Mivel a találkozók kimenetelei egymástól függetleneknek tekinthetők, ezért a valószínűség:

$$P(\text{első három döntetlen, 4.-et megnyerik}) = 0{,}1388^3 \cdot 0{,}4306 \approx 0{,}001\,15.$$

Tehát a keresett valószínűség kb. 0,0012.

d) A legjobb pontszerző a 9 meccsből nyerjen x-et, döntetlent érjen el y partiban és $9-x-y$ partit veszítsen el. Ekkor az átlag:

$$\frac{x\cdot 1 + y\cdot \frac{1}{2} + (9-x-y)\cdot 0}{9} = \frac{2}{3},$$

innen $x + \frac{y}{2} = 6$ adódik.

A szórásnégyzet:

$$\frac{x\cdot 1^2 + y\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (9-x-y)\cdot 0^2}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

innen $x + \frac{y}{4} = \frac{11}{2}$ adódik.

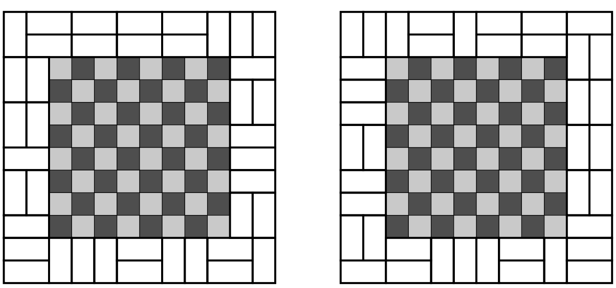
A két kapott egyenletből álló egyenletrendszert megoldva $x=5$, $y=2$, $9-x-y=2$ adódik. Tehát a legjobb pontszerző 5 partit nyert, 2-t elvesztett és 2-ben döntetlent ért el.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.

Fridrik Richárd
Szeged

Matematika feladatok megoldása

B. 4920. *Hányféleképpen lehet* 1×2*-es dominókkal átfedés és hézag nélkül lefedni a* 8×8*-as sakktábla körül felvett 2 egység szélességű szegélyt? (Az* ábrán *látható két lefedést különbözőnek tekintjük.)*

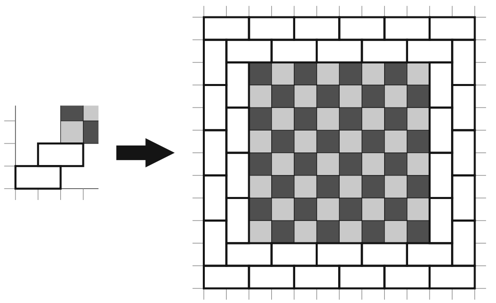


(*6 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

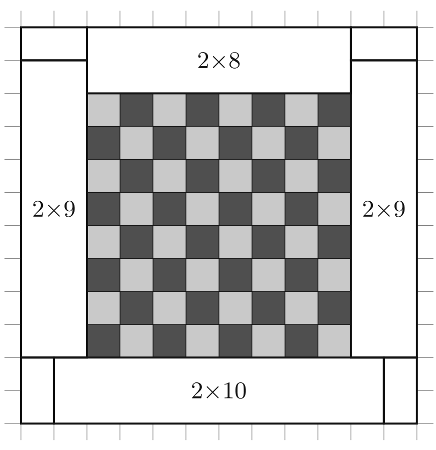
Megoldás. Először teljes indukcióval azt igazoljuk, hogy egy $2 \times n$-es téglalapot 1×2-es dominókkal F_{n+1}-féleképpen lehet lefedni, ahol F_{n+1} a Fibonacci-sorozat $(n+1)$-edik tagját jelöli $(F_1 = 1, F_2 = 1)$.

A 2×1-es téglalap egyféleképpen fedhető le $(F_2 = 1)$, a 2×2-es pedig kétféleképpen (2 vízszintes, vagy 2 függőleges, $F_3 = 2$). Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $2 \times k$ méretű téglalapra, ahol $k < n$. Tekintsük egy $2 \times n$-es téglalap lehetséges lefedéseit és bontsuk ezeket két csoportra attól függően, hogy a bal alsó sarkuk milyen állású dominóval van lefedve. (Mivel sarokban van, csak kétféleképpen lehet.) Ha függőleges ez a dominó, akkor a megmaradó rész $2 \times (n-1)$-es, amit az indukciós feltevés miatt F_n-féleképpen lehet lefedni. Ha vízszintes, akkor a bal felső sarkot már csak egyféleképpen tudjuk lefedni, egy vízszintes dominóval. Ha ezt a 2 dominót letesszük, a megmaradó rész $2 \times (n-2)$-es, amit F_{n-1}-féleképpen lehet lefedni. Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, tehát egy $2 \times n$-eset $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$-féleképen lehet lefedni.

Most térjünk át a feladatra. Ha lefedjük egy sarkát, és melléteszünk egy vele párhuzamosat 1-gyel elcsúsztatva (lásd *1. ábra*), akkor a lefedést már csak egyféleképpen fejezhetjük be, mert mindig lesz egy nem lefedett mező, amit az addig lerakottak miatt csak egyféleképpen lehet lefedni (pl: a legalsó sor 3. négyzete).



1. ábra



2. ábra

Ilyen lefedésből összesen 2 van, mivel a sarkot, ahol kezdtük az eljárást függőleges és vízszintes dominóval is le lehet fedni. (Ha a másikat választjuk, akkor a fenti ábra 90°-os elforgatottját kapjuk, és akármelyik csúcsnál kezdjük, ennek a két lefedésnek a valamelyikét kapjuk.) Vagyis ha ezeket nem nézzük, akkor a lefedésekben nem fordulhat elő olyan, ami az 1. ábra bal oldalán van, azaz a többi esetben miután minden sarkot lefedtünk, a maradék részt felbonthatjuk $2 \times n$-es téglalapokra (*2. ábra*, az ábrán behúzott szakaszokat nem takarhatja dominó).

Így a sakktábla minden oldalához eredetileg egy 2×8-as téglalap tartozik, és a sakktábla mind a négy sarkára lehelyezett 1×2-es dominó ezek közül valamelyiknek az oldalát 1-gyel megnöveli. Így tartozhat 2×8-as, 2×9-es és 2×10-es téglalap egy-egy oldalhoz, de sem két 2×8-as, sem két 2×10-es nem tartozhat szomszédos oldalakhoz. Ezeket a feltételeket figyelembe véve nézzük meg, hogy mekkorák lehetnek az oldalakhoz tartozó téglalapok.

Ha van két 10-es, akkor azok csak egymással szemben lehetnek, a másik kettő pedig 8-as, mert a két 10-es „elhasználta" a sarkok növelését. A 10-es oldalpár kétféleképpen helyezkedhet el.

Ha egy 10-es van, akkor a többi három csak két 9-esből és egy 8-asból állhat (különben nem jönne ki a sarkok által nyújtott 4 növelés). A 10-es oldalt 4-féleképpen, majd a 8-ast 3-féleképpen helyezhetjük le, ez $3 \cdot 4 = 12$ lehetőség.

Ha nincs 10-es, akkor mindegyik 9-es (különben nem lenne meg a sarkok által nyújtott 4 növelés). Ekkor a sarkok 90°-os forgásszimmetriával rendelkeznek, így ha az egyiket megválasztjuk, az meghatározza a többit. Ebből az esetből tehát 2 van.

Minden sávot külön-külön kell lefedni, vagyis össze kell szorozni az egyes lefedhetőségeket. Tehát az eredeti alakzatot összesen

$$2 + 2 \cdot F_{11} \cdot F_{11} \cdot F_9 \cdot F_9 + 12 \cdot F_{11} \cdot F_{10} \cdot F_{10} \cdot F_9 + 2 \cdot F_{10} \cdot F_{10} \cdot F_{10} \cdot F_{10} =$$

$$= 2 + 2 \cdot 89^2 \cdot 34^2 + 12 \cdot 89 \cdot 55^2 \cdot 34 + 2 \cdot 55^4 = 146\,458\,404$$

különböző módon fedhetjük le.

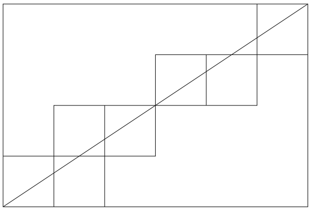
Szabó Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 85 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 41, 5 pontos 7 versenyző dolgozata. 4 pontot kapott 18, 3 pontot 8, 2 pontot 7 tanuló. 1 pontos és 0 pontos 2-2 tanuló dolgozata.

B. 4934. *Tetszőleges n és k pozitív egészek esetén jelölje $f(n,k)$ azt, hogy egy $n \times k$-as rácstéglalap egyik átlója hány egységnégyzet belsején halad keresztül. Hány olyan n, k számpár van, amelyre $n \geqslant k$, és $f(n,k) = 2018$?*

(4 pont)

Megoldás. A bal alsó és a jobb felső csúcsot összekötő átló $n-1$ vízszintes és $k-1$ függőleges rácsegyenest metsz a téglalap belsejében. Pontosan akkor halad át egy, a jobb felső sarokban lévőtől különböző (rács) egységnégyzet belsején, ha annak jobb oldali függőleges vagy felső vízszintes oldalát metszi.



E metszéspontok száma összesen $(n-1)+(k-1) = n+k-2$. Azonban két ilyen metszéspont egybe is eshet; ez éppen akkor következik be, amikor az átló a téglalap belsejében lévő rácsponton halad át. Egy ilyen rácspont a téglalap bal alsó csúcsával egy $n_1 \times k_1$-es rácstéglalapot határoz meg, ahol $\frac{n}{n_1} = \frac{k}{k_1}$, azaz

$$nk_1 = n_1 k, \quad \text{és} \quad 1 \leqslant n_1 < n,\ 1 \leqslant k_1 < k \ \text{ egészek.}$$

Jelölje n és k legnagyobb közös osztóját d, ekkor

$$n = dn^*, \quad k = dk^*, \quad \text{ahol } n^* \text{ és } k^* \text{ relatív prímek.}$$

A korábbi összefüggésbe helyettesítve:

$$dn^* k_1 = n_1 dk^*, \quad \text{azaz} \quad n^* k_1 = n_1 k^*.$$

Ebből következik, hogy $n_1 k^*$ osztható n^*-gal, ami a relatív prímség miatt csak akkor következik be, ha n_1 osztható n^*-gal: $n_1 = xn^*$, ahol x pozitív egész, és $n^* x < n = dn^*$ miatt $1 \leqslant x < d$; emiatt $k_1 = xk^*$.

A téglalap átlójára eső belső rácspontok száma tehát megegyezik x lehetséges értékeinek számával, $d-1$-gyel. Ennyi egységnégyzetet az $n+k-2$ formulában kétszer számoltunk, így – az eddig kihagyott jobb felső sarok egységnégyzetével együtt – az átló $(n+k-2)-(d-1)+1 = n+k-d$ egységnégyzet belsején halad keresztül.

Feladatunk ilymódon $n+k-d = 2018$ pozitív egész megoldásainak számát kérdezi, ahol $(n,k) = d$ és $n \geqslant k$. Mivel d az n-nek és a k-nak is osztója, azért $d \mid 2018 = 2 \cdot 1009$. Az 1009 prím, így d szóbajövő értékei: 1, 2, 1009 és 2018.

1. Ha $d = 1$, akkor az $n+k = 2019 = 3 \cdot 673$ egyenlet $(n,k) = 1$, $n \geqslant k \geqslant 1$ megoldásainak számát keressük. A relatív prímség feltétele nélkül a megoldások száma 1009 lenne. Ezek közül azonban nem megfelelőek azok, amelyeknél n és k is osztható 3-mal, 673-mal vagy 2019-cel. Az ilyen megoldások száma rendre $\left[\frac{1009}{3}\right] = 336$, $\left[\frac{1009}{673}\right] = 1$, illetve $\left[\frac{1009}{2019}\right] = 0$, így a valamennyi feltételnek eleget tevő megoldások száma ebben az esetben $1009 - (336+1) + 0 = 672$.

2. Ha $d = 2$, akkor az $n+k = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ egyenlet $(n,k) = 2$, $n \geqslant k \geqslant 1$ megoldásainak számát keressük. Ez nyilván ugyanannyi, mint az $x+y = 1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$ egyenlet $(x,y) = 1$, $x \geqslant y \geqslant 1$ megoldásainak a száma. Az első esetben alkalmazott számoláshoz hasonlóan ez

$$505 - \left(\left[\frac{505}{2}\right] + \left[\frac{505}{5}\right] + \left[\frac{505}{101}\right]\right) + \left(\left[\frac{505}{10}\right] + \left[\frac{505}{202}\right] + \left[\frac{505}{505}\right]\right) - \left(\left[\frac{505}{1010}\right]\right) =$$

$$= 505 - 358 + 53 - 0 = 200.$$

3. Ha $d = 1009$, akkor az $n+k = 3027 = 3 \cdot 1009$ egyenlet $(n,k) = 1009$, $n \geqslant k \geqslant 1$ megoldásainak számát keressük. Az előző esethez hasonlóan ez ugyanannyi, mint az $x+y = 3$ egyenlet $(x,y) = 1$, $x \geqslant y \geqslant 1$ megoldásainak a száma, ami nyilván 1.

4. Ha $d = 2018$, akkor az $n+k = 4036 = 4 \cdot 1009$ egyenlet $(n,k) = 2018$, $n \geqslant k \geqslant 1$ megoldásainak számát keressük, ami 1, hiszen csak $n = k = 2018$ felel meg.

A négy esetet összegezve, a feladatnak eleget tevő számpárok száma $672 + 200 + 1 + 1 = 874$.

Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.) megoldását felhasználva

Megjegyzés. Ha az $m \geqslant 2$ egész prímtényezős alakja $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, akkor bármely m darab egymást követő egész szám közül az m-hez relatív prímek száma $\varphi(m) = p_1^{a_1-1}(p_1-1) \cdot p_2^{a_2-1}(p_2-1) \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k-1}(p_k-1)$. (Ezt a megoldásban is többször használt szita formula segítségével (is) bizonyíthatjuk.) A fenti megoldásban mind a négy esetben egy $x+y=m$ típusú egyenlet olyan egész megoldásainak számát kerestük, ahol $(x,y)=1$ és $x \geqslant y \geqslant 1$. Itt $1 \leqslant y \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]$, és az $(x,y)=1$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $(y,m) = 1$. Ennek figyelembe vételével több megoldó is a $\varphi(m)$ képletének alkalmazásával ért célba.

97 dolgozat érkezett. 4 pontos 49, 3 pontos 21, 2 pontos 20, 1 pontos 7 dolgozat.

B. 4946. *Az $f(x)$ valós együtthatós polinomra igaz, hogy minden, 10-es számrendszerben 5-re vagy 8-ra végződő k pozitív egész esetén $f(k)$ értéke egész szám.*

a) Igazoljuk, hogy $f(0)$ egész szám.

b) Mutassunk példát olyan $f(x)$ polinomra, amire a fenti feltételek teljesülnek, de $f(1)$ nem egész szám.

(*6 pont*)

Megoldás. *a)* Az $f(x)$ polinom együtthatói racionális számok; ennek okára a megjegyzésben térünk vissza.

Tegyük fel, hogy $f(x)$-nek van nem egész racionális együtthatója. Legyen

$$f(x) = \frac{b_q}{c_q}x^q + \ldots + \frac{b_1}{c_1}x + \frac{b_0}{c_0},$$

ahol $b_0, c_0, b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots$ egészek, valamint b_i és $c_i \neq 0$ relatív prímek bármilyen i-re. Legyen n olyan pozitív egész, amelynek 10-es számrendszerbeli alakja 1-re végződik. Ekkor $8n$ biztosan 8-ra, $5n$ pedig 5-re végződik, vagyis $f(8n)$ és $f(5n)$ is egész.

Két 6-ra végződő szám szorzata is 6-ra végződik, egy 6-ra és egy 8-ra végződő szám szorzata pedig 8-ra. Így 16^m minden m pozitív egészre 6-ra végződik. Ezért $16^m \cdot 8$ is 8-ra végződik, tehát $f(16^m \cdot 8n) = f(2^{4m+3} \cdot n)$ egész. Az 5 hatványai mindig 5-re végződnek, ezért $f(5^m \cdot n)$ is egész.

Tekintsük a $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \ldots \cdot c_q$ szorzatot, és osszuk el a legnagyobb 2-hatvány osztójával, majd a legnagyobb 5-hatvány osztójával is. Az így kapott páratlan, 5-tel nem osztható egész számot jelölje A, azaz

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_q = A \cdot 2^e \cdot 5^f.$$

Az A-t bármelyik együttható nevezőjével (c_i-vel) osztva olyan törtet kapunk, amelynek egyszerűsített nevezője csak 2-vel vagy 5-tel osztható a prímek közül, vagy a kapott hányados egész.

Az A utolsó számjegyétől függően adjuk meg a t egészet a következőképpen: Ha ez a számjegy 1, akkor legyen $t = A$. Ha 3, akkor $7A$ 1-re végződik, így legyen $t = 7A$. Ha 7, akkor legyen $t = 3A$. Ha 9, akkor pedig legyen $t = 9A$. Így t mindenképpen 1-re végződik, és t/c_i vagy egész vagy olyan tört, amelynek a nevezője nem osztható 2-től és 5-től különböző prímmel.

A fentiek alapján $f(2^{4e+3}\cdot t)$ egész. Vizsgáljuk ennek az összegnek egy, $\frac{b_0}{c_0}$-tól különböző

$$\frac{b_i\cdot 2^{i\cdot(4e+3)}\cdot t^i}{c_i}$$

tagját. A tört egyszerűsítése után a nevezőben csak 5-hatvány maradhat, mivel c_i legfeljebb 2^e-nel osztható. Így $f(2^{4e+3}\cdot t)-f(0)$ olyan törtek összege, amelyek nevezőjében 5-hatványok állnak. Mivel $f(2^{4e+3}\cdot t)$ egész, azért $f(0)$ is vagy egész, vagy olyan tört, amelynek nevezője 5-hatvány.

$f(5^f\cdot t)$ is egész a fentiek alapján. Vizsgáljuk ennek az összegnek is egy, $\frac{b_0}{c_0}$-tól különböző

$$\frac{b_i\cdot 5^{if}\cdot t^i}{c_i}$$

tagját. Az egyszerűsítés után a nevezőben itt csak 2-hatvány maradhat, mivel c_i legfeljebb 5^f-nel osztható. Tehát $f(5^f\cdot t)-f(0)$ olyan törtek összege, amelyek nevezőjében 2-hatvány áll. Mivel $f(5^f\cdot t)$ egész, $f(0)$ is egész vagy olyan tört, aminek nevezője 2-hatvány.

A két eredményt összevetve $f(0)$ szükségképpen egész.

b) Az $f(x)=\frac{(x-5)(x-8)}{10}$ polinom teljesíti a feladat feltételeit: ha $a=10k+5$ vagy $b=10k+8$ alakú szám, ahol k (nemnegatív) egész, akkor $f(a)=k(10k-3)$ és $f(b)=(10k+3)k$ egészek, viszont $f(1)=\frac{28}{10}$ nem egész.

Póta Balázs (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.) és
Schrettner Jakab (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 11. évf.)
megoldását felhasználva

Megjegyzés. Az *interpoláció* tétele szerint, ha $a_1,\ldots,a_{n+1}$ páronként különböző, $b_1,\ldots,b_{n+1}$ pedig tetszőleges valós számok, akkor létezik pontosan egy olyan legfeljebb n-edfokú $f(x)$ polinom, amelyre $f(a_k)=b_k$ minden $k=1,\ldots,n+1$-re. Világos, hogy két különböző $f_1(x)$ és $f_2(x)$ polinom nem létezhet ezekkel a tulajdonságokkal, hiszen akkor a különbségük olyan, legfeljebb n-edfokú, nem azonosan nulla polinom lenne, amelynek az $a_1,\ldots,a_{n+1}$ számok mindegyike gyöke. Ez azonban lehetetlen, mivel egy nemnulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a polinom foka.

Másrészt legyen

$$f(x)=b_1L_1(x)+\ldots+b_{n+1}L_{n+1}(x),$$

ahol mindegyik

$$L_k(x)=\frac{\prod\limits_{j:j\neq k}(x-a_j)}{\prod\limits_{j:j\neq k}(a_k-a_j)}$$

n-edfokú polinom a_k-ban 1-et, az összes többi a_j-ben pedig nullát vesz fel. Az így előállított $f(x)$ polinom tehát megfelelő. Az $f(x)$ eme alakjából látszik, hogy az együtthatói az a_k, b_k számokból véges sok összeadás, kivonás, szorzás és osztás alkalmazásával kaphatók meg; ebből speciálisan következik, hogy ha az a_k, b_k számok valamennyien racionálisak, akkor $f(x)$ együtthatói is azok.

A feladatban szereplő polinom fokát jelölje d. Az interpoláció tételét alkalmazhatjuk $n=d$-re, $a_k=5^k$-ra és $b_k=f(5^k)$-ra, ahol $k=1,\ldots,d+1$; ezek a számok egészek lévén racionálisak, ezért az általuk egyértelműen meghatározott $f(x)$ együtthatói is azok.

41 dolgozat érkezett. 6 pontos 10 versenyző: Dobák Dániel, Döbröntei Dávid Bence, Gáspár Attila, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Póta Balázs, Schrettner Jakab, Szabó Dávid, Szabó Kornél, Weisz Máté. 5 pontos 3, 4 pontos 2, 2 pontos 23, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

Polygon pályázat matematikából középiskolásoknak

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete pályázatot hirdet középiskolás diákok (9–12. évfolyam) számára.

A pályázat témája:

Középiskolai matematikához kapcsolódó problémák, érdekességek

Ami biztosan ide tartozik: hogyan lehet egy ismert feladatot folytatni, újszerű és érdekes feladatok vagy trükkös megoldások, régi korok matematikája, hétköznapok matematikája, a matematika és a természettudományok kapcsolata, gyakorlati alkalmazások, informatikai alkalmazások és kapcsolatok (például algoritmusok) stb. Pályázni egyénileg lehet, vagy maximum 3 fős csapattal. A pályamunkákat a Bolyai Intézet oktatóiból álló zsűri fogja elbírálni.

Díjak (csapat esetén a jutalom megoszlik a tagok közt):
I. díj: 25 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
II. díj: 20 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
III. díj: 15 ezer Ft értékű könyvutalvány és egy Polygon könyv,
Dicséret: Polygon könyv.

A díjazottak és a dicséretben részesültek oklevelet kapnak, amelyen a helyezésüket is feltüntetjük. A pályázó(k) által megnevezett felkészítő tanár(ok) a díjazottakkal és a dicséretben részesültekkel azonos jutalomban és szintén oklevélben részesülnek. Minden pályamunkáról szöveges szakmai értékelést készítünk, amit a díjkiosztó ünnepségen vehetnek át a versenyzők. A legjobb dolgozatokat a Polygon c. folyóirat szerkesztőbizottsága is megvizsgálja közölhetőség szempontjából. A beadott dolgozatok maximális terjedelme 10 oldal lehet (ábrákkal, képekkel, táblázatokkal, grafikonokkal együtt).

Beküldési határidő: **2018. december 15.** A pályamunkákat a következő címre kérjük beküldeni: Katonáné dr. Horváth Eszter egyetemi adjunktus, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1. A borítékra kérjük ráírni: Polygon pályázat matematikából, középiskolásoknak. A dolgozatokhoz az alábbi adatok mellékelését kérjük: