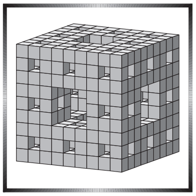


A B pontversenyben kitűzött feladatok (4948–4956.)

B. 4948. Az n pozitív egész számot nevezzük *darabosnak,* ha van olyan prímosztója, amely nagyobb $\sqrt{n}$-nél. Például a 2017 (prímszám), a $2018 = 2 \cdot 1009$ és a $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ darabosak, a $2023 = 7 \cdot 17^2$ nem az. Hány olyan darabos szám van, amelynek csak 30-nál kisebb prímosztói vannak?

(*3 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 4949. Az ABC hegyesszögű háromszög B-ből, illetve C-ből induló magasságának talppontja D, illetve E. Legyen P az AD, Q pedig az AE szakasz olyan belső pontja, amelyre $EDPQ$ húrnégyszög. Mutassuk meg, hogy a BP és CQ szakaszok az A-ból induló súlyvonalon metszik egymást.

(*3 pont*)

B. 4950. Jelöljük F_n-nel az n-edik Fibonacci-számot ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), és definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatot a következő rekurzióval: legyen $a_0 = 2018$, és minden $k \geqslant 0$-ra legyen $a_{k+1} = a_k + F_n$, ahol F_n a legnagyobb a_k-nál kisebb Fibonacci-szám. Előfordul-e az (a_k) sorozatban Fibonacci-szám?

(*4 pont*)

B. 4951. A V halmaz elemei olyan n-dimenziós vektorok (rendezett szám n-esek), amelyek minden koordinátája -1, 0 vagy 1. Semelyik három különböző V-beli vektor összege nem a nullvektor. Mutassuk meg, hogy $|V| \leqslant 2 \cdot 3^{n-1}$.

(*4 pont*)

B. 4952. Át lehet-e darabolni véges sok egyenes vágással egy kockát két kisebb egybevágó kockába?

(*5 pont*) Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)

B. 4953. Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 1$ egész számra

$$\ln n + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{n-1}{n}} < \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 4954. Az ABC háromszög A csúcsán keresztül húzzunk egy BC-vel párhuzamos ℓ egyenest. Az ℓ messe az ABC, illetve az ACB szög belső szögfelezőjét K-ban, illetve L-ben. A beírt kör BC-n levő érintési pontja D. Mutassuk meg, hogy a körülírt kör a KL szakasz Thalész-körét két pontban metszi, és ez a két pont kollineáris D-vel.

(*6 pont*)

B. 4955. Legyen n pozitív egész. Nemnegatív egészekből legfeljebb hány $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots$ rendezett hármast lehet megadni úgy, hogy a következő feltételek teljesüljenek?

(1) Mindegyik i-re $x_i + y_i + z_i = n$.

(2) Az $x_1, x_2, \ldots$ számok mind különbözők, az $y_1, y_2, \ldots$ számok mind különbözők, és a $z_1, z_2, \ldots$ számok is mind különbözők.

Adjunk meg egy ilyen tulajdonságú, maximális hosszúságú sorozatot.

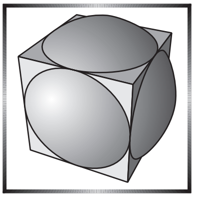
(*6 pont*) Javasolta: *Erben Péter* (Budapest)

B. 4956. Az $ABCD$ tetraédert mindegyik csúcsából lekicsinyítettük; így kaptuk az $AA_bA_cA_d$, $B_aBB_cB_d$, $C_aC_bCC_d$ és $D_aD_bD_cD$ kisebb tetraédereket, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az $A_bB_cC_dD_a$, $A_bB_dD_cC_a$, $A_cC_bB_dD_a$, $A_cC_dD_bB_a$, $A_dD_bB_cC_a$ és $A_dD_cC_bB_a$ tetraéderek térfogata egyenlő.

(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

Beküldési határidő: 2018. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (722–724.)



A. 722. A Hawking Űrtársaság a Lokális Galaxiscsoport n élhető bolygója között $n-1$ darab rögzített árú járatot üzemeltet (az ár oda és vissza mindig megegyezik). Tudjuk, hogy e járatokkal bármelyik élhető bolygóról bármelyik élhető bolygóra el lehet jutni.

Az Űrtársaság központjának falán egy jól látható tábla található, melyen egy arckép mellett fel van tüntetve bármely két különböző élhető bolygóhoz az őket összekötő legolcsóbb járatsorozat ára. Tegyük fel, hogy ezen a táblán éppen az $1, 2, \ldots, \binom{n}{2}$ egységnyi pénzmennyiségek szerepelnek valamilyen sorrendben. Igazoljuk, hogy n vagy $n-2$ négyzetszám.