

Adómorál és adózás: két modell*

1. Bevezetés

A modern gazdaságokban az adók látványos szerepet játszanak: a nemzeti jövedelem 30-60 százalékát is eléri a beszedett adók. (Ebbe beleértendők a nemzeti jövedelem 5-15 százalékát kitevő állami nyugdíjakat fedező járulékok is, de az egyszerűség kedvéért nem foglalkozom velük külön.) Egyrészt az állam közjavakat (utakat, iskolákat, kórházakat stb.) építtet és működtet az adókból, másrészt a gazdagabbak befizetéseiből támogatja a szegényebbeket. Különböző országokban az adómoráltól is függően különböző mértékben titkolják el az állampolgárok adóköteles jövedelmüket. Izgalmas és fontos kérdés: az adómorált figyelembe véve mekkora adókat rójon ki az állam? A válasz ellentmond a naiv elképzelésnek: minél gyengébb az adómorál, annál kisebb adókulcsokat érdemes kiróni.

Ebben a cikkben két adózási modellt mutatok be – középiskolás fokon. A könnyebb érthetőség kedvéért felteszem, hogy a közjavakért (hidakért, iskoláért, rendőrségért stb.) is fizetni kell, de erre az állampolgárok fejpénzt kapnak. További egyszerűsítés: személyi jövedelemadóra (röviden: szja) szorítokozom (reálisabb modellben további adókat, például az általános forgalmi adót is bevonnám a modellbe). Fájó szívvel figyelmen kívül hagyom az adókedvezményeket és a magasabb adókulcsokat, s csupán egykulcsos szját modellezek (Magyarországon 2013 óta egyébként egykulcsos az szja). Felteszem, hogy a befolyt adót az állampolgárok között egyenlően szétosztják, s a nettójövedelem-különbségek mérséklése mellett ez a pénz segítséget nyújt a fizetőssé tett közjavak fogyasztásához.

A két modellben kulcsszerepet játszik az *adómorál* – itt egy valós szám, amely az adókulcs mellett meghatározza, mennyi jövedelmet vall be az állampolgár. Az adómorál közvetlenül nem mérhető, de létezésére és értékére következtethetünk. Minél jobb egy társadalom adómorálja, (adott adórendszer mellett) annál kevesebb jövedelmet titkolnak el az adófizetők.

Az első modell az egyszerűbb: önkényesen feltesszük, hogy az állampolgárok az igazi jövedelem után fizetendő adó és az adómorál hányadosát titkolják el. (Például 50 százalékos adókulcs és 2-es adómorál esetén egységnyi adóköteles jövedelemből $50/2 = 25$ százalékot tagadnak le – jól közelítve a magyar helyzetet.) Az állam maximális adóbevételre törekszik, s belátjuk, hogy ezt az adómorál felével egyenlő adókulccsal éri el. Tehát minél jobb az adómorál, annál nagyobb az optimális adókulcs. A második modell a bonyolultabb. Itt az állampolgárok szegényérzete viaskodik az adócsalás nyújtotta többletfogyasztással az adóbevallás készítésekor, s végül az állampolgárok ugyanannyi jövedelmet titkolnak el, mint az első modellben. Az állam most a társadalmi jólétet akarja maximalizálni, amelyet egyszerűség kedvéért a legkisebb jövedelmű állampolgár elégedettségével azonosít. Az optimális adókulcs most kisebb, mint korábban, de továbbra is növekvő függvénye az adómorálnak.

*Köszönetemet fejezem ki Szabó Judit és Tóth János értékes tanácsaiért.

A középiskolákban nem sok szó esik a tudományos *modellekről*, de az olvasók már hallhattak a Naprendszer kopernikuszi modelljéről vagy az atom Bohr-féle modelljéről. Minden modell leegyszerűsíti a valóságot, de a jó modell – akár a jó térkép – épp ezzel segíti a valóság megértését. Ebben a cikkben két közgazdasági modellről lesz szó, s a közgazdaságtanban sokkal nagyobb a távolság a valóság és a modell közt, mint a fizikában. Azt remélem, hogy a két adózási modell – minden hibája ellenére – segít az adóztatás alapkérdéseinek megértésében. Külön hangsúlyozom, hogy nem foglalkozom az adómorál eredetével, adottnak veszem. Egyik modellben sincs adóhivatal, amely eseti ellenőrzéseivel feltárja az adócsalást és büntetéssel sújtja az adócsalót. Ugyancsak figyelmen kívül hagyom, hogy az adókulcs emelése valamennyire csökkenti azt az időmennyiséget, amelyet adott évben az állampolgár az adózás utáni jövedelméért hajlandó munkával tölteni. Végül elsiklom afölött, hogy különböző foglalkozási ágakban különböző az adócsalás lehetősége.

A szövegben szétszórva három feladatot tűzök ki, amelyek megoldását a cikk végén közlöm.

2. Egy azonosság

Mielőtt a két adómorál-modellt bemutatnám, egy egyszerű azonosságot vázlok föl, amely később hasznunkra lesz.

A társadalmat különböző jövedelmű állampolgárok alkotják, a típusok száma $I > 1$ természetes szám, és az $i = 1, 2, \dots, I$ típusú egyén jövedelme w_i , népeségbeli súlya f_i . Ekkor az átlagos jövedelem $\mathbf{E}w = \sum_{i=1}^I f_i w_i$. Az állam egykulcsos szját alkalmaz, ahol az adókulcs t valós szám, $0 \leq t \leq 1$. Néha elhagyjuk a megkülönböztető i alsó indexet, azaz a w jövedelmű állampolgárnak tw adót kellene befizetnie, de tökéletlen adómorálja miatt jövedelme egy részét $(e-t)$ eltitkolja. Már említettem, hogy a modellben az adóztatás egyetlen célja: az adózás után maradó nettó jövedelmén túl mindenkinek azonos γ alapjövedelmet biztosítson. Fölteszem, hogy az átlagjövedelem éppen egységnyi, jele: $\mathbf{E}w = 1$, tehát az eltitkolt jövedelem (értsd: teljes és bevallott jövedelem különbsége) várható értéke $\mathbf{E}e < 1$. Mivel az állam a teljes adójövedelmét alapjövedelemként szétosztja, az alapjövedelem egyenlő az adókulcs és az átlagos bevallott jövedelem szorzatával:

$$(1) \quad \gamma = t\mathbf{E}(w - e) = t(1 - \mathbf{E}e).$$

1. példa. A nagyságrendek tisztázása érdekében célszerű az (1) azonosságot közelítő, kicsit manipulált magyar adatokkal kitölteni: $\gamma = 3/8$; $\mathbf{E}e = 1/4$, tehát a képzeletbeli összesített adókulcs $t = 1/2$.

3. Egyszerűbb modell

Eddig nem próbáltam megmagyarázni az eltitkolt jövedelem nagyságát. A bonyolultabb modell eredményét megelőlegezve, most felteszem, hogy az eltitkolt jövedelem (jele: e) és a teljes jövedelem hányadosa az adókulcs és az adómorál (μ)

hányadosa:

$$(2) \quad \frac{e}{w} = \frac{t}{\mu}, \quad \text{azaz} \quad e = \mu^{-1}tw.$$

Másképp kifejezve: az eltitkolt jövedelem a teljes jövedelem után fizetendő adó és az adómorál hányadosa. Vigyázat, az adócsalás nagysága ennél arányosan kisebb: $te^* = \mu^{-1}t^2w$.

Ahhoz, hogy a modell értelmes legyen, az eltitkolt jövedelemnek kisebbnek kell lennie a jövedelemnél, azaz $t < \mu$. Ahhoz, hogy ez még a maximális $t = 1$ adókulcsnál is fennálljon, fölteszük, hogy $\mu > 1$.

(1) és (2) értelmében

$$(3) \quad \gamma(t) = t(1 - \mu^{-1}t) = t - \mu^{-1}t^2.$$

Jelölje rendre w_m és w_M a legkisebb és a legnagyobb jövedelmet. Mivel az átlagjövedelem 1, ezért – a triviális egyforma jövedelmektől eltekintve – feltehetjük, hogy $0 < w_m < 1 < w_M$.

Itt tűzöm ki az első feladatot.

1. feladat. Igazoljuk, hogy a legkisebb/legnagyobb jövedelmű állampolgár kevesebb/több adót fizet be, mint amennyi az alapjövedelem. Képletben:

$$(3') \quad t(w_m - \mu^{-1}t^2w_m) < t - \mu^{-1}t^2 < t(w_M - \mu^{-1}t^2w_M).$$

Az államnak itt nagyon egyszerű célja van: maximalizálni akarja az adóbevételeket. Az elemzés folytatásához a következő segédtételre van szükségünk:

1. segédtétel. Legyen $A > 0$ és $B > 0$ két valós szám. Az $y = Bx - Ax^2$ másodfokú függvény a maximumát az

$$(4) \quad x^* = \frac{B}{2A} > 0$$

pontban veszi föl.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan szorítkozhatunk a nemnegatív értékű y -t adó $0 \leq x \leq B/A$ szakaszra. Az $y = Ax(BA^{-1} - x)$ -ből elhagyva az A szorzót, és az így kapott szorzatra alkalmazva a két pozitív szám számtani és a mértani közepe közti egyenlőtlenséget:

$$x(BA^{-1} - x) \leq \left[\frac{x + BA^{-1} - x}{2} \right]^2 = \left[\frac{B}{2A} \right]^2,$$

és az egyenlőség pontosan (4) esetén valósul meg. □

A következő tétel megadja a maximális adóbevételt jelentő adókulcsot.

1. tétel. a) Feltéve, hogy az adómorálra teljesül $1 \leq \mu \leq 2$, a (3)-beli átlagos adóbevétel akkor maximális, ha

$$(5) \quad t^* = \frac{\mu}{2}.$$

b) Ekkor minden állampolgár jövedelme felét titkolja el: $e^* = w/2$, és az így adódó alapjövedelem $\gamma(\mu/2) = \mu/4$.

Bizonyítás. a) A segédétel jelölései szerint (3)-ban $A = \mu^{-1}$ és $B = 1$. Innen adódik (5). Mivel az adókulcs értelemszerűen legfeljebb 1, szükség van a $\mu \leq 2$ feltevésre.

b) (5)-öt behelyettesítve (2)-be, majd (3)-ba, adódik a két másik képlet. \square

Megjegyzések. 1. Ez a modell nagyon merev, hiszen az eltitkolt és az eredeti jövedelmek aránya az adómorál értékétől függetlenül $1/2$. Mégis, $\mu = 1$ esetén a magyar adatok közelítőleg reprodukálhatók: a $t = 0,5$ adókulcs $Ee = 0,25$ adócsalást ad.

2. Egy jobb modell esetén nem kellene feltennünk, hogy $\mu \leq 2$. Ez a korlátozás káros, mert feleslegesen kizárja azokat a gazdaságokat, ahol $\mu > 2$, többek közt a fehér gazdaságot, ahol $\mu = \infty$, azaz $e^* = 0$.

4. Bonyolultabb modell

Rátérek a bonyolultabb modellre. Most minden állampolgár optimalizálással dönt az adóeltitkolásáról, és az adóbevételek helyett az állam egy bonyolultabb *cél-függvényt* maximalizál, amely az alapjövedelem mellett valamennyire figyelembe veszi az adófizetők különböző csoportjainak célfüggvényét is. (A modern közgazdaságtanban a célfüggvény alapfogalom, s minden szereplő saját célfüggvényét maximalizálja lehetőségein belül: a fogyasztó a hasznosságot, a vállalat a profitot, és az állam jó esetben a társadalmi jólétet.)

A bevezetőben már szoltam a nagyobb fogyasztás okozta öröm és nagyobb csalás miatt érzett szégyen viaskodásáról. Ennek leírásához szükségünk van a fogyasztás és az adócsalás közti kapcsolatra is. Ha az állampolgár nem titkolná el jövedelme egy részét, akkor fogyasztása a nettó jövedelem: $(1 - t)w$ és az alapjövedelem: $\gamma(t)$ összege lenne. De letagadja jövedelme egy részét: e , azaz adót „takarít meg”: te , s ezzel növeli a fogyasztását:

$$(6) \quad c = (1 - t)w + te + \gamma(t).$$

A közgazdaságtudomány főárama minden fogyasztói döntést, esetünkben az adócsalást egy ún. *hasznosságfüggvény* maximalizálásából vezet le. A legegyszerűbb $U(c, e)$ hasznosságfüggvényt akkor kapjuk, ha feltételezzük, hogy a kétváltozós függvény két egyváltozós függvény különbsége, és a kisebbitendő a fogyasztás homogén lineáris, a kivonandó pedig az eltitkolt jövedelem kvadratikusságú függvénye. Az adómorál most egy skalár, amely azt mutatja, hogy mennyire hat kedvezőtlenül az adócsalás az adózó közérzetére. Képletben:

$$(7) \quad U(c, e) = 2c - \mu w^{-1} e^2.$$

A μ szorzó mellé bevettük még a w^{-1} szorzót is, mert ha a második állampolgár jövedelme $\lambda(> 1)$ -szor nagyobb, mint az elsőé, akkor a λ -szoros jövedelem-eltitkolás nem λ^2 -szeres, hanem csak λ -szoros szégyent okoz.

Behelyettesítve (6)-ot (7)-be, adódik az új, redukált hasznosság:

$$(8) \quad U[w, e] = 2(1 - t)w + 2te + 2\gamma(t) - \mu w^{-1}e^2.$$

Adottnak véve γ -t, most optimumként adódik az egyszerűbb modellben önkényesen feltételezett (2)-beli jövedelem-eltitkolás.

2. tétel. *Ha a w jövedelmű állampolgár adócsalásával a (8) célfüggvényt maximalizálja, akkor az optimális jövedelem-eltitkolást (2) adja.*

Bizonyítás. (8)-ban csak $2te - \mu w^{-1}e^2$ függ közvetlenül e -től. Most $B = 2t$ és $A = \mu w^{-1}$ szerepel az 1. segédtételben, és (4)-ből adódik (2). \square

Mivel az állampolgároknak van hasznosságfüggvénye, most már megadhatunk egy ún. *társadalmi jóléti függvényt*, a Rawls-félét, amelyet John Rawls filozófusról neveztek el. E szerint a társadalom jólétét a legrosszabb helyzetű tagjának (reálisabban: tagjainak) a maximális hasznossága adja. Esetünkben ez a legkisebb jövedelmű állampolgár hasznosságfüggvénye:

$$(9) \quad V(t) = U[w_m, e^*(t)].$$

Most meghatározhatjuk a társadalmilag optimális adókulcsot.

3. tétel. *a) A Rawls-féle optimális adókulcs*

$$(10) \quad t^* = \frac{1 - w_m}{2 - w_m} \mu > 0;$$

feltéve, hogy

$$(11) \quad 1 < \mu < \mu_m = \frac{2 - w_m}{1 - w_m}.$$

b) A (10)-beli $t^(\mu)$ adókulcs-adómorál függvény lineáris és növekvő, valamint a jövedelem-eltitkolás mértéke független az adómoráltól:*

$$(12) \quad \frac{e^*}{w} = \frac{1 - w_m}{2 - w_m} < \frac{1}{2}.$$

c) Az optimális alapjövedelem értéke

$$(13) \quad \gamma^* = \frac{1 - w_m}{(2 - w_m)^2} \mu.$$

Bizonyítás. a) (9), (8), (3) és (2) értelmében

$$V(t) = 2(1-t)w_m + 2t\mu^{-1}tw_m + 2t(1-\mu^{-1}t) - \mu w_m^{-1}(\mu^{-1}tw_m)^2.$$

Rendezve,

$$V(t) = 2w_m + (2-w_m)t - (2\mu^{-1} - \mu^{-1}w_m)t^2.$$

Innen már az 1. segédteétel valóban megadja a társadalmilag optimális adókulcsot. \square

b) és c) Egyszerű behelyettesítéssel. \square

Megjegyezzük, hogy a bonyolult modell optimuma nulla minimális jövedelem mellett az egyszerű, bevételmaximalizáló modell optimumát adja.

2. feladat. a) Igazoljuk, hogy a Rawls-féle optimális adókulcs kisebb, mint az adómaximalizáló kulcs.

b) Igazoljuk, hogy minél nagyobb a minimális jövedelem, annál kisebb a társadalmilag optimális Rawls-féle adókulcs.

Ezen a ponton számpéldán szemléltetjük a bonyolultabb modellt.

3. példa. A (10) értelmében $w_m = 0,5$ mellett $t^* = 0,5$ $\mu = 1,5$ adómorált ad. A (12) és (13) képlet alapján ekkor rendre $e^* = 0,5/1,5 = 1/3$, $\gamma^* = 0,5/1,5^2 \cdot 1,5 = 1/3$.

Ha már ennyit számoltunk, érdemes tovább gondolkodni. Mindenekelőtt bemutatom a legegyszerűbb, kéttípusos népességet, ahol a $w_m < 1$ jövedelműek mellett vannak $w_M > 1$ jövedelműek is. A két típus népességbeli súlya rendre $f_m > 0$ és $f_M > 0$,

$$f_m + f_M = 1 \quad \text{és} \quad f_m w_m + f_M w_M = 1.$$

Végül még egy feladatot tűzök ki.

3. feladat. a) Ha a társadalmi jóléti függvényt nem Rawls szerint, hanem a közönséges súlyozott számtani átlag szerint számoljuk:

$$(14) \quad W(t) = f_m U[w_m, e^*(t)] + f_M U[w_M, e^*(t)],$$

akkor a társadalmilag optimális adókulcs 0, s nincs jövedelem-eltilkolás: $e^* = 0$.

b) Hogyan kellene módosítani a hasznosságfüggvényt, hogy ebben az esetben is pozitív legyen a társadalmilag optimális adókulcs?

Feladatmegoldások

1. feladat. (3')-ből és $w_m < 1 < w_M$ -ből következik.

2. feladat. a) $w_m = 0$ esetén (10) (5)-re egyszerűsödik.

b) Egyszerű átalakítással

$$t^* = 1 - \frac{1}{2 - w_m},$$

amely a minimális bérnek nyilvánvalóan csökkenő függvénye.

3. feladat. a) Egyszerű számolással (14) szerint

$$W(t) = 2(f_m c_m + f_M c_M) - \mu(f_m w_m^{-1} e_m^2 + f_M w_M^{-1} e_M^2).$$

Az újraelosztás miatt $f_m c_m + f_M c_M = f_m w_m + f_M w_M = 1$, és emiatt bármilyen $t > 0$ esetén $W(t) < W(0)$.

b) Ha $U(c, e)$ az 1. változóban is szigorúan konkáv függvény lenne, például $U(c, e) = \log c - \mu e^2$, akkor a módosításban is $t^* > 0$ állna.

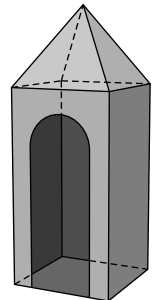
Simonovits András



Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Egy katonai laktanyában az *ábrán* látható őrbódében őrködnek a katonák. A 3,5 m magas építmény egy négyzetes hasábjából és egy hozzá kapcsolódó szabályos négyoldalú gúlából áll. Bejárata téglalap alakú, annak felső, rövidebb oldalára illesztett félkörrel. A négyzetes oszlop alapéle 1,3 m, magassága 2,5 m, míg a bejárat téglalap alakú része 0,8 m széles és 1,8 m magas.



a) Mennyibe kerül az őrbóda külső lefestése, ha 1 m^2 felület lefestéséhez 1,5 dl festék szükséges, melynek literje 3200 Ft? (Az őrbóda tetejét is festjük, ajtaját azonban nem.) (6 pont)

A laktanyában a hétvégi (pénteki, szombati és vasárnapi) éjszakai őrség kialakításakor a parancsnok az alábbi szempontokat veszi figyelembe:

- Minden katona legalább egy éjszaka őrködjön, de ne legyen olyan katona, aki mindhárom éjszaka őrségben van.
- A teljes létszámnak a fele teljesítsen pontosan két éjszaka őrszolgálatot.
- Az őrség létszáma az első éjszaka 16 fő, a második éjszaka 22 fő, míg a harmadik éjszaka 10 fő.

b) Hány katona vett részt az éjszakai őrségben? (5 pont)