Fizika feladatok megoldása

P. 4948. *Egyforma keresztmetszetű és azonos anyagi minőségű két hengeres rúd a közös szimmetriatengelyük mentén mozogva összeütközik. A rudak hossza ℓ_1 és ℓ_2, a sebességük v_1 és v_2, az ütközés egyenes és centrális. A rudak rugalmasak, a bennük kialakuló feszültségekre és deformációkra minden pillanatban és mindenhol a Hooke-törvény érvényes. Mekkora az ütközési szám ennél az ütközésnél?*

(Lásd a Rugalmas testek ütközése *című cikket a KöMaL 2017. évi májusi számának 298. oldalán.)*

(*6 pont*) *Szegedi Ervin* (1957–2006) feladata

Megoldás. Tegyük fel, hogy ℓ_1 jelöli a rövidebb rúd hosszát, vagyis $\ell_1 < \ell_2$. Az egydimenziós mozgásban szereplő sebességeket tekinthetjük előjeles számoknak, ezzel a sebességvektorok nagysága mellett az irányukat is kifejezhetjük.

A feladatban hivatkozott cikk említi, hogy alkalmasan választott vonatkoztatási rendszerben az ütközési felület a különböző hosszúságú rudak esetében is (egy bizonyos ideig) mozdulatlan lesz. Keressük meg ezt az „alkalmasan választott" vonatkoztatási rendszert! Jelöljük ezen vonatkoztatási rendszer talajhoz viszonyított sebességét u-val! Miután a rudak ütköznek, a lökéshullámok a két rúdban (a rudak végpontjaihoz viszonyítva) azonos sebességgel kezdenek terjedni. Emiatt, amikor a hullám az ℓ_1 hosszú rúd végére ér, akkor a másik rúdban is ℓ_1 hosszú utat tett meg, a rúd maradék része pedig még eredeti, v_2 sebességével halad. Azok a részek, amelyeken a lökéshullám áthaladt, az ütközési felülethez képest mozdulatlanok, vagyis talajhoz rögzített rendszerből szemlélve u sebességgel haladnak. Ezek a testek zárt rendszert alkotnak, így a lendületmegmaradás törvénye szerint

$$\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2 = 2\ell_1 u + (\ell_2 - \ell_1)\, v_2, \quad \text{vagyis} \quad u = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Kihasználtuk, hogy a rudak tömege a hosszúságukkal arányos, és az arányossági tényező (a rúd keresztmetszetének és sűrűségének szorzata) kiesik a képletekből.

Az ütközési felület tehát ekkora u sebességgel halad az ütközés során. Az ilyen sebességgel haladó koordináta-rendszerből nézve az ℓ_1 hosszú rúd kezdeti sebessége $v_1 - u$, az ütközés utáni sebessége pedig értelemszerűen ennek ellentettje, $u - v_1$ lesz. (Az ütközési felület ebből a rendszerből nézve mozdulatlan, vagyis a merev fallal való ütközéshez hasonló helyzet alakul ki.) A talajhoz rögzített rendszerből nézve a rövidebb rúd ütközés utáni sebessége:

$$v_1' = u - v_1 + u = 2u - v_1 = 2 \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} - v_1 = v_2.$$

Az ütközési számot (annak egyik definíciója szerint) úgy kaphatjuk meg, hogy a tömegközépponti rendszerben kiszámítjuk *valamelyik* test ütközés utáni és ütközés előtti lendületének hányadosát (annak abszolút értékét). Az ütközés után az ℓ_1 hosszúságú rúd minden egyes pontjának ugyanakkora a sebessége, a rúdban nem maradtak feszültségek (ez nem áll fenn az ℓ_2 hosszúságú rúdra), így egyszerűbb a rövidebb rudat vizsgálnunk. Az ütközési szám kiszámításához tehát meg kell nézni, mekkora sebességgel haladt a rövidebb rúd az ütközés előtt és után a tömegközépponti rendszerben.

A tömegközéppont sebessége:

$$u_{\mathrm{tk}} = \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2}.$$

Az ℓ_1 hosszú rúd sebessége tehát a tömegközépponti rendszerben az ütközés előtt:

$$v_{1,\mathrm{tk}} = v_1 - u_{\mathrm{tk}} = v_1 - \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{(\ell_1 + \ell_2)v_1 - \ell_1 v_1 - \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{\ell_2(v_1 - v_2)}{\ell_1 + \ell_2},$$

az ütközés után pedig:

$$v'_{1,\mathrm{tk}} = v'_1 - u_{\mathrm{tk}} = v_2 - \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{(\ell_1 + \ell_2)v_2 - \ell_1 v_1 - \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{\ell_1(v_2 - v_1)}{\ell_1 + \ell_2}.$$

Az ütközési szám a fenti két sebesség hányadosának abszolút értékével egyenlő:

$$k = \left|\frac{v'_{1,\mathrm{tk}}}{v_{1,\mathrm{tk}}}\right| = \left|\frac{\ell_1(v_2 - v_1)}{\ell_2(v_1 - v_2)}\right| = \left|-\frac{\ell_1}{\ell_2}\right| = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Az ütközési szám tehát a rövidebb és a hosszabb rúd hosszának hányadosa. (Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a hosszabb rúd ütközés utáni és ütközés előtti lendületének hányadosát számoljuk ki a tömegközépponti rendszerben.)

Németh Róbert (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

11 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás, kicsit hiányos (5 pont) 1 dolgozat.

P. 4971. 30°*-os hajlásszögű, elég hosszú lejtőn gyorsulva csúszik lefelé egy vízzel félig telt tartály. Mekkora szöget zár be a víz felszíne a lejtő síkjával, ha a tartály és a lejtő közötti súrlódási együttható* 0,2?

(*4 pont*) *Példatári feladat alapján*

Megoldás. Kövessük a **G. 615.** gyakorlat megoldásának gondolatmenetét (lásd lapunk 236. oldalán), de itt most vegyük figyelembe a súrlódási erőt is.

Az M tömegű tartály+víz rendszerre ható, összesen Mg nagyságú nehézségi erő lejtő irányú komponense $Mg\sin\alpha$, a lejtő és a tartály alja közötti nyomóerő $Mg\cos\alpha$, a súrlódási erő tehát $Mg\mu\cos\alpha$ (ahol α a lejtő hajlásszögét, μ a súrlódási együtthatót jelöli). Az egész rendszerre ható eredő erő lejtő irányú komponense $Mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, a tartály és a benne lévő víz minden „darabkája" tehát (elegendő hosszú idő múlva, amikor a víz mozgása a tartályhoz képest már lecsillapodott)

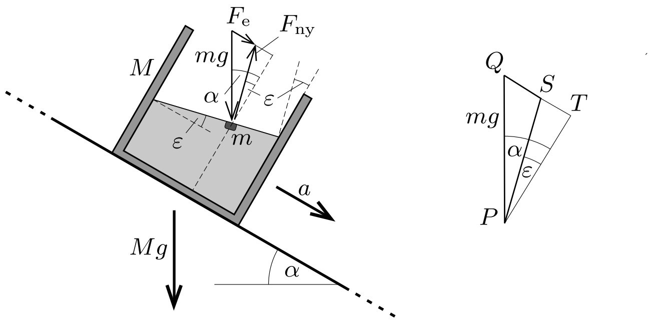
$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

gyorsulással mozog a lejtő esésvonalával párhuzamosan lefelé.

A folyadék felszínének közelében található m tömegű kicsiny vízmennyiségre ható eredő erő

$$F_\mathrm{e} = ma = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Ez az erő a függőlegesen lefelé mutató, mg nagyságú nehézségi erőnek és a folyadék többi része által kifejtett $\boldsymbol{F}_\mathrm{ny}$ nyomóerőnek a vektori összege (lásd az *ábrát*).



Az $\boldsymbol{F}_\mathrm{ny}$ erő a lejtő síkjára merőleges iránnyal valamekkora ε szöget zár be. Mivel $\boldsymbol{F}_\mathrm{ny}$ merőleges a folyadék felületére, ε a víz felszínének a lejtő síkjával bezárt szöge – éppen ezt keressük.

Megjegyzés. Azt, hogy a folyadék felszíne (görbült folyadékfelszín esetén az érintősíkja) merőleges a folyadék többi része által kifejtett $\boldsymbol{F}_\mathrm{ny}$ nyomóerőre, a következőképpen láthatjuk be. A folyadék egy kicsiny darabkájára a környezete azért fejt ki erőt, mert a folyadék nyomása helyről helyre változhat. A nagyobb nyomású „szomszédos részek" nagyobb erőt fejtenek ki, mint a szemközti „folyadékdarabkák", emiatt az eredő erő a nyomásváltozás (nyomáscsökkenés) irányába mutat. A felszín közelében (közvetlenül a határfelület alatt) a folyadék nyomása még mindenhol a külső légnyomással egyezik meg, az érintősík mentén tehát nem alakulhat ki nyomásváltozás, nem léphet fel ilyen irányú erő. A felszínre merőleges irányban más a helyzet, arrafelé haladva már növekedhet a nyomás, tehát kialakulhat ilyen irányú eredő erő.

A kinagyított erőháromszög képéről (lásd az ábra jobb oldali részét) leolvasható, hogy

$$PQ = mg, \qquad QT = mg\sin\alpha, \qquad PT = mg\cos\alpha,$$

$$QS = F_\mathrm{e} = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad \text{vagyis} \qquad ST = QT - QS = mg\mu\cos\alpha,$$

ahonnan

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{ST}{PT} = \frac{mg\mu\cos\alpha}{mg\cos\alpha} = \mu.$$

Ezt a szöget az adott súrlódási együtthatóhoz tartozó *súrlódási határszögnek* nevezik; ennél kisebb hajlásszögű lejtőn a súrlódó test nem tud magától megindulni. Esetünkben, amikor $\mu = 0{,}2$, a víz felszíne a lejtő síkjával $\varepsilon = 11{,}3°$-os szöget zár be. A **G. 615.** gyakorlatban $\mu = 0$, tehát $\varepsilon = 0$, a folyadék felszíne ilyenkor párhuzamos a lejtő síkjával. A másik határesetben, amikor $\varepsilon = \alpha$ (tehát a tartály gyorsulása nulla, esetleg el sem indul), a víz felszíne az edényben – a szó eredeti értelmében – *vízszintes,* a lejtő síkjával α szöget zár be.

Több dolgozat alapján

86 dolgozat érkezett. Helyes 40 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 17, hiányos (1–2 pont) 27, hibás 2 dolgozat.

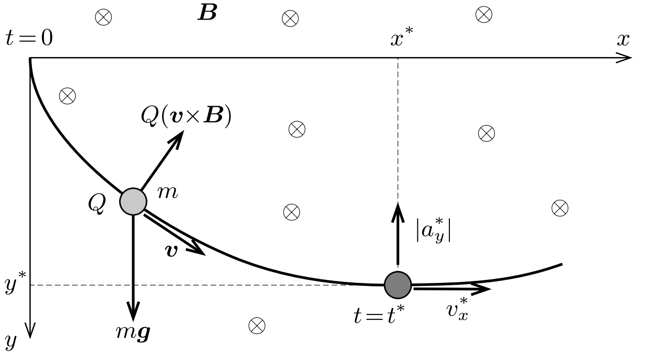
P. 4975. *Egy földi laboratóriumi kísérlet során az m tömegű, Q töltésű kicsiny testet vákuumban, B indukciójú, vízszintes irányú, homogén mágneses térben engedjük el. (Feltehetjük, hogy $mg < QBc$, ahol c a fénysebesség.) A test mozgását addig vizsgáljuk, míg eléri legmélyebb helyzetét.*

a) Mekkora lesz a test legnagyobb sebessége?
b) Milyen mélyre süllyed?
c) Mekkora átlagsebességgel mozog vízszintes irányban?
d) Mekkora a test gyorsulása pályájának legmélyebb pontján?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

I. megoldás. Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, amelynek x tengelye vízszintes, y tengelye pedig függőlegesen lefelé mutat. A mágneses indukció ugyancsak vízszintes irányú és az *ábrán* látható módon a papír síkjába befelé irányul. A kicsiny töltött test a koordináta-rendszer origójából indul, és a pályája – vázlatosan – az ábrán látható görbe. (A mozgás nyilván az $x-y$ síkban történik, így elegendő ezt vizsgálnunk.)

A „földi laboratórium” kifejezés arra utal, hogy a testre ható erők között a mágneses Lorentz-erő mellett a nehézségi erőt is figyelembe kell vennünk. A testre



ható erő komponensei:

$$F_x = Qv_yB, \tag{1}$$

$$F_y = mg - Qv_xB, \tag{2}$$

ahol

$$v_x = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \qquad \text{és} \qquad v_y = \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

a test sebességének megfelelő derékszögű összetevői.

A Newton-féle mozgásegyenletek:

$$F_x = ma_x \qquad \text{és} \qquad F_y = ma_y,$$

ahol

$$a_x = \frac{\Delta v_x(t)}{\Delta t} \qquad \text{és} \qquad y_y = \frac{\Delta v_y(t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

Behelyettesítve az erőkomponenseket a következő mozgásegyenleteket kapjuk:

$$a_x = \omega_0 v_y, \tag{5}$$

és

$$a_y = g - \omega_0 v_x, \tag{6}$$

ahol

$$\omega_0 = \frac{QB}{m} \tag{7}$$

egy körfrekvencia dimenziójú állandó.

Megjegyzés. Ezt a mennyiséget „ciklotronfrekvenciának” nevezik, mert ilyen körfrekvenciával mozog a ciklotronokban egy Q/m fajlagos töltésű részecske a B indukciójú homogén mágneses mezőben.

Felírhatjuk még a munkatételt a töltött részecske mozgására az indulás pillanata és egy tetszőleges későbbi pillanat között. Mivel a Lorentz-erő merőleges a sebességre, tehát nem végez munkát, elegendő a nehézségi erő munkavégzésével számolnunk:

$$\frac{1}{2}m\big(v_x(t)^2 + v_y(t)^2\big) = mgy(t). \tag{8}$$

Innen leolvashatjuk, hogy a test sebessége akkor lesz a legnagyobb, amikor a függőleges elmozdulás (y^*) maximális. Mivel ilyenkor a függőleges irányú sebesség éppen nulla, a vízszintes irányú sebességkomponensre fennáll:

$$v_x^* = \sqrt{2gy^*}. \tag{9}$$

a) és *b*) Írjuk fel az (5) egyenletet a kicsiny sebesség- és elmozdulás-megváltozásokkal, majd összegezzük ezeket a megváltozásokat a mozgás kezdetétől a pálya legmélyebb pontjáig:

$$\frac{\Delta v_x(t)}{\Delta t} = \omega_0 \frac{\Delta y(t)}{\Delta t},$$

$$\sum \Delta v_x(t) = \omega_0 \sum \Delta y(t),$$

ahonnan

$$v_x^* = \omega_0 y^* \tag{10}$$

adódik. Összevetve ezt az eredményt a munkatételből kapott (9) összefüggéssel, válaszolhatunk az első két alkérdésre. A test legnagyobb sebessége

$$|\boldsymbol{v}| = v_x^* = \frac{2g}{\omega_0} = \frac{2mg}{QB},$$

a legmélyebb süllyedése pedig (az indulási magassághoz viszonyítva):

$$y^* = \frac{2g}{\omega_0^2} = \frac{2gm^2}{Q^2B^2}.$$

c) A fentiekhez hasonló módon járhatunk el a vízszintes irányú (6) mozgásegyenlettel, ami

$$\Delta v_y(t) = g\Delta t - \omega_0 \Delta x(t)$$

alakban is felírható. Összegezve a mozgás kezdetétől a legmélyebb pontba érkezés t^* időpillanatáig, amikor a vízszintes irányú elmozdulás x^*, a függőleges irányú sebesség pedig nulla:

$$0 = gt^* - \omega_0 x^*,$$

ahonnan a mozgás ezen szakaszára vonatkoztatott átlagsebesség:

$$\bar{v} = \frac{x^*}{t^*} = \frac{g}{\omega_0} = \frac{mg}{QB}.$$

Mivel a vízszintes irányú mozgás a $0 < x(t) < x^*$ intervallumon történő mozgás ismétlődése, az egész mozgás átlagsebessége (x^*-nál sokkal hosszabb úton) ugyancsak $mg/(QB)$.

d) A pálya legmélyebb pontjánál a test gyorsulása (6) szerint:

$$a_y^* = g - \omega_0 v_x^*,$$

ami (7) és a v_x^*-re kapott kifejezés alapján:

$$a_y^* = g - \frac{QB}{m}\frac{2mg}{QB} = g - 2g = -g.$$

A töltött test tehát éppen a nehézségi gyorsulással megegyezően gyorsul függőlegesen *felfelé.*

Illés Gergely (Eger, Szilágyi Erzsébet Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Tekintsünk egy olyan koordináta-rendszert, amely az indukcióvonalakra merőlegesen, vízszintes irányban $\boldsymbol{v}_0$ sebességgel mozog a laboratóriumi rendszerhez képest. Ha a töltött test pillanatnyi sebessége a „mozgó” rendszerben $\boldsymbol{v}$, akkor a laboratóriumi rendszerben a sebessége $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_0$, így a Newton-féle mozgásegyenlet:

$$m\boldsymbol{a}=Q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_0)\times\boldsymbol{B}+m\boldsymbol{g},$$

amit

$$m\boldsymbol{a}=Q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}+[m\boldsymbol{g}+Q\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}] \tag{11}$$

alakban is felírhatunk. A fenti képletben $\boldsymbol{a}$ a test gyorsulása, ami a laboratóriumi rendszerben ugyanaz a vektor, mint az egyenletesen mozgó másik koordinátarendszerben a gyorsulás.

A (11) egyenlet szögletes zárójelében szereplő két vektor ugyanolyan (függőleges) irányú, és ha $\boldsymbol{v}_0$ nagyságát megfelelően, nevezetesen $v_0=mg/(QB)$ módon választjuk, a két tag éppen kiejtheti egymást. Ekkor a mozgásegyenlet olyan, mintha a test súlytalan lenne, és csak a mágneses Lorentz-erő hatása alatt mozogna. Úgy is mondhatjuk, hogy a mozgó rendszerben megjelenik egy $E=Bv_0$ nagyságú homogén, függőlegesen felfelé irányuló elektromos mező, aminek hatása kiegyenlíti az mg nagyságú, függőlegesen lefelé mutató nehézségi erőt.

Jól ismert, hogy homogén mágneses mezőben a mágneses erővonalakra merőleges kezdősebességgel rendelkező részecske pályája kör, és a részecske a kör mentén $\omega_0=QB/m$ körfrekvenciával egyenletesen mozog. Jelen esetben is ez valósul meg, hiszen a test kezdősebessége a laboratóriumi rendszerben nulla, a mozgó rendszerben tehát v_0 nagyságú. A körpálya sugara

$$R=\frac{v_0}{\omega_0}=\left(\frac{m}{QB}\right)^2 g$$

lesz. A mozgás – a laboratóriumi rendszerből nézve – egy v_0 sebességű egyenletes mozgás és egy v_0 kerületi sebességű körmozgás szuperpozíciója. A pálya alakja ezek szerint *ciklois.*

a) A test sebessége a pálya legmélyebb pontjánál lesz a legnagyobb, ugyanis itt lesz egymással párhuzamos és egyirányú a kétféle mozgáshoz tartozó sebességvektor:

$$v_{\max}=2v_0=2\frac{mg}{QB}.$$

b) A test legnagyobb lesüllyedése a kezdőponthoz képest

$$\Delta h=2R=2\left(\frac{m}{QB}\right)^2 g.$$

c) A test sebessége a vízszintes irányú, állandó v_0 nagyságú sebességnek és a körmozgásból adódó, a nulla körül ingadozó sebességnek a vektori összege. Az eredő (hosszú időtartamra vonatkoztatott) átlagsebesség tehát v_0 nagyságú, vízszintes és a mágneses erővonalakra is merőleges irányú vektor lesz.

d) A test gyorsulása csak a körmozgásból adódik, nagysága a pálya minden pontjában

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \left(\frac{mg}{QB}\right)^2 \cdot \left(\frac{QB}{m}\right)^2 \frac{1}{g} = g$$

nagyságú. A gyorsulás iránya a mozgás kezdetekor függőlegesen lefelé, a pálya legmélyebb pontjában pedig függőlegesen felfelé mutat.

Tófalusi Ádám (Debreceni Fazekas M. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, és induljunk ki a vízszintes és a függőleges irányokra vonatkozó (5) és (6) mozgásegyenletből. Az (5) egyenlet, amit $a_x - \omega_0 v_y = 0$ alakban is felírhatunk, azt fejezi ki, hogy a $v_x(t) - \omega_0 y(t)$ mennyiség változási üteme (deriváltja) nulla, tehát ez a kifejezés *időben állandó.* Az állandó (mivel a kezdőpillanatban v_x is és y is nulla) nulla kell hogy legyen, vagyis

$$v_x(t) = \omega_0 y(t). \tag{12}$$

Helyettesítsük be v_x-et a függőleges irányú mozgásra vonatkozó (6) egyenletbe:

$$a_y(t) = g - \omega_0^2 y(t),$$

amit

$$a_y(t) = -\omega_0^2\big(y(t) - y_0\big) \tag{13}$$

alakban is felírhatunk, ahol $y_0 = g/\omega_0^2$.

Felismerhetjük, hogy (13) egy olyan rugóra akasztott súlyos test mozgásegyenlete, amely test saját súlya alatt a rugó megnyúlása y_0, és a rezgés körfrekvenciája ω_0. A harmonikus rezgőmozgás ismert képleteiből (az $y(0) = 0$ és $v_y(0) = 0$ kezdőfeltételeket is figyelembe véve) könnyen megkaphatjuk, hogy

$$y(t) = \frac{g}{\omega_0^2}(1 - \cos\omega_0 t),$$

$$v_y(t) = \frac{g}{\omega_0}\sin\omega_0 t,$$

$$a_y(t) = g\cos\omega_0 t.$$

Ezekből (12) segítségével rögtön adódik, hogy

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega_0}(1 - \cos\omega_0 t),$$

ennek változási üteme pedig

$$a_x(t) = g\sin\omega_0 t.$$

Az $x(t)$-t úgy kapjuk meg, hogy olyan függvényt keresünk, aminek változási üteme $v_x(t)$, és a kezdőpillanatban nulla értékű:

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2}(\omega_0 t - \sin\omega_0 t).$$

A fenti képletekből a feladat valamennyi kérdésére könnyen megkapjuk a választ: a test legnagyobb sebessége $2g/\omega_0$, legnagyobb lesüllyedése $2g/\omega_0^2$, a mozgás átlagsebessége g/ω_0, és a gyorsulása a pálya legalsó pontjában (és minden más helyes is) g.

Megjegyzés. Mindhárom megoldásban a newtoni mechanika nemrelativisztikus mozgásegyenletéből indultunk ki. Ez csak akkor jogos, ha $v_{\max} \ll c$, vagyis $mg \ll QBc$. Ez sokkal erősebb megszorítás, mint a feladat szövegében szereplő $mg < QBc$.

(G. P.)

21 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2 pont) 5 dolgozat.

P. 4976. *Három kicsiny golyót egy egyenes mentén helyeztünk el úgy, hogy kezdetben nem mozognak, és a szomszédos golyók távolsága d. A golyók tömege és töltése rendre m, $2m$, $5m$, illetve q, q, $2q$.*

a) Mekkora lesz a golyók távolsága és sebessége az indulást követő nagyon rövid t_0 idő múlva?

b) Mekkora lesz a golyók sebessége elegendően hosszú idő múlva?

(Az elektrosztatikus erőkön kívül minden más erőhatás elhanyagolható.)

(5 pont) *A Kvant nyomán*

Megoldás. *a)* Legyen az m tömegű, q töltésű golyó az 1. számú, a $2m$ tömegű, q töltésű a 2. számú, az $5m$ tömegű és $2q$ töltésű pedig a 3. számú test! Vizsgáljuk meg először, hogy mekkora erők hatnak az egyes testekre! Mivel a golyók kicsik, alkalmazhatjuk a ponttöltésekre vonatkozó Coulomb-féle erőtörvényt. A pozitív irányt az 1. testtől a 3. számú test irányába megválasztva rendre felírhatjuk az egyes testre ható eredő erőket a kezdeti helyzetben:

$$F_1 = -k\frac{q^2}{d^2} - k\frac{2q^2}{(2d)^2} = -k\frac{3q^2}{2d^2},$$

$$F_2 = k\frac{q^2}{d^2} - k\frac{2q^2}{d^2} = -k\frac{q^2}{d^2},$$

$$F_3 = k\frac{2q^2}{(2d)^2} + k\frac{2q^2}{d^2} = k\frac{5q^2}{2d^2}.$$

Mivel az indulást követő t_0 nagyon rövid, ezek az erők t_0 idő alatt állandónak tekinthetőek, és így az egyes testek sebessége rendre:

$$v_1 = \frac{I_1}{m} = \frac{F_1 t_0}{m} = -k\frac{3q^2 t_0}{2d^2 m},$$

$$v_2 = \frac{I_2}{2m} = \frac{F_1 t_0}{2m} = -k\frac{q^2 t_0}{2d^2 m},$$

$$v_3 = \frac{I_3}{5m} = \frac{F_1 t_0}{5m} = k\frac{q^2 t_0}{2d^2 m}.$$

(A lendületmegmaradás törvénye szerint $mv_1 + 2mv_2 + 5mv_3 = 0$, és ez valóban teljesül.)

Mivel az erők t_0 idő alatt jó közelítéssel állandóknak tekinthetők, a gyorsulások sem változhatnak ezen idő alatt. Így a golyók átlagsebessége a kezdeti és a t_0 időpontbeli „végsebesség” számtani közepe, amiből megkaphatjuk a testek elmozdulását:

$$r_1 = \frac{0 + v_1}{2} t_0 = -k\frac{3q^2 t_0^2}{4d^2 m},$$

$$r_2 = \frac{0 + v_2}{2} t_0 = -k\frac{q^2 t_0^2}{4d^2 m},$$

$$r_3 = \frac{0 + v_3}{2} t_0 = k\frac{q^2 t_0^2}{4d^2 m}.$$

Ezekből számolható a golyók közötti távolság is:

$$d_{1,2} = d + |r_2 - r_1| = d\left(1 + k\frac{q^2 t_0^2}{2d^3 m}\right),$$

$$d_{2,3} = d + |r_3 - r_2| = d\left(1 + k\frac{q^2 t_0^2}{2d^3 m}\right),$$

$$d_{3,1} = 2d + |r_3 - r_1| = 2d\left(1 + k\frac{q^2 t_0^2}{2d^3 m}\right).$$

b) Használjuk fel az előző részfeladat eredményeit! Látható, hogy kis t_0 idő elteltével az $1-2$ és $2-3$ testek távolságának aránya állandó maradt, hiszen:

$$\frac{d_{1,2}}{d_{2,3}} \equiv 1.$$

Ebből az is következik, hogy újabb kis Δt idő múlva is fenn fog állni ez az arány, mint ahogy az azután következő összes későbbi időpillanatra is. Ennek egyenes következménye, hogy a testek pillanatnyi sebességének aránya is mindvégig ugyanakkora lesz, és így a testek végsebességére (rendre u_1, u_2 és u_3) is fennáll, hogy:

$$u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3 = (-3) : (-1) : (+1).$$

Ezek szerint a végsebességekre teljesül, hogy

$$u_1 = -3u_3 \qquad \text{és} \qquad u_2 = -u_3.$$

Emellett tudjuk, hogy nagyon hosszú idő múlva – amikor a kis golyók olyan távol lesznek, hogy már nem fejtenek ki egymásra számottevő erőt – az elektromos mező kezdeti energiája teljesen átalakul a golyók mozgási energiájává. Felírhatjuk a munkatételt:

$$k\frac{q^2}{d} + k\frac{2q^2}{2d} + k\frac{2q^2}{d} = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}(2m)u_2^2 + \frac{1}{2}(5m)u_3^2,$$

azaz

$$4k\frac{q^2}{d} = \frac{1}{2}m(3u_3)^2 + \frac{1}{2}(2m)u_3^2 + \frac{1}{2}(5m)u_3^2 = 8mu_3^2,$$

vagyis

$$u_3 = \sqrt{\frac{kq^2}{2dm}}, \quad u_1 = -3\sqrt{\frac{kq^2}{2dm}}, \quad u_2 = -\sqrt{\frac{kq^2}{2dm}}.$$

Kondákor Márk (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A fenti gondolatmenet nem minden esetben, hanem csak a q_i töltések és az m_i tömegek bizonyos speciális értékeinél alkalmazható. A golyók távolságának aránya csak akkor marad időben állandó, ha fennáll, hogy

$$-\frac{q_1}{m_1}\left(q_2 + \frac{1}{4}q_3\right) + \frac{q_3}{m_3}\left(q_2 + \frac{1}{4}q_1\right) = 2\frac{q_2}{m_2}(q_1 - q_3).$$

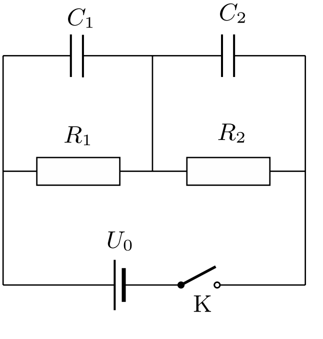
A feladatban szereplő adatok mellett ez az összefüggés teljesül.

Általános esetben, tetszőleges tömeg- és töltésadatok mellett a feladat elemi eszközökkel nem oldható meg.

(G. P.)

51 dolgozat érkezett. Helyes Berke Martin, Debreczeni Tibor, Kondákor Márk, Molnár Mátyás, Morvai Orsolya, Máth Benedek, Póta Balázs és Sal Dávid megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 13, hiányos (1–3 pont) 27, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 4977. *Az ábrán látható kapcsolásban a kapcsoló zárása előtt a kondenzátorok töltetlenek. Egy adott pillanatban zárjuk a kapcsolót. (Az áramforrás belső ellenállásától, a vezetékek és az ellenállások kapacitásától, továbbá a körben lévő elemek induktivitásától tekintsünk el.)*



Ábrázoljuk vázlatosan *a kondenzátorok feszültségét az idő függvényében!*

Adatok: $C_1 = 150\ \mu\text{F}$, $C_2 = 50\ \mu\text{F}$, $R_1 = 40\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 10\ \text{k}\Omega$, $U_0 = 100\ \text{V}$.

(*5 pont*) *Nagy László* (1931–1987) feladata

Megoldás. A kapcsoló zárása előtt a töltetlen kondenzátorok feszültsége nyilván nulla. A kapcsoló zárásakor a kondenzátorok „rövidre zárják” az áramforrást, és – ha a feladat szövegében szereplő közelítésekkel élünk – egy „pillanat alatt” feltöltődnek. A kondenzátorok közös pontjára csak az ellenállásokon keresztül juthat töltés, így az össztöltésük hirtelen nem tud megváltozni, tehát a két kondenzátor (egy nagyon rövid ideig) sorosan kapcsoltnak tekinthető. A hirtelen feltöltődött kondenzátorok kezdeti feszültsége a kapacitások reciprokának arányában megosztott telepfeszültség:

$$\frac{U_{1,0}}{U_{2,0}} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{3}, \qquad U_{1,0} + U_{2,0} = U_0 = 100 \text{ V},$$

vagyis

$$U_{1,0} = 25 \text{ V} \qquad \text{és} \qquad U_{2,0} = 75 \text{ V}.$$

A kapcsoló zárása után elegendően hosszú („végtelen hosszú”) idővel a kondenzátorok töltése már nem változik, a feszültségük tehát valamekkora állandósult $U_{1,\infty}$ és $U_{2,\infty}$ értékre áll be. Ilyenkor az ellenállások közös pontját a kondenzátorok közös pontjával összekötő vezetéken már nem folyik áram, tehát mindkét ellenálláson ugyanakkora áram folyik.

Az ellenállásokra eső feszültség (ami megegyezik a kondenzátorokra eső feszültséggel) az ellenállások arányában osztja meg az áramforrás feszültségét:

$$\frac{U_{1,\infty}}{U_{2,\infty}} = \frac{R_1}{R_2} = 4, \qquad U_{1,\infty} + U_{2,\infty} = U_0 = 100 \text{ V},$$

vagyis

$$U_{1,\infty} = 80 \text{ V} \qquad \text{és} \qquad U_{2,\infty} = 20 \text{ V}.$$

A kondenzátorok feszültségének időbeli változása várhatóan exponenciális függvénnyel írható le. Ezen sejtés szigorú bizonyításához a változásokat megadó differenciálegyenleteket kellene felírnunk és megoldanunk. Szerencsére ennél sokkal egyszerűbben is eljárhatunk. A töltések átrendeződése, azok időbeli változása ugyanolyan jellegű, ugyanolyan „időállandójú” exponenciális függvényekkel írható le a kondenzátorok feltöltődésekor is, mint a kisülésükkor (lásd pl. a *Kondenzátor feltöltése és kisülése ohmos ellenálláson át* című részt a „Függvénytáblázat” 148. oldalán).

Ha az áramforrást (zárt kapcsolóállás mellett) kiiktatjuk az áramkörből és az eredetileg hozzá csatlakozó vezetékeket rövidre zárjuk, akkor egy olyan kapcsoláshoz jutunk, amelyben két párhuzamosan kapcsolt, tehát

$$C_\mathrm{e} = C_1 + C_1 = 200\ \mu\text{F}$$

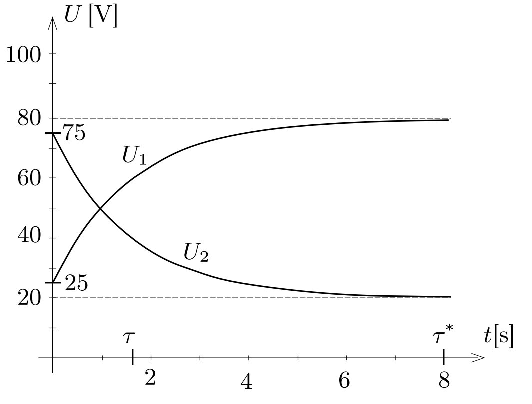
eredő kapacitású kondenzátor két párhuzamosan kapcsolt, tehát

$$R_\mathrm{e} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 8\ \text{k}\Omega$$

eredő ellenálláson keresztül veszíti el töltését. A kisülés folyamata időben exponenciálisan, $e^{-t/\tau}$ függvénnyel leírható módon zajlik le, ahol az időállandó

$$\tau = R_e C_e = \left(8 \cdot 10^3\ \Omega\right) \left(2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{F}\right) = 1{,}6\ \mathrm{s}.$$

Megjegyzés. Simonyi Károly Villamosságtan című könyvében említi, hogy a feszültség beállásának idejét $\tau^* = 5\tau$ idővel szokták közelíteni. Esetünkben a kondenzátorok feszültsége 8 s alatt változik meg a kezdeti értékekről a végső (aszimptotikus) értékekre, ahogy azt az *ábra* mututja.



Tófalusi Ádám (Debreceni Fazekas M. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

20 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 11, hibás 1 dolgozat.

P. 4985. *Egy fényképezőgép objektívjének fókusztávolsága* 3 cm. *Egy távoli tárgyról fényképet készítünk, majd a képet* 3*-szorosára felnagyítjuk. Mit látunk nagyobbnak, a fénykép készítésének helyéről nézve a tárgyat, vagy ugyanezt a tárgyat a fényképen? Hányszor nagyobbnak látjuk?*

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. A leképezési törvény szerint

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}.$$

Ha a t tárgytávolság sokkal nagyobb, mint az f fókusztávolság, akkor a képtávolság $k \approx f$, és a T nagyságú tárgy képének mérete a háromszoros nagyítás után

$$3K = 3\frac{k}{t}T \approx 3\frac{f}{t}T.$$

Ezt a nagyított képet a tisztánlátás $s \approx 25$ cm távolságából

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{3K}{s} = 3\frac{fT}{ts}$$

látószög alatt látjuk. Ugyanekkora látószögben a t távolságra lévő tárgy

$$x = t \operatorname{tg} \alpha = 3\frac{fT}{s}$$

nagyságúnak látszana.

A két (látszólagos) méret aránya (a szemünk ezt az arány „érzékeli"):

$$\frac{T}{x} = \frac{s}{3f} \approx \frac{25\ \mathrm{cm}}{3 \cdot 3\ \mathrm{cm}} \approx 3.$$

A tárgy tehát a fénykép készítésének helyéről nézve kb. 3-szor nagyobbnak látszik a valóságban, mint a háromszorosra nagyított fényképen a tisztánlátás távolságából.

Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)

17 dolgozat érkezett. Helyes Bukor Benedek, Hajdu Ákos, Jáger Baláz, Markó Gábor, Molnár Mátyás és Ónodi Gergely megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 7 dolgozat.

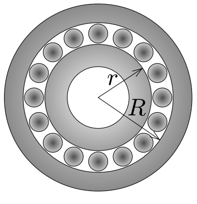
Fizikából kitűzött feladatok

M. 377. Vizsgáljuk meg, hogyan függ egy ampermérővel rövidre zárt napelemen átfolyó áram erőssége a „direkt napsugár" beesési szögétől! Ügyeljünk az ampermérő helyes méréshatár-beállítására!

(*6 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

G. 633. Lehetséges-e, hogy a labdarúgópályán egy szabadrúgás után a kapu felső lécéről a gólvonalon túlra pattanó labda a földről kifelé, a pálya felé pattan?

(*3 pont*)



G. 634. Az *ábrán* látható golyóscsapágy belső gyűrűje mozdulatlan, a golyók középpontjai 0,2 m/s sebességgel futnak körbe. Mekkora a külső gyűrű fordulatszáma, ha $r = 3$ cm, $R = 4$ cm?

(*3 pont*)

G. 635. Egy edényben 0 °C hőmérsékletű víz található. A víz egy részét kiöntjük, 0 °C hőmérsékletű jégdarabbá fagyasztjuk, és visszahelyezzük az edényben maradt vízre, amelyen úszni fog.