Ebből a 12. évfolyamos könyvek átlagára: $x = 1825$ Ft.

c) Legyen a B, illetve a C kiadók raktárban levő könyveinek száma b, illetve c. Tehát $b + c = 810 - 305 = 505$, és az átlagáruk alapján

$$1500 \cdot 305 + 1800b + 2000c = 810 \cdot 1760, \quad \text{azaz} \quad 18b + 20c = 9681.$$

A két egyenletből (egészre kerekítve): $b = 220$ és $c = 285$.

Kántor Sándor
Debrecen

Matematika feladatok megoldása

B. 4820. *Egy egységnyi oldalú szabályos háromszögrácson kijelöltünk négy olyan rácspontot, amelyek egy $\mathcal{P}$ paralelogramma csúcsai; a $\mathcal{P}$ területe $\sqrt{3}$ egység. Mekkora lehet a $\mathcal{P}$ belsejébe eső rácsszakaszok összege?*

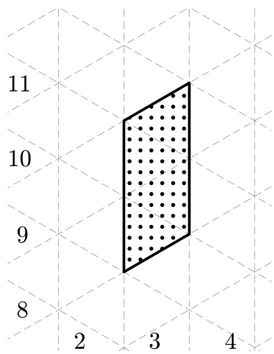
(*6 pont*)

Megoldás. Bontsuk esetekre a feladatot aszerint, hogy egy paralelogramma hány oldala illeszkedik rácsvonalra.

1. eset: Mind a négy oldal rácsvonalra illeszkedik.

Mivel a paralelogramma területe $\sqrt{3}$, ezért 4 rácsháromszöget tartalmaz. Vagyis ekkor a paralelogramma belsejében lévő rácsvonalak összhossza 3 (*1. ábra*).

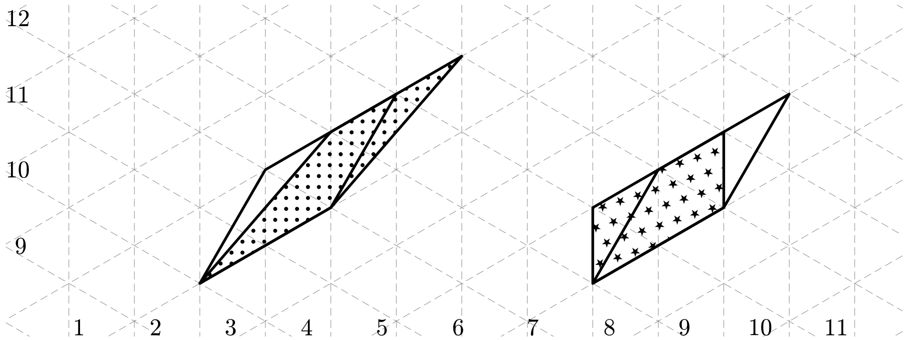
2. eset: Két oldal (nevezzük őket alapoknak) illeszkedik rácsvonalra. Mivel a paralelogramma magassága minimum $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (hiszen két párhuzamos rácsvonal között legalább ekkora a távolság), ezért az alapok hossza csak 1 vagy 2 lehet.



1. ábra

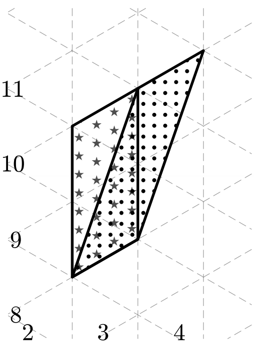
2.a eset: Az alapok hossza 2.

Vegyük észre, hogy ha egy paralelogrammát „eltolunk” egy egységgel (például a *2. ábrán* a pontozottat a simába), akkor nem változik a belső rácsvonalak összege (hiszen a „leeső”, és „bekerülő” háromszögek egybevágóak, eltolhatók egymásba, és ugyanannyi bennük a rácsvonalak összege). Ez csak akkor nem igaz, ha a keletkező paralelogramma mindegyik oldala rácsegyenesre illeszkedik, hiszen ekkor „elvész” az oldal a paralelogramma belsejéből, vagyis ebben az esetben 1-gyel csökken az összhossz (például a *2. ábrán* a sima paralelogrammából a csillagosba való „eltolásnál”).

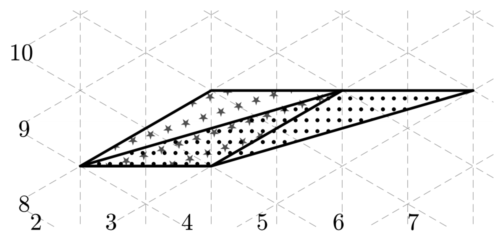


2. ábra

Vagyis az összes ebbe az esetbe illő paralelogrammát eltolhatjuk egy teljesen rácsvonalakra illeszkedő paralelogrammába úgy, hogy közben 1-gyel csökken a belső rácsvonalak összege. Tehát ekkor $3 + 1 = 4$ a belső rácsvonalak összhossza.



3. ábra



4. ábra

2.b eset: Az alapok hossza 1 (*3. ábra*).

Ekkor továbbra is igaz, hogy szabadon tologathatjuk a paralelogrammát, azonban a végén (amikor egy olyan paralelogrammát kapunk, amelynek minden oldala illeszkedik egy rácsegyenesre) a rácsvonalak összege 2-vel csökken. Vagyis ekkor $3 + 2 = 5$ a belső rácsvonalak összhossza.

3. eset: Nincs rácsvonalra illeszkedő oldala a paralelogrammának. Itt is igaz, hogy eltolhatjuk a paralelogrammát (nem feltétlenül egy egységgel), amíg egy olyat nem kapunk, amelynek az egyik oldala már rácsvonalra illeszkedik (*4. ábra*).

Ekkor egy 2. esetbeli paralelogrammát kapunk (hiszen az eltolás nem változtat a paralelogramma területén), vagyis kétféle lehet:

– Ha az alapja 2, akkor az eltolás során 2-vel csökkent a belső rácsvonalak összhossza, vagyis kezdetben $4 + 2 = 6$ volt.

– Ha az alapja 1, akkor az eltolás során 1-gyel csökkent a belső rácsvonalak összhossza, vagyis kezdetben $5 + 1 = 6$ volt.

Tehát ebben az esetben mindig 6 a belső rácsvonalak összhossza

Tehát egy $\sqrt{3}$ területű paralelogrammában a rácsvonalak összhossza 3, 4, 5 vagy 6 lehet.

Tóth Viktor (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)

58 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 24 versenyző: Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Beke Csongor, Borbényi Márton, Deák Bence, Gáspár Attila, Győrffy Ágoston, Imolay András, Kerekes Anna, Kocsis Júlia, Kovács Benedek, Kővári Péter Viktor, Márton Dénes, Matolcsi Dávid, Pap Benedek, Simon Dániel Gábor, Szabó Kristóf, Szakály Marcell, Szemerédi Levente, Tiderenczl Dániel, Tóth Viktor, Vankó Miléna, Várkonyi Dorka, Zólomy Kristóf. 5 pontos 2, 4 pontos 1, 3 pontos 3, 2 pontos 12, 1 pontos 12, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 4865. *Egy hegyesszögű háromszög a és b oldalai által bezárt szög harmadolói f és g. Igazoljuk, hogy*

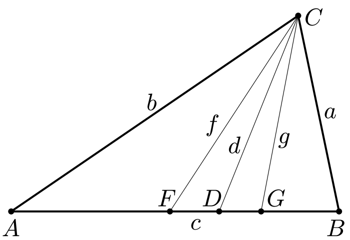
$$\frac{f+g}{2} < \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

(*6 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit, a C-ből induló szögfelező hossza legyen d, a háromszög belső szögei α, β és γ. Írjuk fel $ABC\triangle$ területét kétféleképpen:

$$\frac{ab\sin\gamma}{2} = T_{ABC} = T_{ADC} + T_{BCD} =$$

$$= \frac{db\sin\frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{ad\sin\frac{\gamma}{2}}{2}.$$



Innen, felhasználva hogy $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, kapjuk:

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{d}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

A kitűzöttnél erősebb

$$(1) \qquad \max\{f,g\} < \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{d}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

állítást fogjuk igazolni. Az FDC háromszögben $F\sphericalangle = \alpha + \gamma/3$ és $D\sphericalangle = \beta + \gamma/2$, így a szinusz-tétel szerint

$$\frac{f}{d} = \frac{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}.$$

Megmutatjuk, hogy ha $0<\alpha,\gamma<\pi/2$ és $\alpha+\gamma \geqslant \pi/2$, akkor

$$(2) \qquad \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)} < 1.$$

Ebből, mivel f és g szerepe szimmetrikus, következik (1). Először tegyük fel, hogy $\alpha+\gamma=\pi/2$. Ekkor

$$\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\gamma}{3}\right)}=\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{2\gamma}{3}}=$$

$$=\frac{1+\cos\gamma}{2\cos\frac{2\gamma}{3}}=\frac{1+4\cos^3\frac{\gamma}{3}-3\cos\frac{\gamma}{3}}{4\cos^2\frac{\gamma}{3}-2}.$$

Mivel $0<\gamma/3<\pi/6$, így $\sqrt{3}/2<\cos\gamma/3<1$. Az $x:=\cos\gamma/3$ jelölést bevezetve ez a bizonyítandó állítás:

$$\frac{4x^3-3x+1}{4x^2-2}<1 \;\Leftrightarrow\; 4x^3-4x^2-3x+3<0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(4x^2-3)<0.$$

Ez pedig nyilvánvalóan teljesül, mert $x-1<0$ és $4x^2-3>0$, ezért $\alpha+\gamma=\pi/2$ esetén (2)-t beláttuk.

Most rögzítsük γ-t, és legyen

$$f(\alpha)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}.$$

Megmutatjuk, hogy f a $[\pi/2-\gamma,\pi/2]$ intervallumon monoton csökken. Ehhez deriváljuk f-et:

$$f'(\alpha)=\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}{\sin^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{-\gamma}{6}}{\sin^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}.$$

A derivált triviálisan negatív, így f valóban monoton csökkenő. Ebből és az $\alpha+\gamma=$ $=\pi/2$ speciális esetből (2) és így az állítás is következik.

Megjegyzések: 1. A (2) egyenlőtlenséget deriválás nélkül, trigonometrikus azonosságok ügyes alkalmazásával is igazolhatjuk. Érdemes azonban a bemutatott módszert észben tartani, amikor egyenlőtlenséget akarunk bizonyítani. Ha a derivált előjele triviálisan látszik, mint esetünkben is, akkor biztosan megkönnyíti a számolást.

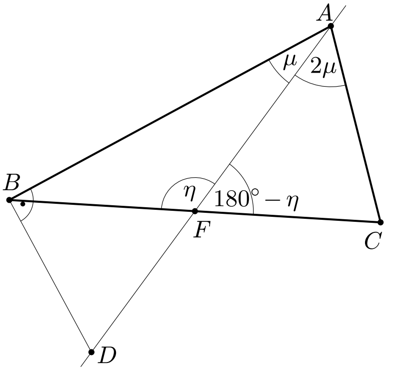
2. Honlapunkon található a feladatra két elemi megoldás, amelyek nem használnak differenciálszámítást.

18 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 11 versenyző: Beke Csongor, Borbényi Márton, Csahók Tímea, Daróczi Sándor, Gáspár Attila, Imolay András, Kerekes Anna, Kővári Péter Viktor, Németh 123 Balázs, Szabó Kristóf, Tóth Viktor. 5 pontos 1, 4 pontos 1, 2 pontos 4, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4868. *Az ABC háromszögben $AC < AB$, és az AF súlyvonal az A-nál lévő szöget $1:2$ arányban osztja. A B-ben AB-re állított merőleges az AF egyenest D-ben metszi. Mutassuk meg, hogy $AD = 2AC$.*

(*3 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Írjuk fel a szinusz-tételt az ABF, illetve az AFC háromszögekben:



$$\frac{AB}{BF} = \frac{\sin\eta}{\sin\mu};$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{\sin(180^\circ - \eta)}{\sin 2\mu}.$$

Továbbá definíció szerint az ABD derékszögű háromszögben $\cos\mu = AB/AD$. Felhasználva, hogy $BF = FC$, valamint a $\sin 2\mu = 2\sin\mu\cos\mu$ azonosságot a következőket kapjuk:

$$AC = \frac{\sin(180^\circ - \eta)}{\sin 2\mu}CF = \frac{\sin\eta}{2\sin\mu\cos\mu}BF = \frac{\sin\eta}{\sin\mu}BF \cdot \frac{1}{2\cos\mu} = \frac{AB}{2\cos\mu} = \frac{AD}{2}.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

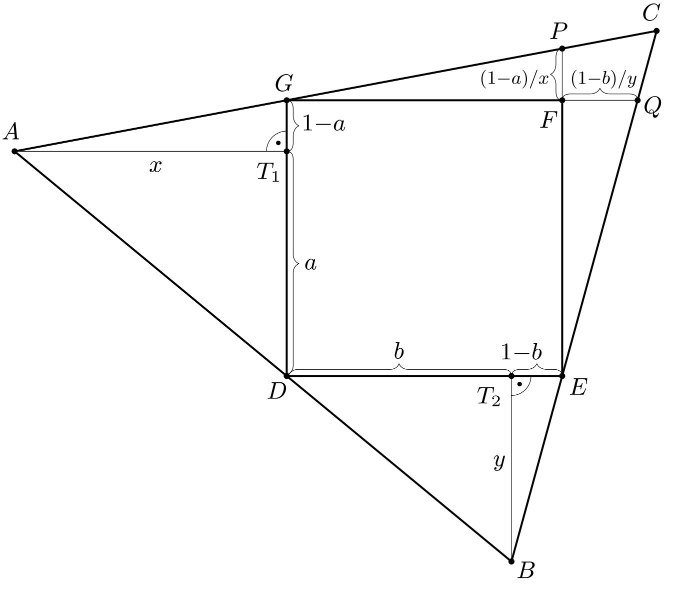
53 dolgozat érkezett. 3 pontos 48, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4884. *Legalább mekkora egy olyan háromszögnek a területe, mely magába foglal egy egységnégyzetet?*

(*6 pont*) Javasolta: *Bogár Péter* (Békéscsaba)

Megoldás. A minimális területű háromszög minden oldala biztosan tartalmazza a négyzetnek legalább egy pontját, különben a megfelelő oldalegyenest a négyzet irányába párhuzamosan eltolhatnánk, amivel a háromszög területét csökkentenénk. Világos, hogy ha a háromszög egyik oldala tartalmazza a négyzet egy oldalának egy belső pontját, akkor az egész oldalt is tartalmazza (mivel a háromszög tartalmazza a négyzetet), ezért feltehetjük, hogy a minimális területű háromszög minden oldala biztosan tartalmazza a négyzetnek legalább egy csúcsát. Ha két oldal ugyanazt a négyzetcsúcsot tartalmazza, akkor a háromszögnek és négyzetnek van egy közös csúcsa. E közös csúcs körül a háromszög illeszkedő oldalait elforgathatjuk, hogy rendre egybeessenek a négyzet oldalaival, ezzel a háromszög területét nem növeljük.

Összességében azt kaptuk, hogy az *ábra* általános érvényű azzal a kiegészítéssel, hogy a $CPFQ$ négyszög esetleg szakasszá vagy ponttá fajulhat (s ezzel együtt az AT_1G és BT_2E háromszögek is elfajulhatnak természetesen), ezek azonban gondolatmenetünket érdemben nem befolyásolják. Használjuk tehát az ábra jelöléseit, továbbá legyen $DT_1 = a$, $AT_1 = x$; $DT_2 = b$ és $BT_2 = y$. Ekkor $GT_1 = 1 - a$ és



$ET_2 = 1-b$. A szögeik egyenlősége miatt $AT_1G\triangle \sim GFP\triangle$ és $BT_2E\triangle \sim EFQ\triangle$ teljesül, amiből $PF = (1-a)/x$ és $FQ = (1-b)/y$ adódik. Továbbá

$$ADT_1\triangle \sim DBT_2\triangle$$

miatt $ab = xy$ is teljesül. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x/a \leqslant 1$. (Különben $y/b \leqslant 1$, és a szerepek szimmetrikusak.)

Becsüljük alulról az ABC háromszög T területét:

$$T \geqslant T - T_{FQCP} = T_{DEFG} + T_{ADG} + T_{BED} + T_{FPG} + T_{QFE} = \tag{1}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\frac{1-a}{x}}{2} + \frac{\frac{1-b}{y}}{2} = 1 + \frac{x + y + \frac{1-a}{x} + \frac{1-b}{y}}{2}.$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{1-a}{x} + \frac{1-b}{y} - \frac{1-xy}{y} = \frac{1}{x} - \frac{a}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y} - \frac{b}{y} + x = x + \frac{1}{x} - \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right) \geqslant 0,$$

ugyanis a feltevés szerint $a \leqslant 1$, s így $x \leqslant \frac{x}{a} \leqslant 1$ teljesül, továbbá az $f(t) = t + 1/t$ függvény a $(0,1]$ intervallumon monoton csökken. Ebből, folytatva (1)-et, tovább becsülhetjük alulról T-t:

$$T \geqslant 1 + \frac{x + y + \frac{1-xy}{y}}{2} = 1 + \frac{y + \frac{1}{y}}{2} \geqslant 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha $T_{FQCP} = 0$, azaz a négyzet egyik oldala illeszkedik a háromszög valamely oldalára (a négyzet maradék két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalán van). Egyszerű számolással meggyőződhetünk róla, hogy ilyenkor valóban $T=2$.

Tehát egy egységnégyzetet magában foglaló háromszög területe legalább 2 területegység.

Daróczi Sándor (Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn., 11. évf.)

36 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 16 versenyző: Baran Zsuzsanna, Daróczi Sándor, Döbröntei Dávid Bence, Fülöp Anna Tácia, Gáspár Attila, Győrffy Ágoston, Imolay András, Kerekes Anna, Kővári Péter Viktor, Lakatos Ádám, Scheidler Barnabás, Sulán Ádám, Szabó 417 Dávid, Tiderenczl Dániel, Tóth Viktor, Weisz Máté. 5 pontos 3, 4 pontos 6, 3 pontos 6, 2 pontos 4, 1 pontos 1 dolgozat.

B. 4894. *Hét rabló a zsákmányolt aranytallérokat úgy osztja el, hogy névsor szerint haladva annyit vesznek el, amennyi a még nem szétosztott aranytallérok számában a számjegyek összege. Két teljes kör után az arany elfogy. Mindenkinek ugyanannyi jutott, csak a vezérnek lett több. Hányadik volt a vezér a névsorban?*

(*4 pont*) *Matlap* (Kolozsvár)

Megoldás. Miután az első rabló elvesz annyi aranytallért, amennyi a zsákmányolt aranytallérok számában a számjegyek összege, a megmaradt tallérok száma biztosan osztható lesz 9-cel, hiszen a 9-cel való oszthatósági szabály alapján a számjegyek összegének 9-es maradéka ugyanannyi, mint a szám 9-es maradéka.

Még 13-szor veszik el egy 9-cel osztható összegből mindig az összeg számjegyeinek összegét, ami szintén osztható 9-cel, tehát minden lépésben 9-cel osztható szám marad.

Mivel a tallérok elfogynak, az utolsó lépésben elvett tallérok száma csak egyjegyű, 9-cel osztható szám lehet, mert a kettő vagy többjegyű számok nagyobbak számjegyeik összegénél. Tehát a 14-dik lépésben elvett tallérok száma 9.

Mivel 14-szer vesznek el az aranyból és ebből 13-szor biztosan a 9 többszörösét, a kiindulási szám biztosan nagyobb, mint 100.

Nézzük azt esetet, amikor az aranyak száma még háromjegyű, egy rabló elveszi a számjegyek összegét és a maradék aranyak száma már csak kétjegyű lesz:

$$\overline{abc}-(a+b+c)=99a+9b.$$

Mivel $a>0$, ezért ez a szám csak akkor kétjegyű, ha $a=1$ és $b=0$. Tehát valamikor az elvételek során az aranyak száma 99 lesz.

Ezután a következő módon fog fogyni az arany:

a tallérok száma	99	81	72	63	54	45	36	27	18	9	0
a tallérok számában a számjegyek összege	18	9	9	9	9	9	9	9	9	9	0

Ez összesen 10 lépés, tehát az 5. rabló volt az, aki 99 tallérból 18-at vett el. A feladat szövege szerint a vezéren kívül mindenkinek ugyanannyi jut, tehát ők mindkét alkalommal 9-9 aranyat vettek. Ezt felhasználva az első öt tallér elvétel így alakul:

a tallérok száma	135	126	117	108	99	81
a tallérok számában a számjegyek összege	9	9	9	9	18	9

Tehát a vezér az 5. volt a névsorban.

Markó Anna Erzsébet (Révkomárom, Selye János Gimnázium, 11. évf.) és
Vida Tamás (Győr, Kazinczy F. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

221 dolgozat érkezett. 4 pontos 109, 3 pontos 63, 2 pontos 19, 1 pontos 26, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 4905. *Legyen* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n-1} \geqslant a_{2n} \geqslant 0$, *illetve* $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 1$. *Igazoljuk, hogy*

$$a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Mikor teljesül egyenlőség?

(*4 pont*)

Megoldás. Ha valamilyen $k \leqslant n$-re $a_{2k-1} = 0$, akkor $a_{2k-1} = a_{2k} = \ldots = a_{2n-1} = a_{2n} = 0$, és ugyanolyan feltételek mellett feladatként a bizonyítandó egyenlőtlenség $n = k-1$ esetét kapjuk. Ha pedig $a_{2k-1} > 0 = a_{2k}$, akkor hasonlóan elég $n = k-1$-re igazolni az állítást. Ezért az egyenlőtlenség bizonyítása során feltesszük, hogy a_{2n}, és így valamennyi a_j pozitív.

A feltételek szerint minden $t > k$-ra $a_{2t-1}a_{2t} \leqslant a_{2k-1}a_{2k}$, azaz

$$a_{2t-1}a_{2t} \leqslant \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}a_{2t-1}a_{2t}};$$

így

$$(2t-1)a_{2t-1}a_{2t} \leqslant a_{2t-1}a_{2t} + 2\sum_{k=1}^{t-1} \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}a_{2t-1}a_{2t}}.$$

A kapott egyenlőtlenségeket összeadva:

$$\sum_{t=1}^{n} (2t-1)a_{2t-1}a_{2t} \leqslant \sum_{t=1}^{n} a_{2t-1}a_{2t} + 2\sum_{1 \leqslant k < t \leqslant n} \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}\sqrt{a_{2t-1}a_{2t}} =$$

$$= \left(\sum_{b=1}^{n} \sqrt{a_{2b-1}a_{2b}}\right)^2.$$

Az utóbbi összeg mindegyik tagjára a (kéttagú) számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget felírva:

$$\left(\sum_{b=1}^{n} \sqrt{a_{2b-1}a_{2b}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{b=1}^{n} \frac{a_{2b-1}+a_{2b}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Egyenlőséget akkor kapunk, ha valamennyi $a_{2t-1}a_{2t} \leqslant a_{2k-1}a_{2k}$ és $\sqrt{a_{2b-1}a_{2b}} \leqslant \leqslant \frac{a_{2b-1}+a_{2b}}{2}$ becslésünkben egyenlőség áll. Előbbieknél ez ($a_j > 0$ miatt) $a_{2t-1} = = a_{2k-1}$ és $a_{2t} = a_{2k}$ (minden $k < t$-re), utóbbiaknál pedig $a_{2b-1} = a_{2b}$ esetén (minden b-re) teljesül, vagyis $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n}$-re. Az általános esetben tehát az egyenlőség teljesülésének szükséges és elégséges feltétele

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad \text{vagy}$$

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2v} = \frac{1}{2v}, \quad a_{2v+1} = a_{2v+2} = \ldots = 0, \quad \text{valamely} \quad 1 \leqslant v < n\text{-re.}$$

Kupás Vendel Péter (Gyöngyösi Berze Nagy János Gimn., 12. évf.)

70 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 10 versenyző: Bukva Dávid, Fülöp Anna Tácia, Gáspár Attila, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Kovács Tamás, Kupás Vendel Péter, Nagy Nándor, Terjék András József, Weisz Máté. 3 pontos 25, 2 pontos 8, 1 pontos 21, 0 pontos 6 dolgozat.

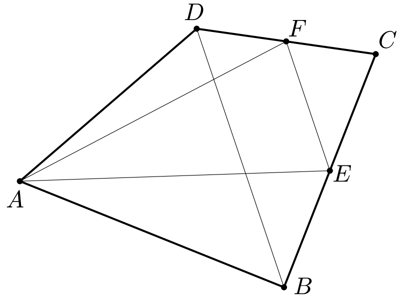
B. 4906. *Az $ABCD$ konvex négyszög BC és CD oldalainak felezőpontja rendre E és F. Az AE, EF és AF szakaszok a négyszöget négy olyan háromszögre bontják, melyek területeinek mérőszáma négy egymást követő egész szám. Legfeljebb mekkora lehet az ABD háromszög területe?*

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

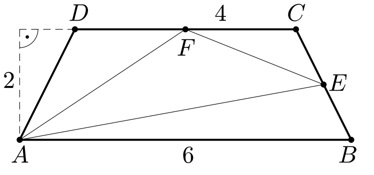
Megoldás. Használjuk az *1. ábrát.* Legyenek az ABE, AEF, AFD, FEC háromszögek területeinek mérőszámai (nem feltétlenül ebben a sorrendben) az n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ pozitív egész számok. Ekkor $T_{ABCD} = 4n+6$. Mivel $T_{ABCD} = = T_{ABD} + T_{BCD}$, emiatt T_{ABD} pontosan akkor maximális, ha T_{BCD} minimális.

Másfelől a BCD háromszögben EF a BD-vel párhuzamos középvonal, emiatt a BCD háromszög hasonló az ECF háromszöghöz. A hasonlóság aránya 2, így a háromszögek területeire $T_{BCD} = 4 \cdot T_{ECF}$ teljesül.

Mivel T_{ECF} az n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ számokból kerül ki, ezért T_{BCD} akkor a legkisebb, ha $T_{ECF} = n$, és ekkor $T_{BCD} = 4 \cdot T_{ECF} = 4n$. Ekkor $T_{ABD} = = T_{ABCD} - T_{BCD} = (4n+6) - 4n = 6$.



1. ábra



2. ábra

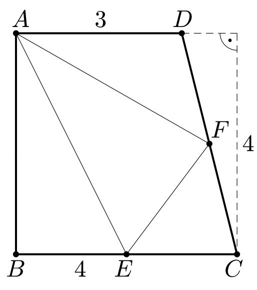
Vagyis az ABD háromszög területének lehető legnagyobb értéke 6 területegység.

Meg kell még mutatnunk, hogy létezik megfelelő $ABCD$ négyszög. Ehhez néhány példa a beküldött jó konstrukciók közül. (*Sajnos a beküldött megoldások jelentős részében ezt elfelejtették megmutatni, ezért a viszonylag sok* 4 *pontos dolgozat.*)

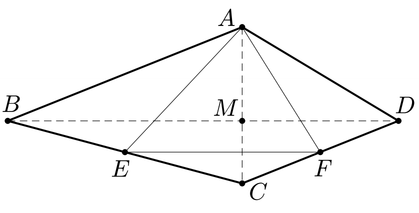
1. példa: Legyen $ABCD$ olyan trapéz, melynek alapjai $AB=6$, illetve $CD=4$ és az alapokhoz tartozó magassága 2 (*2. ábra*). Ekkor $T_{ABD}=6$; $T_{ABCD}=10$, $T_{ABE}=3$, $T_{AFD}=2$ és $T_{ECF}=1$, amiből $T_{AEF}=10-(3+2+1)=4$.

2. példa: Most $ABCD$ olyan trapéz, melynek alapjai $BC=4$, illetve $AD=3$ és az alapokhoz tartozó magassága 3 (*3. ábra*). Ekkor $T_{ABD}=6$; $T_{ABCD}=14$, $T_{ABE}=4$, $T_{AFD}=3$ és $T_{ECF}=2$, amiből $T_{AEF}=14-(4+3+2)=5$.

(*Több példa voltaképpen ezen a két ábrán alapult; az alapokat felezve, kétszerezve, vagy $\sqrt{2}$-vel osztva, míg a magasságot pont fordítva alakítva: duplázva, felezve, illetve $\sqrt{2}$-vel szorozva.*)



3. ábra



4. ábra

3. példa: Az utolsó példánk (bár AB itt is párhuzamos CD-vel) arra épít, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra. Legyen $ABCD$ olyan négyszög, melynek átlói merőlegesen metszik egymást az M pontban,

$$AM=\frac{6\sqrt{2}}{5},\quad CM=\frac{4\sqrt{2}}{5},\quad BM=3\sqrt{2}\ \text{ és }\ DM=2\sqrt{2}$$

hosszú (*4. ábra*). Ekkor

$$T_{ABE}=\frac{T_{ABC}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\left(\frac{6\sqrt{2}}{5}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)}{2\cdot 2}=3,$$

$$T_{AFD}=\frac{T_{ACD}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{6\sqrt{2}}{5}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)}{2\cdot 2}=2,$$

míg

$$T_{ECF}=\frac{T_{BCD}}{4}=\frac{\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\cdot\frac{4\sqrt{2}}{5}}{2\cdot 4}=1.$$

Mivel

$$T_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{5\sqrt{2}\cdot\frac{10\sqrt{2}}{5}}{2}=10,\quad \text{innen}\quad T_{AEF}=10-(3+2+1)=4.$$

Végül

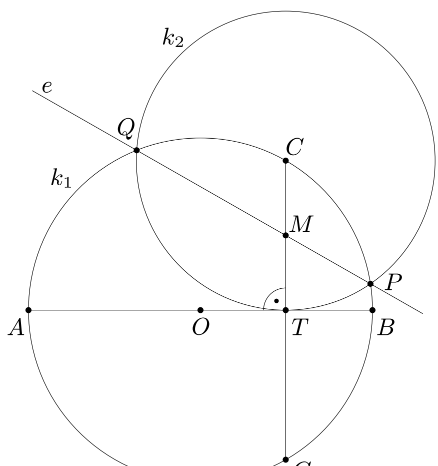
$$T_{ABD}=\frac{\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\cdot\frac{6\sqrt{2}}{5}}{2}=6.$$

Győrffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.),
Lukács Lilla Réka (Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.),
Olosz Adél (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn. és Szakgimn., 11. évf.) és
Schrettner Jakab (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 101 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 44 versenyző, 4 pontos 48, 3 pontos 6, 2 pontos további 3 tanuló dolgozata.

B. 4908. *Legyen C az AB átmérőjű körvonal tetszőleges pontja. A C pont merőleges vetülete az AB szakaszra legyen T. Rajzoljuk meg a C középpontú, T-n átmenő kört és a két kör metszéspontjai legyenek P és Q. Bizonyítsuk be, hogy a PQ egyenes felezi a CT szakaszt.*

(*4 pont*) (*Kvant*)



Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Tudjuk, hogy olyan kör inverz képe, amely átmegy az alapkör középpontján, egyenes lesz. A k_1 kör átmegy a k_2 kör középpontján valamint P és Q pontjain, így a k_1 kör k_2 körre vett inverz képe a $PQ=e$ egyenes lesz.

Tükrözzük a C pontot az AB egyenesre, legyen a tükörkép C_1. Ekkor $CC_1=2CT$.

Invertáljuk a C_1 pontot a k_2 körre. Mivel C_1 rajta van a k_2 kör CT sugarának meghosszabbításán, így képe a CT sugárra esik. Mivel rajta van a k_1 körön is, ezért képének rajta kell lenni az e egyenesen, mert ez a k_1 kör inverz képe. Tehát a C_1 pont inverz képe a CT sugár és az e egyenes metszéspontja, M lesz.

Az inverzió tulajdonságai miatt:

$$|CM|\cdot|CC_1|=|CT|^2,$$

$$|CM|=\frac{|CT|^2}{|CC_1|}=\frac{|CT|^2}{2|CT|}=\frac{|CT|}{2}.$$

Tehát az M pont, és így a PQ egyenes felezi a CT szakaszt.

Hervay Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) és
Velkey Vince (Budapest, Piarista Gimnázium, 12. évf.)
megoldása alapján

62 dolgozat érkezett. 4 pontos 50, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 3, 0 pontos 5 dolgozat.

B. 4911. *Egy* 8×8*-as sakktáblára bábukat helyeztünk úgy, hogy minden sorba és minden oszlopba is páratlan számú bábu került. Bizonyítsuk be, hogy a sötét mezőkön összesen páros sok bábu áll.*

(*5 pont*)

I. megoldás. A sakktáblának ez a tulajdonsága nem változik, ha a tábla két oszlopát vagy sorát (a rajtuk álló bábukkal együtt) megcseréljük, hiszen oszlopcserénél az oszlopokban nyilván megmarad ez a tulajdonság, a sorokban meg csak annyi történt, hogy adott soron belül kicseréltünk két mezőt, így a paritás szintén nem változik. Ugyanez a helyzet sorcserénél is.

Tehát szabadon cserélgethetjük az oszlopokat és a sorokat, az említett tulajdonságon ez nem fog változtatni. Számozzuk meg az eredeti sakktáblán a sorokat fentről lefele s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 és s_8 jelöléssel, az oszlopokat pedig balról jobbra o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7 és o_8 jelöléssel. Cserélgessük úgy a sorokat, hogy utána a sorrend s_1, s_3, s_5, s_7, s_2, s_4, s_6, s_8 legyen, az oszlopokat pedig úgy, hogy a sorrendjük o_1, o_3, o_5, o_7, o_2, o_4, o_6, o_8 legyen. Ekkor úgy fog kinézni a tábla, hogy négy 4×4-es négyzetre lesz felosztva, amelyek közül kettő átellenes csupa fekete, a másik kettő meg fehér mezőkből áll. Erre tehát ugyanúgy teljesülnek a fenti feltételek, vagyis, hogy minden oszlopban és sorban páratlan számú mezőn áll bábu. Nézzük az egyik 4×8-as téglalapot, amelynek sorai s_1, s_3, s_5 és s_7. Ebben összesen négy sor van, mindben páratlan darab bábu, azaz összesen páros darab van, tehát ha a 4×4-es fekete részen összesen páros darab bábu áll, akkor a 4×4-es fehér részen is, ha pedig páratlan, akkor a fehéren is, vagyis ugyanaz a paritása a felső két 4×4-es négyzetben lévő bábuk számának. Ugyanígy látható, hogy a jobb felső 4×4-es fehér, és a jobb alsó 4×4-es fekete négyzetben lévő bábuk számának is ugyanaz a paritása, azaz a két fekete résznek is meg fog egyezni. Ez pedig azt jelenti, hogy bennük összesen páros számú bábu van, és éppen ezt akartuk belátni.

Csizmadia Viktória (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Mivel minden sorban páratlan számú bábu van, összesen páros bábu van a táblán (mivel számuk nyolc páratlan szám összege).

Egy sakktáblán azoknak a mezőknek ugyanolyan a színe, ahol a sor és az oszlop (amelyben a mező van) sorszámának összege ugyanolyan paritású. Tegyük fel, hogy akkor világos az adott mező, ha ez a szám páros (fordított esetben a lenti bizonyítás azt adja meg, hogy páros számú bábu áll világos mezőkön, de ebből következik, hogy sötéten is).

Vegyük az alábbi összeget: minden páros számú sornak és oszlopnak vesszük a bennük szereplő bábuk számát, majd ezt a nyolc számot összeadjuk. Az összeg (mivel mindegyik tagja páratlan és nyolc tagja van) páros. Ebben az összegben kétszer számoltuk azokat a mezőket, ahol a sor és az oszlop száma is páros (ezek világosak), így ez nem változtat az összeg paritásán. Egyszer sem számoltuk azokat, amelyeknél a sor és az oszlop száma is páratlan, így ezek sem változtatnak a paritáson (ezek a mezők is világosak). Egyszer számoltuk azokat, ahol vagy a sor, vagy az oszlop sorszáma páros, de nem mindkettőé (ezek a sötét mezők). Így ezeknek a száma határozza meg az összeg paritását. Ha az ezeken a mezőkön álló bábukból páratlan sok lenne, az összeg is páratlan lenne, ami ellentmondás. Így bizonyítottuk az állítást, páros sok bábu áll a sötét mezőkön.

Molnár Bálint (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Tudjuk, hogy lehet a bábuknak olyan elhelyezkedése, amikor páros sok bábu van a sötét mezőkön. Ha például csak a főátlóra teszünk nyolc darab bábut, akkor a sötét mezőkön nulla darab bábu lesz. Ekkor minden sorban és oszlopban egy bábu áll.

Ahhoz, hogy egy másik jó elhelyezkedést megkapjunk, egy vagy több rácstéglalap csúcsában levő mezőket kell „megváltoztatni". Egy mezőt megváltoztatni azt jelenti, hogy, ha eddig volt ott bábu, akkor levesszük, ha eddig nem volt, akkor meg felteszünk egyet. Ez azért igaz, mert minden sorban és oszlopban páros sok mezőt kell megváltoztatunk, és ezt csak így lehet megtenni. Nyilván, ha egy lépésben kétszer változtatunk meg egy mezőt, akkor ugyanolyan marad.

Egy rácstéglalap mindenképpen páros sok sötét mezőt tartalmaz, hiszen, ha az „alsó" két mező különböző, akkor a „felső" kettő is, ha pedig azonosak, akkor a „felső" kettő is azonos. Így egy lépésben egy páros számmal változik a lefedett sötét mezők száma.

Ezekkel a lépésekkel minden lehetséges bábu-elhelyezkedést meg tudunk kapni, hiszen minden sorban és oszlopban akár 7 mezőt is beállíthatunk tetszőlegesen, a 8. pedig ezektől függ.

Ha a kiindulásnál páros sok sötét mezőn állt bábu, és minden lépésben páros sokat változtattunk meg, akkor mindig páros sok ilyen mező lesz.

Várkonyi Zsombor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

105 dolgozat érkezett. 5 pontos 64, 4 pontos 5, 3 pontos 3, 2 pontos 15, 1 pontos 9, 0 pontos 9 dolgozat.

B. 4918. *Mutassuk meg, hogy M darab ($M \geqslant 2$) térbeli egységvektorból ki lehet választani $M-1$ olyat, amelyek összegének hossza legalább egységnyi.*

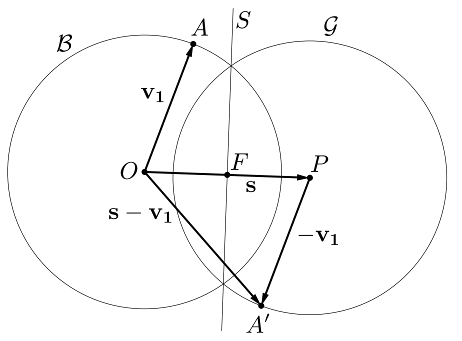
(*5 pont*)

Megoldás. Az adott egységvektorok legyenek $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_M}$, az O origó középpontú egységnyi sugarú gömböt jelölje $\mathcal{B}$. Legyen P az a pont, aminek helyvektora $\mathbf{s} = \mathbf{v_1} + \ldots + \mathbf{v_M}$; továbbá a P középpontú egységgömböt jelölje $\mathcal{G}$.

Világos, hogy ha a $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_M}$ vektorok közül egyet elhagyunk, akkor a maradék összege az origóból valahova $\mathcal{G}$ felszínére mutat. Ezért ha $\mathcal{G}$ felszíne nem metsz bele $\mathcal{B}$ belsejébe, akkor bármely $M-1$ vektort kiválaszthatjuk, ezek összege „kimutat $\mathcal{B}$-ből", így legalább egységnyi hosszúságú. A továbbiakban tegyük fel, hogy

$\mathcal{G}$ és $\mathcal{B}$ egy körben metszik egymást, amely nyilván illeszkedik az OP szakasz S felezőmerőleges síkjára.

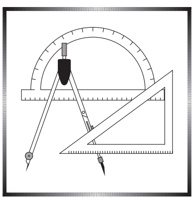
Vetítsük le a $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_M}$ vektorokat az OP egyenesre, és tekintsük a vetületek előjeles hosszát: ha a vetületvektor $\mathbf{s}$-sel egyállású, akkor a hosszát pozitívnak tekintjük, egyébként negatívnak. Mivel a vektorok összege éppen $\mathbf{s}$, azért a vetületek előjeles hosszának összege $|\mathbf{s}|$. Így van olyan vektor, mondjuk $\mathbf{v_1}$, amely vetületének előjeles hossza legfeljebb $|\mathbf{s}|/2$. Ez geometriailag pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{v_1}$ az origóból egy olyan A pontba mutat, amely az S-nek az origót tartalmazó zárt félterébe esik. Messük el a $\mathcal{G}$ és $\mathcal{B}$ gömböket az AOP síkkal, így kapjuk az *ábrát.*



Legyen az A pontnak az OP szakasz F felezőpontjára vett tükörképe A'. Ekkor $\overrightarrow{PA'} = -\mathbf{v_1}$, ezért $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA'} = \mathbf{s} - \mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} + \ldots + \mathbf{v_M}$, azaz $M-1$ darab adott vektor összege. A tükrözés miatt az S sík elválasztja az O és A' pontokat (esetleg $A' \in S$), valamint A' illeszkedik $\mathcal{G}$ felszínére, ezért – ahogyan az az ábráról leolvasható – A' nem lehet a $\mathcal{B}$ gömb belsejében. Így $|\overrightarrow{OA'}| \geqslant 1$, és a bizonyítást befejeztük.

Zsigri Bálint (Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.)

69 dolgozat érkezett. 5 pontos 36, 4 pontos 9, 3 pontos 7, 2 pontos 4, 1 pontos 3, 0 pontos 10 dolgozat.



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1476–1482.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1476. Igazoljuk, hogy az

$$\frac{(y-6)^2}{3xy} + x \cdot \frac{y+3}{y} \geqslant 4 + x - \frac{4}{x} - \frac{xy}{12}$$

egyenlőtlenség minden pozitív x, y valós számpárra teljesül.

C. 1477. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ trapéz AD alapján van olyan E pont, amelyre az ABE, BCE és CDE háromszögek kerülete egyenlő, akkor $BC = \frac{1}{2}AD$.