2. feladat. *a*) $w_m = 0$ esetén (10) (5)-re egyszerűsödik.

b) Egyszerű átalakítással

$$t^* = 1 - \frac{1}{2 - w_m},$$

amely a minimális bérnek nyilvánvalóan csökkenő függvénye.

3. feladat. *a*) Egyszerű számolással (14) szerint

$$W(t) = 2(f_m c_m + f_M c_M) - \mu\big(f_m w_m^{-1} e_m^2 + f_M w_M^{-1} e_M^2\big).$$

Az újraelosztás miatt $f_m c_m + f_M c_M = f_m w_m + f_M w_M = 1$, és emiatt bármilyen $t > 0$ esetén $W(t) < W(0)$.

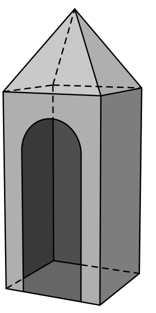
b) Ha $U(c, e)$ az 1. változóban is szigorúan konkáv függvény lenne, például $U(c, e) = \log c - \mu e^2$, akkor a módosításban is $t^* > 0$ állna.

Simonovits András

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Egy katonai laktanyában az *ábrán* látható őrbódéban őrködnek a katonák. A 3,5 m magas építmény egy négyzetes hasábból és egy hozzá kapcsolódó szabályos négyoldalú gúlából áll. Bejárata téglalap alakú, annak felső, rövidebb oldalára illesztett félkörrel. A négyzetes oszlop alapéle 1,3 m, magassága 2,5 m, míg a bejárat téglalap alakú része 0,8 m széles és 1,8 m magas.



a) Mennyibe kerül az őrbódé külső lefestése, ha 1 m^2 felület lefestéséhez 1,5 dl festék szükséges, melynek literje 3200 Ft? (Az őrbódé tetejét is festjük, ajtaját azonban nem.) (*6 pont*)

A laktanyában a hétvégi (pénteki, szombati és vasárnapi) éjszakai őrség kialakításakor a parancsnok az alábbi szempontokat veszi figyelembe:

- Minden katona legalább egy éjszaka őrködjön, de ne legyen olyan katona, aki mindhárom éjszaka őrségben van.
- A teljes létszámnak a fele teljesítsen pontosan két éjszaka őrszolgálatot.
- Az őrség létszáma az első éjszaka 16 fő, a második éjszaka 22 fő, míg a harmadik éjszaka 10 fő.

b) Hány katona vett részt az éjszakai őrségben? (*5 pont*)

2. Egy szabályos dobókockával 20-szor dobva 5 db egyest, 5 db kettest, 4 db hármast, 3 db négyest és 3 db ötöst dobtunk.

a) Számítsuk ki a dobott számok átlagát és szórását. (*3 pont*)

A dobott számok közül 4 db-ot véletlenszerűen kiválasztunk.

b) Hány esetben lesz a kiválasztott számok között legalább egy hármas? (*4 pont*)

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy kiválasztott szám különböző? (*6 pont*)

3. *a*) Az $\mathbf{u}(1; \log_8 x)$ és $\mathbf{v}(\log_2 x; -1)$ vektorok merőlegesek egymásra. Határozzuk meg x értékét ($x > 0$). (*5 pont*)

b) Adott a síkon n db pont, melyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre ($n \geqslant 3$). Határozzuk meg n értékét, ha a pontok 20-szor annyi négyszöget határoznak meg, mint egyenest. (*8 pont*)

4. Adott az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$ függvény.

a) Igazoljuk, hogy az f függvény szigorúan monoton csökken a negatív valós számok halmazán. (*3 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az f függvény páros. (*4 pont*)

c) Adjuk meg az f függvénynek azt az F primitív függvényét, amelyre $F(-1) = 2$. (*4 pont*)

d) Állapítsuk meg a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2+1}{x^4}$ határértéket. (*3 pont*)

II. rész

5. *a*) A tízes számrendszerben felírt $\overline{abc}$ háromjegyű szám számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő három elemét alkotják. Ha a háromjegyű számot elosztjuk a számjegyeinek összegével, 26-ot kapunk. Ha az eredeti számban a százasok és az egyesek számát felcseréljük, az eredetinél 396-tal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a háromjegyű szám? (*7 pont*)

b) Adjuk meg azokat a különböző számjegyekből álló tízes számrendszerben felírt $\overline{a6c}$ alakú háromjegyű számokat, amelyek a 4, 6 és 9 számok közül pontosan kettővel oszthatók. (*7 pont*)

c) Lehet-e $a^p \cdot b^q \cdot c^r$ négyzetszám, ha a, b és c különböző prímszámok, p, q és r pedig különböző páratlan egészek? (*2 pont*)

6. Egy földmérő noteszában egy vízszintes háromszög alakú telekről a következő bejegyzés olvasható: *„A telek három sarkán villanypózna, fúrt kút és gázcsonk található. A villanypózna a fúrt kúttól 46 méterre, a fúrt kút a gázcsonktól 20 méterre található. A villanypóznánál állva a fúrt kút és a gázcsonk alkotta szakasz 25°-os szögben látszik.”*

a) Számítsuk ki a háromszög alakú telek *lehetséges* területét. (*5 pont*)

Az előbbi telken a víz-, a gáz- és az elektromos ellátottság nagyon fontos, ugyanis azon kereskedelmi egység épül. Az elektromos rendszer költsége a víz- és a gázellátás költségeinek mértani közepe. Ha a gázellátás költségeit 100 000 Ft-tal csökkentenénk, akkor a víz-, az elektromos- és a gázellátás költségei ebben a sorrendben számtani sorozatot alkotnának. Az elektromos költségek a vízellátás költségeinek 150%-át teszik ki.

b) Mennyibe kerülnek a felsorolt közművek egyenként? (*6 pont*)

A telken a víz-, gáz- és az elektromos ellátottság kivitelezésére hat árajánlat érkezett hat különböző vállalkozástól.

c) Igazoljuk, hogy a versenytárgyalás résztvevői között biztosan van három olyan személy, akik kölcsönösen ismerik, vagy három olyan, akik kölcsönösen nem ismerik egymást (Egy vállalkozást egy tárgyalópartner képvisel). (*5 pont*)

7. Tekintsük a következő, *fagráfra* vonatkozó állítást:

Ha 5 fagráfnak összesen 41 éle van, és ezeket a fagráfokat egy gráfnak tekintjük, akkor ezen gráf pontjainak száma páros.

a) Adjuk meg az előbbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis). A választ indokoljuk. (*3 pont*)

b) Igazoljuk, hogy ha egy ötpontú *egyszerű* gráfnak 8 éle van, akkor a gráfnak van legalább két olyan pontja, amelyből pontosan három él indul ki. (*5 pont*)

2017. november 8-án a Fővárosi Állat- és Növénykertben kiselefánt született. A hírt először csak az állat egyik gondozója tudja.

c) Hányféleképpen juthat el a hír a többi 4 gondozóhoz, ha mindenki telefonon beszél a másikkal, és a lehető legkevesebb hívással értesül mindenki a hírről? (*8 pont*)

8. Az *ábrán* egy 300 méter hosszú egyenes alagút bejárata látható, mely egy 8 méter sugarú kör egy része. Az alagúton keresztülvivő autóút az alagút tetejétől 9,5 méterre található.

a) Milyen széles az autóút? (*3 pont*)

b) Mekkora térfogatú kőzetmennyiséget kellett eltávolítani az alagút fúrása során? (*5 pont*)

Egy túlméretes szállítmány olyan téglatest alakú tárgyat szállít, melyet a jármű 1,5 méter magasan lévő platójára helyeznek.

c) Mekkora lehet legfeljebb egy olyan tárgy keresztmetszete, ami még átvihető a kétsávos alagúton szabályosan közlekedve? (*8 pont*)

9. A gumiszerelő műhelyben a szakember tudja, hogy normál körülmények között a gépjárművek első – meghajtott – két kerekén lévő gumik 30 000 kilométer alatt, a hátsó gumik 50 000 kilométer alatt kopnak el.

a) Hány kilométert képes biztonságosan autózni adott gumiszettel az autós, ha az első- és hátsó tengelyen lévő kerekek egymással kicserélhetők? (*6 pont*)

A személygépkocsikra való gumik gyártósoráról lekerülő termékeket nagyon alaposan ellenőrzik. Egy gyártósori széria jellemzően 80 000 gumit tartalmaz, melyből általában 400 darab hibás (méret és/vagy anyag összetételi eltérés miatt). Az automatikus minőségellenőrzésen az ellenőrző berendezés csak a valóban hibás gumik 99%-át találja meg, a jó termékek 2%-át viszont hibásnak minősíti.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés által hibásnak minősített gumi valóban hibás? (*5 pont*)

c) Mekkora valószínűséggel képes az automatikus ellenőrző berendezés a jó minősítést megállapítani? (*5 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2018/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket (ha a megoldás pontos értéke nem racionális szám, akkor közelítő értéket is adjunk):*

a) $3^{2x+2}+9^{2x+1}=4$. (*5 pont*)

b) $\log_2(x-3)+\big(\log_4(8x-24)\big)^2=6{,}25$. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyenlet alakja ekvivalens átalakítások után:

$$\big(3^{2x+1}\big)^2+3\cdot 3^{2x+1}-4=0.$$

Ez a másodfokú egyenlet gyökképlete alapján akkor teljesül, ha $3^{2x+1}=1=3^0$, vagy ha $3^{2x+1}=-4$. Nyilván csak az első egyenlőséget teljesítő x van, ami a 3 alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt fennálló $2x+1=0$ egyenletből az $x=-0{,}5$ érték.

Ezért ez az eredeti egyenlet megoldása.

b) Az egyenlet alakja $x>3$ esetén a logaritmus azonosságai alapján

$$\log_2(x-3)+\left(\frac{\log_2 8(x-3)}{\log_2 4}\right)^2=6{,}25,$$

és további ekvivalens átalakításokkal:

$$4\log_2(x-3)+\big(3+\log_2(x-3)\big)^2=25,$$

$$\big(\log_2(x-3)\big)^2+10\log_2(x-3)-16=0.$$

Ez $\log_2(x-3)$-ben másodfokú egyenlet, így a gyökképlet alapján

$$\log_2(x-3)=\frac{-10\pm\sqrt{100+64}}{2}=-5\pm\sqrt{41}.$$