EGMO 2018/2019 felhívás

2019. április 7. és 13. között Ukrajnában, Kijevben rendezik a nyolcadik Európai Lány Matematikai Diákolimpiát, az EGMO-t (`www.egmo.org`). Jövőre is négyfős csapattal indulhatunk, melynek összetétele 2019 elején derül ki. A válogatás szempontjai: válogatóversenyek (2018 őszén és 2019 elején) – kis mértékben az elmúlt évi is –, országos versenyek (matematika OKTV, Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, Arany Dániel Matematikaverseny), a KöMaL A és B pontversenyei és az évközi munka.

A versenyen való sikeres szerepléshez, illetve a kiutazó csapatba kerüléshez is alapvetően nélkülözhetetlen az alapos felkészülés, ezt többféleképpen is szeretnénk segíteni. Év közben időközönként küldünk az érdeklődőknek (tematikus) feladatsorokat; az ezekre küldött megoldásokra személyesen is visszajelzünk, illetve lehet kérdezni is. Emellett az őszi válogatóig legeredményesebb diákok részt vehetnek a téli brit-magyar közös IMO felkészítő táborban. A két válogató összesített eredménye alapján a legeredményesebb diákok részt vehetnek az intenzív felkészítő hétvégén.

Érdemes minél előbb, akár már kilencedikesként bekapcsolódni, minden lány jelentkezését szeretettel várjuk, akit érdekel a versenyrészvétel lehetősége és nem riad vissza attól, hogy ezért komolyabb munkát fektessen be!

Aki szeretne részt venni a válogatásban és felkészülésben, vagy bármilyen kérdése van, írjon minél előbb az `egmo.hungary@gmail.com` címre, vagy jelentkezzen a honlapon leírtak szerint: `http://www.cs.elte.hu/~nagyzoli/EGMO.html`.

Nagy Zoltán Lóránt, Kiss Melinda Flóra és **Fekete Panna**

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Adjuk meg azon $P(x;y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

a) $(x^2-y^2)(x^2+y^2-4)=0$;

b) $\left(x^2-y\right)^2+\left(x^2+y^2-14y+36\right)^2=0$. (*11 pont*)

2. A $\overline{\text{SzÁMADÓ}}$ és az $\overline{\text{ADÓSzÁM}}$ egy-egy olyan hatjegyű, a $\overline{\text{SzÁM}}$ és az $\overline{\text{ADÓ}}$ pedig egy-egy olyan háromjegyű szám, amelyben az Sz, Á, M, A, D és Ó betűk különböző pozitív számjegyek.

a) Mennyi a $\overline{\text{SzÁM}}+\overline{\text{ADÓ}}$ összeg, ha $\overline{\text{SzÁMADÓ}}+\overline{\text{ADÓSzÁM}}=678\,678$?

b) Adjuk meg a $\overline{\text{SzÁMADÓ}}$ számot, ha még azt is tudjuk, hogy $\text{Sz}>\text{A}$, valamint $\overline{\text{SzÁM}}\cdot\overline{\text{ADÓ}}=90\,585$.

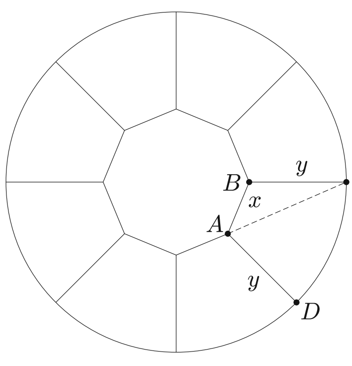
c) Mennyi az $\overline{\text{ADÓSzÁM}}$, ha $7\cdot\overline{\text{ADÓSzÁM}}=6\cdot\overline{\text{SzÁMADÓ}}$? (*12 pont*)

3. A Szép Utazások iroda tájékoztatójában a repülőgépen szállítható csomagokról ez olvasható:

„Az iroda által bérelt járatokon 15 kg/fő feladott poggyász és 1 db 8 kg/fő kézipoggyász szállítása díjtalan, a többletsúlyért fizetni kell. Mindegyik poggyásznak téglatest alakúnak kell lennie. A feladott poggyász egyik élhossza sem lehet több, mint 150 cm, és a három különböző irányú él hosszának összege nem haladhatja meg a 220 cm-t. A kézipoggyász maximális hossza 56 cm, maximális szélessége 45 cm, maximális mélysége 25 cm lehet, azonban a három méret összesen nem haladhatja meg a 115 cm-t.”

a) Bea kézipoggyásznak való kisbőröndöt vásárol az utazáshoz. A boltban a megfelelő bőröndök egyik élhossza 25 cm. Szeretné, ha az élhosszak összege a megengedett maximális, ugyanakkor a bőrönd felszíne 8500 cm^2 lenne. Milyen méretű bőrönd felelne meg ezeknek a feltételeknek?

b) László az utazáshoz bőröndöt szeretne vásárolni, amibe a feladható poggyászként engedélyezett 15 kg-ot bepakolhatja. A neki tetsző bőröndök egyik élének hossza 40 cm volt. Milyen méretű bőröndöt válasszon ezek közül, ha szeretné, hogy a térfogata maximális legyen? Mekkora lesz ekkor a bőrönd térfogata? (*14 pont*)



4. A Fővárosi Nagycirkusz 13 méter átmérőjű porondjának vázlatát mutatja az *ábra.* A vízi cirkuszi előadásban a porond kilenc, azonos területű része függőlegesen, le-föl mozgatható.

a) Mekkora a porond közepén látható szabályos nyolcszög területe?

b) A nyolc egybevágó (trapézszerű) síkidomot a könnyebb mozgatás miatt körben egy nagyon speciális anyaggal borították. Ehhez előzetesen meg kellett határozni ezeknek a síkidomoknak a kerületét. Mekkora a kerülete az $ABCD$ trapézszerű síkidomnak?

c) A nyolc egybevágó síkidom függőleges mozgatásához megépített szerkezet miatt minden ilyen síkidom alatt szükség volt egy átlós merevítőre. Adjunk képletet az AC merevítő hosszára az ábra x és y hosszúságú szakaszának ismeretében. (A képletben előforduló szögfüggvényértékek négy tizedes jegy pontossággal szerepeljenek.) (*14 pont*)

II. rész

5. Rebeka új szemüveget vásárol, de nem szeretné, hogy a lencsékért 25 000 Ft-nál többet fizessen. A szaküzletben kiderül, hogy ha hagyományos lencsét vásárolna, akkor 4280 Ft-ot fizetne a két lencséért. Rebeka tudja, hogy a minőséget a különböző típusú bevonatok javíthatják, ezért tükröződésmentes és karcolás mentes bevonatot kér a lencsékre. A bevonatok mindegyikének 99 Ft/cm^2 az ára. (A lencsék felületét síknak vehetjük.) Azt is eldöntötte, hogy a hagyományosnál vékonyabb lencsét szeretne választani. A készlet szerint ez lehet 10, 20, 30, 40, illetve 50%-kal vékonyabb. Ezeknek a lencséknek az ára a hagyományoshoz képest rendre 40, 80, 160, 320, 640%-kal drágább.

Egy lencse határvonalát az $f(x) = 2 - \frac{2}{25}x^2$ és a $g(x) = \frac{x^2}{5} - 5$ hozzárendeléssel megadott függvények grafikonja által meghatározott síkidom határvonala adja. A koordinátarendszer egysége 5 mm-rel egyenlő. Mekkora területű részt foglal el egy lencse az asztalon? A hagyományos lencséhez képest hány százalékkal választhat vékonyabb lencsét Rebeka? (*16 pont*)

6. A Rubik-kocka feltalálásának évfordulójára díszdobozos kiadást terveznek. Az egyik változat szerint legyen a doboz egy olyan négyoldalú szabályos gúla, amelynek alapéle ugyanolyan hosszú, mint az oldaléle. Az elképzelés szerint a kocka egyik lapja illeszkedik a gúla alaplapjára, az ezzel párhuzamos lap csúcsai pedig a gúla oldaléleire.

a) Mekkora legyen a doboz éleinek hossza, ha a Rubik-kocka élhosszúsága: $a = 5{,}7$ cm?

b) A sok-sok terv közül azonnal elvetették azokat, amelyeknél a játék a doboz 35%-át sem tölti ki. A fenti terv megfelelő-e ezen feltétel ismeretében? (*16 pont*)

7. *a*) A tízes számrendszerben felírt egyjegyű a, kétjegyű $\overline{ab}$ és háromjegyű $\overline{abb}$ szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első, második és tizenkettedik tagja. (Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.) Hány darab megfelelő kétjegyű szám van? Mennyi a legnagyobb megfelelő kétjegyű szám esetén a számtani sorozat első 20 tagjának összege?

b) A pozitív számokból álló (a_n) mértani sorozat kilenc egymást követő tagjából képezzünk három számot úgy, hogy összeadjuk az első hármat, aztán a következő hármat, és végül az utolsó hármat. Mutassuk meg, hogy az így kapott három szám tízes alapú logaritmusa egy számtani sorozat három egymást követő tagja lesz. (*16 pont*)

8. Az $ABCDEFGH$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az $ABCD$ alaplapra az AE, BF, CG és DH élek merőlegesek. Tudjuk, hogy a HAD szög $30°$-os, a FAB szög pedig $60°$-os.

a) Mekkora az AFH háromszög területe, ha a téglatest térfogata $3375\ \mathrm{cm}^3$?

b) Mekkora szögben hajlik a téglatest AG testátlója az $ABCD$ laphoz?

c) Dávid a téglatest ábráját a 8 csúccsal, a 12 élével és az AH, valamint AF éllel egy gráfnak tekinti. Barbara pedig a hiányzó élek berajzolásával készített egy teljes gráfot. Azt állítja, hogy rajzolás közben minden csúcsot érintett, viszont egy élt csak egyszer rajzolt meg, és közben a ceruzáját nem kellett felemelnie a papírról. Miért tartjuk ezt hihetőnek? Melyik csúcsból kezdhette a rajzolást, és melyik csúcsba érkezhetett? (*16 pont*)

9. Legyen n pozitív egész szám. Adottak az alábbi sorozatok:

$$\{a_n\} = \big\{\lg(n+1)\big\};$$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{n^3 - 5n^2 - n + 5}{n+1}\right\};$$

$$\{c_n\} = \big\{|n+2| + |n-6|\big\}.$$

Válaszoljunk (indoklással) mindhárom esetben, hogy a sorozat alulról, felülről korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem. Ha van, adjunk meg egy alsó, illetve felső korlátot. (*16 pont*)

Számadó László
Budapest

Megoldásvázlatok a 2018/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Egy szabályos n-szög alapú egyenes hasáb lapátlóinak száma, testátlóinak száma és a 24 valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Határozzuk meg n lehetséges értékeit.* (*11 pont*)

Megoldás. A lapátlókból kétfajta van, az oldallapokon és az alaplapokon. Minden oldallapon 2 lapátló van, így ezekből összesen $2n$ van. Az alaplapokon $\frac{n(n-3)}{2}$ lapátló van, így ezekből összesen $n(n-3)$ van. Tehát összesen

$$2n + n(n-3) = n^2 - n$$

lapátló van.

Szemeljük ki az egyik alaplap egy tetszőleges csúcsát. Ebből $n-3$ testátló húzható. Így összesen $n(n-3) = n^2 - 3n$ testátló van. Tehát valamilyen sorrendben az $n^2 - n$, $n^2 - 3n$ és a 24 egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Nem a konkrét sorrendjük a lényeges, hanem az, hogy melyik van középen. Ezek alapján 3 esetet vizsgálunk meg és felhasználjuk, hogy számtani sorozatnál egy elem megegyezik a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok számtani közepével.

1. eset: Ha $n^2 - n$ van középen, akkor

$$n^2 - n = \frac{n^2 - 3n + 24}{2}, \quad n^2 + n - 24 = 0,$$

ennek nincs pozitív egész megoldása.

2. eset: Ha $n^2 - 3n$ van középen, akkor

$$n^2 - 3n = \frac{n^2 - n + 24}{2}, \quad n^2 - 5n - 24 = 0,$$