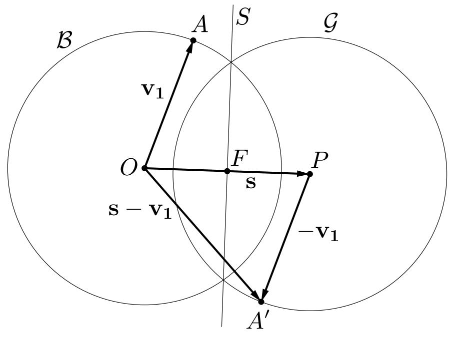
$\mathcal{G}$ és $\mathcal{B}$ egy körben metszik egymást, amely nyilván illeszkedik az OP szakasz S felezőmerőleges síkjára.

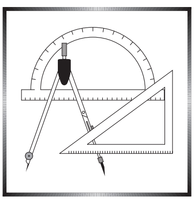
Vetítsük le a $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_M}$ vektorokat az OP egyenesre, és tekintsük a vetületek előjeles hosszát: ha a vetületvektor $\mathbf{s}$-sel egyállású, akkor a hosszát pozitívnak tekintjük, egyébként negatívnak. Mivel a vektorok összege éppen $\mathbf{s}$, azért a vetületek előjeles hosszának összege $|\mathbf{s}|$. Így van olyan vektor, mondjuk $\mathbf{v_1}$, amely vetületének előjeles hossza legfeljebb $|\mathbf{s}|/2$. Ez geometriailag pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{v_1}$ az origóból egy olyan A pontba mutat, amely az S-nek az origót tartalmazó zárt félterébe esik. Messük el a $\mathcal{G}$ és $\mathcal{B}$ gömböket az AOP síkkal, így kapjuk az *ábrát.*



Legyen az A pontnak az OP szakasz F felezőpontjára vett tükörképe A'. Ekkor $\overrightarrow{PA'} = -\mathbf{v_1}$, ezért $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA'} = \mathbf{s} - \mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} + \ldots + \mathbf{v_M}$, azaz $M-1$ darab adott vektor összege. A tükrözés miatt az S sík elválasztja az O és A' pontokat (esetleg $A' \in S$), valamint A' illeszkedik $\mathcal{G}$ felszínére, ezért – ahogyan az az ábráról leolvasható – A' nem lehet a $\mathcal{B}$ gömb belsejében. Így $|\overrightarrow{OA'}| \geqslant 1$, és a bizonyítást befejeztük.

Zsigri Bálint (Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.)

69 dolgozat érkezett. 5 pontos 36, 4 pontos 9, 3 pontos 7, 2 pontos 4, 1 pontos 3, 0 pontos 10 dolgozat.



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1476–1482.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1476. Igazoljuk, hogy az

$$\frac{(y-6)^2}{3xy} + x \cdot \frac{y+3}{y} \geqslant 4 + x - \frac{4}{x} - \frac{xy}{12}$$

egyenlőtlenség minden pozitív x, y valós számpárra teljesül.

C. 1477. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ trapéz AD alapján van olyan E pont, amelyre az ABE, BCE és CDE háromszögek kerülete egyenlő, akkor $BC = \frac{1}{2}AD$.

Feladatok mindenkinek

C. 1478. Egy 37-tel osztható hatjegyű szám számjegyei különbözőek, és nem szerepel közöttük a 0. Mutassuk meg, hogy a számjegyek sorrendjét cserélgetve még legalább hat 37-tel osztható számot kaphatunk.

C. 1479. Egy ABC háromszögben az AC oldal T belső pontjára $TA = BC$, továbbá az AB oldal P belső pontjára a CBP és PAT háromszögek egybevágóak. A BC oldal Q belső pontjára TQ nem párhuzamos AB-vel, és a BPQ háromszög hasonló a TCQ háromszöghöz. Igazoljuk, hogy $PT = QT$.

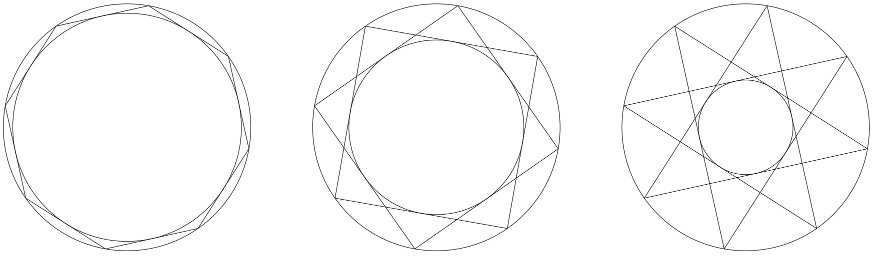
C. 1480. Oldjuk meg az

$$\frac{x^3 - 7x + 6}{x - 2} = \frac{2x + 14}{x + 2}$$

egyenletet az egész számok halmazán.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1481. Egy 2 sugarú körbe írt szabályos nyolcszög csúcsait három különböző módon kötjük össze az *ábra* szerint: minden szomszédos, minden másodszomszédos, majd minden harmadszomszédos csúcsot. Igazoljuk, hogy a három beírt kör sugarának szorzata 2.



C. 1482. Igazoljuk, hogy

$$\left|2\sin x + \sin(2x)\right| < \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\,.$$

❄

Beküldési határidő: 2018. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄