás. *a*) A labda legjobban benyomódott állapotában

$$A = (5\ \mathrm{cm})^2\pi = 7{,}85\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$$

területű körlap mentén érintkezik a talajjal. Legyen a labda teljes tömege m, a talajjal érintkező részének tömege m^*. A külső légnyomást jelöljük p_0-lal, a labdában lévő levegő legnagyobb nyomását pedig p_1-gyel (*1. ábra*).

a) A labda benyomódott részére felülről p_1A erő hat, alulról pedig (amennyiben a labda alatt levegő marad) $p_0A + K_1$ erő nyomja felfelé. K_1 a göröngyös talaj által kifejtett kényszererőt jelöli. A labda többi része „simán", vízszintesen csatlakozik a körlap alakú részhez, így nem fejthet ki arra eredő függőleges erőt.

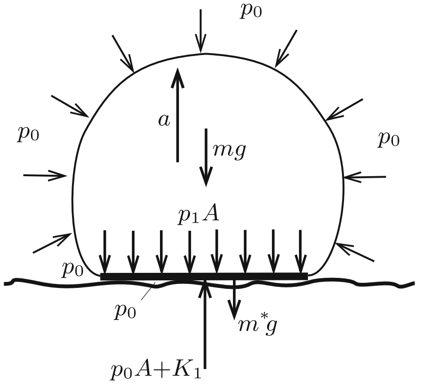
A körlap az ütközés ideje alatt nem gyorsul, hiszen az bizonyos ideig folyamatosan a talajjal érintkezik, így a mozgásegyenlete:

$$m^*g + p_1A = p_0A + K_1, \quad \text{vagyis} \quad K_1 = (p_1 - p_0)A + m^*g.$$

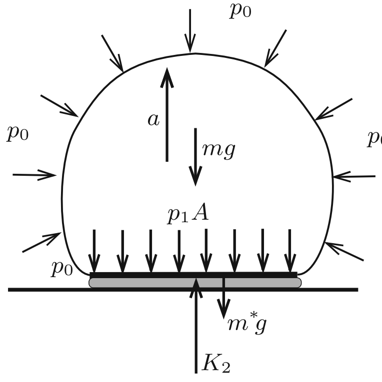
Megjegyzés: Mivel a nyomáskülönbségből származó első tag kb. 78 N, a körlapra ható nehézségi erő pedig biztosan kisebb, mint $mg = 2$ N, jó közelítéssel igaz, hogy

$$K_1 \approx (p_1 - p_0)A.$$

Vizsgáljuk most meg a labda többi részére ható *külső* erőket! A légnyomás által kifejtett erő p_0A nagyságú, és függőlegesen lefelé mutat, hiszen a légnyomásból származó erők eredője a teljes labdára nulla, és a talajjal érintkező körlapra a külső



1. ábra



2. ábra

levegő p_0A nagyságú, függőlegesen felfelé mutató erőt fejt ki. A labda egészére felírható mozgásegyenlet (a függőlegesen felfelé mutató irányt tekintve pozitívnak):

$$K_1 + p_0A - mg - p_0A = ma,$$

ahonnan K_1 korábban kiszámított értékének behelyettesítése után a tömegközéppont gyorsulása:

$$a = \frac{(p_1 - p_0)A}{m} - \frac{m - m^*}{m} g \approx \frac{(p_1 - p_0)A}{m} - g \approx 380\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) Ha a talaj felülete sima és nedves, akkor a labda alatt nem marad levegő, tehát a légnyomásból származó p_0A erő most nem lép fel. Helyette viszont a vízréteg és a talaj fejt ki a labda aljára valamekkora erőt. (A talajon lévő víz a labdán kívül is jelen van, és ott érintkezik a külső levegővel, így a nyomása gyakorlatilag p_0. Ha viszont a labda ténylegesen lezárja az alája szorult vizet, akkor a víz nyomása akár p_1 is lehet.)

A talajjal érintkező labdadarab nem gyorsul, így a mozgásegyenlete:

$$m^*g + p_1A = K_2,$$

ahol K_2 a talaj és a vízhártya által kifejtett eredő erő (*2. ábra*). Az ábrán – az egyszerűség kedvéért – nem jelöltük, hogy a labda alja milyen mértékben érintkezik közvetlenül a talajjal, illetve a vízzel. A labda egészének mozgásegyenlete:

$$K_2 - mg - p_0A = ma,$$

vagyis a tömegközéppont gyorsulása:

$$a = \frac{(p_1 - p_0)A}{m} - \frac{m - m^*}{m} g \approx 380\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ez az érték ugyanakkora, mint az *a*) esetben volt a tömegközéppont gyorsulása.

Több megoldás alapján

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit! A labda lendülete a legjobban benyomódott állapotban és az azt megelőző, illetve követő pillanatokban így írható fel:

$$I^{\text{teljes}}(t) = I^{\text{felső}}(t) + I^{\text{alsó}}(t) \equiv I^{\text{felső}}(t),$$

hiszen az alsó rész az ütközés alatt folyamatosan nyugalomban van, tehát ezalatt a lendülete nulla. (Az „alsó" kifejezés a labdának a talajjal érintkező részére, a „felső" pedig a többi részre utal.)

Newton II. törvényét ilyen alakban is felírhatjuk:

$$ma = \frac{\Delta I^{\text{teljes}}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta I^{\text{felső}}(t)}{\Delta t} = F^{\text{felső}},$$

ahol

$$F^{\text{felső}} = p_1 A - p_0 A - (m - m^*)g$$

a *felső* részre ható erők (a külső és a belső légnyomásból származó erők és a nehézségi erő) eredője. Az eredő erő képletében szereplő első két tag nagyságát onnan kaphatjuk meg, hogy tudjuk: egy teljes, zárt felületre ható, a légnyomásból származó erők eredője *nulla.* A fenti összefüggés felírásánál kihasználtuk, hogy a hajlékony anyagú labda alsó része nem fejthet ki függőleges irányú erőt a felső részre, mert a két rész vízszintes érintősíkkal, „törésmentesen" csatlakozik egymáshoz.

A fenti egyenletekből a tömegközéppont gyorsulására

$$a = \frac{(p_1 - p_0)A}{m} - \frac{m - m^*}{m} g \approx 380\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

adódik. Ez az eredmény független attól, hogy a labda alsó része és a talaj között milyen a kapcsolat, vagyis hogy a talaj száraz-e vagy nedves, sima-e vagy pedig göröngyös.

(G. P.)

26 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bartók Imre, Csire Roland, Csuha Boglárka, Elek Péter, Fajszi Bulcsú, Fekete Balázs Attila, Kolontári Péter, Marozsák Tóbiás, Olosz Adél és Póta Balázs megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 13, hibás 2 dolgozat.

P. 5033. *Kozmikus porból és gázokból álló, M tömegű csillagközi köd perdülete N. A belső gravitációs hatások következtében a köd teljes anyaga két kis méretű gömbbe tömörül, és így kettőscsillag alakul ki.*

a) Mekkora a kettőscsillag tömegközéppont körüli $T_{csillag}$ keringési ideje, ha a csillagok körpályán mozognak, és a tömegük m_1, illetve m_2? ($m_1 + m_2 = M$ *és* $m_1 \leqslant m_2$.)

b) Mekkora lehet a két csillag távolsága?

c) Ha a kialakuló kettőscsillag távolsága nem pontosan állandó, hanem kis amplitúdóval ingadozik, mekkora ennek az ingadozásnak a periódusideje?

(*6 pont*) Közli: *Mihail Sandu,* Călimăneşti, Románia

Megoldás. *a*) A kettőscsillag kialakulása során, mivel a rendszerre külső erő nem hat, és anyag sem távozik belőle, annak tömegközéppontja mindvégig nyugalomban van az alkalmasan választott koordináta-rendszer origójában, továbbá a rendszernek a tömegközéppontra vonatkoztatott perdülete (N) is időben állandó.

Legyen a két csillag távolsága r, a tömegközépponttól mért távolságuk pedig r_1 és r_2. Jelölje továbbá $\omega = 2\pi/T_{\text{csillag}}$ a csillagrendszer keringésének szögsebességét. Ekkor fennállnak az

$$r_1 = r\frac{m_2}{M}, \qquad r_2 = r\frac{m_1}{M}, \tag{1}$$

$$N = r_1 m_1 (r_1\omega) + r_2 m_2 (r_2\omega) = \frac{m_1 m_2}{M} r^2 \omega \tag{2}$$

összefüggések.

A csillagok a tömegközéppont körüli körpályán keringenek. Az egyik (például az m_1 tömegű) csillag mozgásegyenlete:

$$\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 r_1 \omega^2 = \frac{m_1 m_2}{M} r\omega^2, \qquad \text{azaz} \qquad \gamma M = r^3\omega^2. \tag{3}$$

(Ugyanerre az összefüggésre vezet a másik csillag mozgásegyenlete is.)

A (2) és (3) egyenletekből r kiküszöbölésével a szögsebesség

$$\omega = \frac{\gamma^2 (m_1 m_2)^3}{M N^3} \leqslant \frac{\gamma^2 M^5}{64\, N^3}. \tag{4}$$

Az utolsó lépésnél felhasználtuk a számtani-mértani középre vonatkozó

$$\sqrt{m_1 m_2} \leqslant \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{M}{2}$$

egyenlőtlenséget.

A kettőscsillag-rendszer keringési ideje tehát

$$T_{\text{csillag}} = 2\pi \frac{M N^3}{\gamma^2 (m_1 m_2)^3} \geqslant 128\pi \frac{N^3}{\gamma^2 M^5}.$$

Látható, hogy a két csillag keringési ideje nem lehet egy bizonyos értéknél kisebb. A leggyorsabb keringés a szimmetrikus tömegeloszlásnak, az $m_1 = m_2 = M/2$ esetnek felel meg.

b) A (2) és (3) összefüggésekből az ω szögsebességet kiküszöbölve a csillagok távolságára

$$r = \frac{N^2 M}{\gamma (m_1 m_2)^2} \geqslant 16 \frac{N^2}{\gamma M^3} \tag{5}$$

adódik. (Ismét felhasználtuk a számtani-mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget.)

A két csillag távolsága sem sem lehet egy bizonyos értéknél kisebb. A legkisebb csillagtávolság a szimmetrikus tömegeloszláshoz tartozik.

c) Írjuk fel az m_1 tömegű csillag sugár irányú (radiális) mozgásegyenletét, amikor a tömegközépponttól mért távolsága r_1, az r_1-nek megfelelő „gyorsulás" a_1, a szögsebessége pedig ω:

$$m_1 a_1 - m_1 r_1 \omega^2 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{6}$$

Itt most r_1, r és ω időben változó mennyiségek.

Megjegyzés. (6) bal oldalának második tagja azt fejezi ki, hogy a polárkoordinátarendszerben a sugár irányú gyorsulás nem egyszerűen $a(t)$, ami az $r(t)$ távolság változási sebességének „változási üteme" (második deriváltja), hanem $a_1(t) - r_1\omega^2$. A $-(m_1 r_1 \omega^2)$-es kifejezést (6) jobb oldalára rendezve az a tag úgy is értelmezhető, mint az ω szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben fellépő „centrifugális erő".

Felhasználva az (1) és (2) összefüggéseket (6) tovább alakítható:

$$\frac{m_1 m_2}{M} a(t) - \frac{m_1 m_2}{M}\left(\frac{MN}{m_1 m_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r(t)^3} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r(t)^2}, \tag{6'}$$

ahol $a(r)$ az $r(t)$ távolságnak megfelelő „gyorsulás". Mivel $r(t)$ csak kis amplitúdóval ingadozik az (5)-nek megfelelő egyensúlyi

$$r_0 = \frac{N^2 M}{\gamma (m_1 m_2)^2}$$

érték körül, kereshetjük a megoldást $r(t) = r_0 + x(t)$ alakban, ahol $x(t) \ll r_0$. Behelyettesítve ezt az alakot (6′)-be és x/r_0 elsőnél magasabb hatványait elhanyagolva, vagyis csak elsőrendben számolva a körpálya körüli ingadozásokat, a (6′) mozgásegyenlet így alakul:

$$a(t) = -\left[\frac{\gamma^2 (m_1 m_2)^3}{MN^3}\right]^2 \cdot x(t). \tag{7}$$

A fenti egyenlet származtatásánál kihasználtuk, hogy első (lineáris) közelítésben

$$\frac{1}{r(t)^2} \approx \frac{1}{r_0^2}\left(1 - 2\,\frac{x(t)}{r_0}\right) \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{r(t)^3} \approx \frac{1}{r_0^3}\left(1 - 3\,\frac{x(t)}{r_0}\right).$$

A (7) egyenlet (amelyben $a(t)$ nemcsak $r(t)$ „gyorsulása", hanem az attól csak egy r_0 konstanssal különböző $x(t)$ gyorsulása is) a harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete, és a szögletes zárójelben álló kifejezés a rezgés körfrekvenciájának négyzete. Ezek szerint

$$\omega_{\text{ingadozás}} = \frac{\gamma^2 (m_1 m_2)^3}{MN^3},$$

ami (4) szerint éppen a csillagok keringési szögsebességével egyezik meg. Ezek szerint

$$T_{\text{ingadozás}} = T_{\text{csillag}} = 2\pi \frac{MN^3}{\gamma^2 (m_1 m_2)^3}.$$

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 12. évf.)

18 dolgozat érkezett. Helyes Fajszi Bulcsú, Marozsák Tóbiás és Tordai Tegze megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 7, hiányos (1–4 pont) 8 dolgozat.

P. 5036. *A Nap körül keringő egyik üstökös legkisebb távolsága a Naptól* 0,5 CSE, *a legnagyobb pedig* 31,5 CSE.

a) Mekkora az üstökös keringési ideje?

b) Mekkora területet súrol az üstököst a (nyugvónak tekinthető) Nappal összekötő szakasz egy év alatt?

(*4 pont*) *Csillagászati versenyfeladat alapján*

Megoldás. *a*) Az üstökös pályájának fél nagytengelye

$$a = \frac{31{,}5 + 0{,}5}{2} \text{ CSE} = 16 \text{ CSE}.$$

A földpálya fél nagytengelyének hossza 1 CSE, és a Föld keringési ideje 1 év. Kepler III. törvénye szerint a keringési idők négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a pályák fél nagytengelyeinek köbei:

$$\frac{a^3_{\text{üstökös}}}{a^3_{\text{Föld}}} = 16^3 = \frac{T^2_{\text{üstökös}}}{T^2_{\text{Föld}}} = \left(\frac{T_{\text{üstökös}}}{1 \text{ év}}\right)^2,$$

innen $T_{\text{üstökös}} = \sqrt{16^3}$ év $= 64$ év.

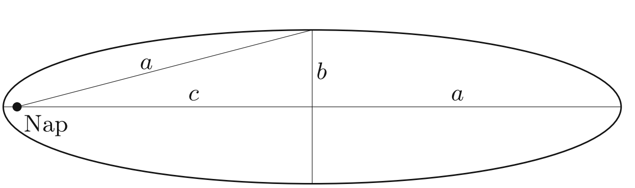
b) Kepler II. törvénye szerint a vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{állandó}.$$

Mivel 64 év a keringési idő, egy év alatt az ellipszis $A_0 = ab\pi$ területének $\frac{1}{64}$ részét súrolja az üstököst a Nappal összekötő szakasz (b az ellipszis fél kistengelye).

A Nap és az ellipszispálya középpontja $c = 16$ CSE $- 0{,}5$ CSE $= 15{,}5$ CSE távolságra van egymástól. A fél kistengely hossza Pitagorasz tételéből számítható (lásd az *ábrát*):

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16^2 - 15{,}5^2} \text{ CSE} = 3{,}97 \text{ CSE}.$$



Így az ellipszispálya területe $A_0 = (16\ \mathrm{CSE}) \cdot (3{,}97\ \mathrm{CSE}) \cdot \pi = 199{,}5\ \mathrm{CSE}^2$, a vezérsugár tehát évente

$$\frac{A_0}{64} \approx 3{,}12\ \mathrm{CSE}^2 \approx 7 \cdot 10^{22}\ \mathrm{m}^2$$

területet súrol.

Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)

41 dolgozat érkezett. Helyes 24 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 10, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 380. Mérjük meg egy főtt tojás tehetetlenségi nyomatékát a szimmetriatengelyére vonatkozólag!

(*6 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

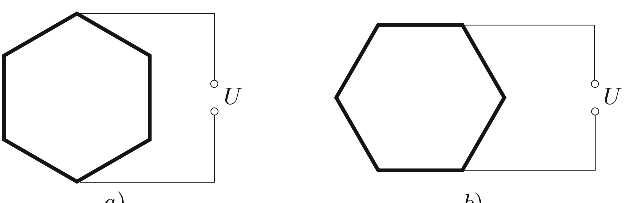
G. 645. A NASA vákuumkamrájában filmre vették, ahogyan a kalapács és a madártoll is egyformán, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s}^2$ gyorsulással esik a föld felé, egyszerre indítva őket egyszerre érnek talajt. Ha a filmet kétszeres sebességgel vetítik, mekkora lesz az így lejátszott moziban a kalapács és a toll gyorsulása?

(*3 pont*)

G. 646. Egy kémiaszertárban egyforma üvegekben tárolják a vegyszereket. Az egyik üveg tele van glicerinnel, a másik éterrel. A glicerines üveg tömege 2290 gramm, az éteresé 1471 gramm. Mekkora az üres üveg tömege?

(*3 pont*)

G. 647. Két – látszólag egyforma – vízforraló kancsóban szabályos hatszögben meghajlított fűtőszálat találunk. Az egyik kancsóban az *a*) *ábra,* a másikban a *b*) *ábra* szerint kötötték be a fűtőszálat. Melyik kancsóban forr fel hamarabb a víz?



a) *b*)

(*3 pont*)