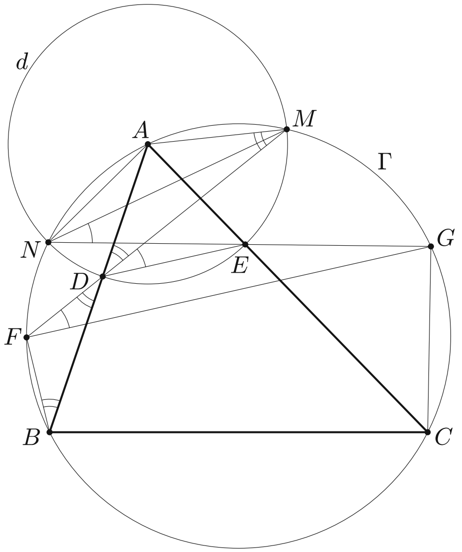
Az 59. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap*

1. *Legyen Γ a hegyesszögű ABC háromszög körülírt köre. D és E legyenek az AB, illetve AC szakaszok olyan pontjai, amelyekre $AD = AE$. A BD és CE szakaszok felezőmerőlegesei a Γ kör rövidebb AB, illetve AC íveit az F, illetve G pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy a DE és FG egyenesek párhuzamosak vagy egybeesnek.*



Imolay András megoldása. Messe az FD és a GE egyenes Γ-t másodszor rendre M-ben és N-ben.

F rajta van BD felezőmerőlegesén, így az FDB háromszög egyenlőszárú, $FDB\sphericalangle$ és $ADM\sphericalangle$ csúcsszögek, és $BFAM$ húrnégyszög, így

$$ADM\sphericalangle = FDB\sphericalangle = FBD\sphericalangle =$$

$$= FBA\sphericalangle = FMA\sphericalangle = DMA\sphericalangle,$$

tehát a DAM háromszög egyenlőszárú, így $AD = AM$. Hasonlóan kapjuk, hogy $AE = AN$, és a feladat feltétele szerint $AD = AE$, így $AN = AD = AE = AM$, tehát az N, D, E, M pontok egy A középpontú körre illeszkednek.

$NDEM$ és $GMNF$ húrnégyszögek, így

$$MDE\sphericalangle = MNE\sphericalangle = MNG\sphericalangle = MFG\sphericalangle,$$

tehát a DE és FG egyenesek az FM egyenessel ugyanakkora szöget zárnak be, vagyis a DE és FG egyenesek párhuzamosak vagy egybeesnek. Kész vagyunk.

*A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

2. *Határozzuk meg azokat az $n \geqslant 3$ egész számokat, amelyekre léteznek $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ valós számok, amelyekre $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ és*

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

teljesül minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

Bukva Balázs megoldása. Ha $3 \mid n$, akkor van megoldás, méghozzá legyen

$$a_n = \begin{cases} 2 & n \equiv 0 \pmod 3, \\ -1 & n \equiv 1 \pmod 3, \\ -1 & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Ez könnyen ellenőrizhető, hogy jó lesz.

Más esetben nincsen megoldás. Tekintsük az alábbi átrendezést ($a_{n+3} := a_3$):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_{i+1}a_{i+2} + 1) = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} (a_i a_{i+1} + 1) a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2.$$

Ebből a rendezési egyenlőtlenség alapján azt kapjuk, hogy $a_{i+3} = a_i$ minden i-re, így, ha $(n, 3) = 1$, akkor az összes a_i egyenlő, azaz $a_i = a$ valamilyen a-ra. De ebből az következne, hogy az $x^2 + 1 = x$ egyenletnek a egy valós megoldása, de ennek a másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása. Ezzel beláttuk, hogy ha $(n, 3) = 1$, akkor nincs megoldás.

3. *Nevezzük* anti-Pascal háromszögnek *számoknak egy olyan, szabályos háromszög alakú elrendezését, amelyben az utolsó sorbeli számok kivételével minden szám a közvetlenül alatta lévő két szám különbségének az abszolút értékével egyenlő.*

Alább látható egy példa egy olyan anti-Pascal háromszögre, amelynek 4 *sora van, és* 1*-től* 10*-ig minden egész szám előfordul benne.*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & \mathit{10} & & 9 \end{array}$$

Létezik-e olyan anti-Pascal háromszög, aminek 2018 *sora van, és* 1*-től* $(1 + 2 + \ldots + 2018)$*-ig minden egész szám előfordul benne?*

Janzer Orsolya Lili megoldása. Tegyük fel, hogy van ilyen háromszög.

Mivel egy ilyen, 2018 soros háromszögnek éppen $1 + 2 + 3 + \ldots + 2018$ mezője van, minden egésznek 1-től $1 + 2 + 3 + \ldots + 2018$-ig pontosan egyszer kellene szerepelnie benne.

Legyen az n-edik sorban M_n a legnagyobb, m_n pedig a legkisebb szám. Most tegyük fel, hogy $n \leqslant 2017$, és vegyük a közvetlenül M_n alatt lévő számokat. Legyenek ezek a számok a és b. Feltehető, hogy ezek közül $a > b$. Így $a - b = M_n$. Mivel $a \leqslant M_{n+1}$ és $b \geqslant m_{n+1}$, kapjuk, hogy $M_{n+1} \geqslant M_n + m_{n+1}$ ($\geqslant M_{n-1} + m_n + m_{n+1} \geqslant \geqslant \ldots$).

Így minden $1 \leqslant i < j \leqslant 2018$-ra

$$M_j \geqslant M_i + \sum_{k=i+1}^{j} m_k.$$

Ebből, mivel $M_1 = m_1$,

$$M_{2018} \geqslant \sum_{k=1}^{2018} m_k.$$

Tehát M_{2018} felírható 2018 különböző pozitív egész összegeként, így $M_{2018} \geqslant 1 + + 2 + 3 + \ldots + 2018$, ezért $M_{2018} = 1 + 2 + 3 \ldots + 2018$, és $\{m_1, m_2, \ldots, m_{2018}\}$ egy permutációja az $\{1, 2, \ldots, 2018\}$ számoknak. Következik továbbá, hogy minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, azaz minden $1 \leqslant j \leqslant 2018$ esetén

$$M_j = \sum_{k=1}^{j} m_k.$$

Most legyen minden $n \leqslant 2018$ szám „kicsi”, továbbá minden $1 + 2 + \ldots + 2017 \leqslant \leqslant n \leqslant 1 + 2 + \ldots + 2018$ szám „nagy”. Mivel $\{m_1, m_2, \ldots, m_{2018}\}$ az $\{1, 2, \ldots, 2018\}$ számok permutációja, minden sorban pontosan egy kicsi szám lesz.

Ha $n \leqslant 1954$, akkor:

$$\begin{aligned} M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k &\leqslant 2018 + 2017 + \ldots + 65 = \\ &= (1 + 2 + \ldots + 2018) - (1 + 2 + \ldots + 64) = \\ &= (1 + 2 + \ldots + 2018) - 2080 < 1 + 2 + \ldots + 2017, \end{aligned}$$

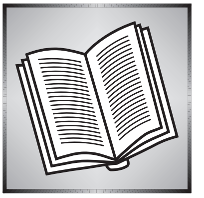
vagyis az n-edik sorban nem lehet egyetlen „nagy” szám sem.

Ha $1955 \leqslant n \leqslant 2017$, akkor legyen l egy nagy szám az n-edik sorban. Legyenek a számok közvetlenül l alatt a és b; feltehető, hogy $a > b$. Így $b = a - l$, és $a \leqslant \leqslant 1 + 2 + \ldots + 2018$; mivel l „nagy” ($\Rightarrow l \geqslant 1 + 2 + \ldots + 2017$), $b \leqslant 2018$, vagyis b kicsi. Így $b = m_{n+1}$, azaz l közvetlenül m_{n+1} fölött van. Így legfeljebb kettő „nagy” szám lehet az n-edik sorban.

Tehát legfeljebb 126 nagy szám van a sorokban összesen, a legalsót kivéve. Mivel összesen 2019 „nagy” szám van, legalább 1893 „nagy” szám van a legalsó sorban, ezért legfeljebb 125 „nem-nagy” van abban a sorban. A legalsó sorban 2018 szám, így 2017 szomszédos számpár van. Ha figyelmen kívül hagyjuk a közvetlenül az m_{2017} alatti számpárt, és a legfeljebb 250 számpárt, amiben van „nem-nagy”, akkor még mindig marad olyan szomszédos pár, aminek minkét tagja „nagy”, és nem közvetlenül az m_{2017} alatt van. Viszont a két „nagy” szám különbsége kicsi, és megtalálható a 2017-edik sorban, így az m_{2017}-tel együtt már kettő „kicsi” szám is lenne abban a sorban, ami ellentmondás.

Tehát nem létezik ilyen anti-Pascal háromszög.

A megoldás forrása: `https://artofproblemsolving.com`.



„Kínai étterem” – a véletlen permutációkról 1.

„Ezt a könyvet a tanítványaimtól tanultam”, kezdi Schönberg a *Harmóniatanát.* Nos, én is elmondhatom, hogy az itt következőket a tanítványaimtól tanultam. A valószínűségszámítást a középiskolában erősen kombinatorikus alapon tanítjuk – már amennyire tanítjuk. Viszont egykori tanítványommal, *Virág Bálinttal,* a *University of Toronto* professzorával a valószínűségszámításról beszélgetve észre kellett vennem, mennyire másképp néz egy vérbeli valszámos a valószínűségszámításra. Ezért felkértük őt, hogy a matematika tagozatos tanárok 2015-ös továbbképzésén mondja el, ő hogyan látja azokat a fogalmakat, amelyeket mi tanítunk. Erre egy – *Gyenes Zoltánnal* folytatott – beszélgetés keretében vállalkozott. Az egyik kérdés arra vonatkozott, hogy hogyan néz ő rá a véletlen permutációkra. Válaszul elmondta a *„kínai étterem folyamatot”* (*Chinese restaurant process*), ami sok mindent nagyon szemléletessé tesz. Azóta alaposan átgondoltuk Gyenes Zolival, hogy mit lehet ebből a tanításban hasznosítani és – egyelőre csak szakkörön – ki is próbáltuk. Az ottani tapasztalatokat is felhasználom.

1. A permutációk ciklus-szerkezete

Mindenekelőtt szükségünk van a permutációk ún. *ciklus-szerkezetére.* Ez kis csoportelméleti szemlélettel is beolthatja a kombinatorikai megközelítésünket. Szeretem az alábbi feladattal kezdeni. A feladatot egy kb. ötven évvel ezelőtti olimpiai felkészítő feladatsorban találtam még évtizedekkel ezelőtt. (A feladatsort emlékezetem szerint Hódi Endre jegyezte, és Reiman tanár úrnál beszéltük meg.)

1. feladat. *Egy osztály tanulói névsor szerint állnak egyenes sorban. A testnevelés tanár szeretné mihamarabb nagyság szerinti sorba állítani őket. Ehhez a következőt eszeli ki: kijelöl párokat úgy, hogy minden tanuló legfeljebb egy párban szerepel. Sípszóra ezek a párok helyet cserélnek. Ezután ismét kijelöl párokat (megint mindenki legfeljebb egy párban szerepel), akik újabb sípszóra helyet cserélnek. Ezt addig folytatja, amíg nagyság szerinti sorba nem rendezte őket. Szeretné a legkevesebb sípszóval elérni ezt. Segítsünk neki. Feltesszük, hogy látja a nagyság szerinti sorrendet.*

Megoldás. Először próbáljuk kitalálni, merre érdemes keresgélni. Ha minden lépésben csak egy cserét engednénk, akkor, mint ismeretes, $n-1$ csere elég volna (és kevesebb nem mindig). A mi feladatunk megengedi, hogy egy lépésben $\frac{n}{2}$ cserét is végrehajtsunk. A kérdés az, hogy reménykedhetünk-e, hogy két ilyen lépés is elég.