KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

68. évfolyam 4. szám — Budapest, 2018. április

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Adómorál és adózás: két modell*

1. Bevezetés

A modern gazdaságokban az adók látványos szerepet játszanak: a nemzeti jövedelem 30-60 százalékát is elérik a beszedett adók. (Ebbe beleértendők a nemzeti jövedelem 5-15 százalékát kitevő állami nyugdíjakat fedező járulékok is, de az egyszerűség kedvéért nem foglalkozom velük külön.) Egyrészt az állam közjavakat (utakat, iskolákat, kórházakat stb.) építtet és működtet az adókból, másrészt a gazdagabbak befizetéseiből támogatja a szegényebbeket. Különböző országokban az adómoráltól is függően különböző mértékben titkolják el az állampolgárok adóköteles jövedelmüket. Izgalmas és fontos kérdés: az adómorált figyelembe véve mekkora adókat rójon ki az állam? A válasz ellentmond a naiv elképzelésnek: minél gyengébb az adómorál, annál kisebb adókulcsokat érdemes kiróni.

Ebben a cikkben két adózási modellt mutatok be – középiskolás fokon. A könnyebb érthetőség kedvéért felteszem, hogy a közjavakért (hidakért, iskoláért, rendőrségért stb.) is fizetni kell, de erre az állampolgárok fejpénzt kapnak. További egyszerűsítés: személyi jövedelemadóra (röviden: szja) szorítkozom (reálisabb modellben további adókat, például az általános forgalmi adót is bevonnám a modellbe). Fájó szívvel figyelmen kívül hagyom az adókedvezményeket és a magasabb adókulcsokat, s csupán egykulcsos szját modellezek (Magyarországon 2013 óta egyébként egykulcsos az szja). Felteszem, hogy a befolyt adót az állampolgárok között egyenlően szétosztják, s a nettójövedelem-különbségek mérséklése mellett ez a pénz segítséget nyújt a fizetőssé tett közjavak fogyasztásához.

A két modellben kulcsszerepet játszik az *adómorál* – itt egy valós szám, amely az adókulcs mellett meghatározza, mennyi jövedelmet vall be az állampolgár. Az adómorál közvetlenül nem mérhető, de létezésére és értékére következtethetünk. Minél jobb egy társadalom adómorálja, (adott adórendszer mellett) annál kevesebb jövedelmet titkolnak el az adófizetők.

Az első modell az egyszerűbb: önkényesen feltesszük, hogy az állampolgárok az igazi jövedelem után fizetendő adó és az adómorál hányadosát titkolják el. (Például 50 százalékos adókulcs és 2-es adómorál esetén egységnyi adóköteles jövedelemből $50/2 = 25$ százalékot tagadnak le – jól közelítve a magyar helyzetet.) Az állam maximális adóbevételre törekszik, s belátjuk, hogy ezt az adómorál felével egyenlő adókulccsal éri el. Tehát minél jobb az adómorál, annál nagyobb az optimális adókulcs. A második modell a bonyolultabb. Itt az állampolgárok szégyenérzete viaskodik az adócsalás nyújtotta többletfogyasztással az adóbevallás készítésekor, s végül az állampolgárok ugyanannyi jövedelmet titkolnak el, mint az első modellben. Az állam most a társadalmi jólétet akarja maximalizálni, amelyet egyszerűség kedvéért a legkisebb jövedelmű állampolgár elégedettségével azonosít. Az optimális adókulcs most kisebb, mint korábban, de továbbra is növekvő függvénye az adómorálnak.

*Köszönetemet fejezem ki Szabó Judit és Tóth János értékes tanácsaiért.

A középiskolákban nem sok szó esik a tudományos *modellekről,* de az olvasók már hallhattak a Naprendszer kopernikuszi modelljéről vagy az atom Bohr-féle modelljéről. Minden modell leegyszerűsíti a valóságot, de a jó modell – akár a jó térkép – épp ezzel segíti a valóság megértését. Ebben a cikkben két közgazdasági modellről lesz szó, s a közgazdaságtanban sokkal nagyobb a távolság a valóság és a modell közt, mint a fizikában. Azt remélem, hogy a két adózási modell – minden hibája ellenére – segít az adóztatás alapkérdéseinek megértésében. Külön hangsúlyozom, hogy nem foglalkozom az adómorál eredetével, adottnak veszem. Egyik modellben sincs adóhivatal, amely eseti ellenőrzéseivel feltárja az adócsalást és büntetéssel sújtja az adócsalót. Ugyancsak figyelmen kívül hagyom, hogy az adókulcs emelése valamennyire csökkenti azt az időmennyiséget, amelyet adott évben az állampolgár az adózás utáni jövedelméért hajlandó munkával tölteni. Végül elsiklom afölött, hogy különböző foglalkozási ágakban különböző az adócsalás lehetősége.

A szövegben szétszórva három feladatot tűzök ki, amelyek megoldását a cikk végén közlöm.

2. Egy azonosság

Mielőtt a két adómorál-modellt bemutatnám, egy egyszerű azonosságot vázolok föl, amely később hasznunkra lesz.

A társadalmat különböző jövedelmű állampolgárok alkotják, a típusok száma $I > 1$ természetes szám, és az $i = 1, 2, \ldots, I$ típusú egyén jövedelme w_i, népességbeli súlya f_i. Ekkor az átlagos jövedelem $\mathbf{E}w = \sum_{i=1}^{I} f_i w_i$. Az állam egykulcsos szját alkalmaz, ahol az adókulcs t valós szám, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Néha elhagyjuk a megkülönböztető i alsó indexet, azaz a w jövedelmű állampolgárnak tw adót kellene befizetnie, de tökéletlen adómorálja miatt jövedelme egy részét (e-t) eltitkolja. Már említettem, hogy a modellben az adóztatás egyetlen célja: az adózás után maradó nettó jövedelmén túl mindenkinek azonos γ alapjövedelmet biztosítson. Fölteszem, hogy az átlagjövedelem éppen egységnyi, jele: $\mathbf{E}w = 1$, tehát az eltitkolt jövedelem (értsd: teljes és bevallott jövedelem különbsége) várható értéke $\mathbf{E}e < 1$. Mivel az állam a teljes adójövedelmét alapjövedelemként szétosztja, az alapjövedelem egyenlő az adókulcs és az átlagos bevallott jövedelem szorzatával:

$$\gamma = t\mathbf{E}(w - e) = t(1 - \mathbf{E}e). \tag{1}$$

1. példa. A nagyságrendek tisztázása érdekében célszerű az (1) azonosságot közelítő, kicsit manipulált magyar adatokkal kitölteni: $\gamma = 3/8$; $\mathbf{E}e = 1/4$, tehát a képzeletbeli összesített adókulcs $t = 1/2$.

3. Egyszerűbb modell

Eddig nem próbáltam megmagyarázni az eltitkolt jövedelem nagyságát. A bonyolultabb modell eredményét megelőlegezve, most felteszem, hogy az eltitkolt jövedelem (jele: e) és a teljes jövedelem hányadosa az adókulcs és az adómorál (μ)

hányadosa:

$$\frac{e}{w} = \frac{t}{\mu}, \quad \text{azaz} \quad e = \mu^{-1} t w. \tag{2}$$

Másképp kifejezve: az eltikolt jövedelem a teljes jövedelem után fizetendő adó és az adómorál hányadosa. Vigyázat, az adócsalás nagysága ennél arányosan kisebb: $te^* = \mu^{-1} t^2 w$.

Ahhoz, hogy a modell értelmes legyen, az eltitkolt jövedelemnek kisebbnek kell lennie a jövedelemnél, azaz $t < \mu$. Ahhoz, hogy ez még a maximális $t = 1$ adókulcsnál is fennálljon, föltesszük, hogy $\mu > 1$.

(1) és (2) értelmében

$$\gamma(t) = t\bigl(1 - \mu^{-1} t\bigr) = t - \mu^{-1} t^2. \tag{3}$$

Jelölje rendre w_m és w_M a legkisebb és a legnagyobb jövedelmet. Mivel az átlagjövedelem 1, ezért – a triviális egyforma jövedelmektől eltekintve – feltehetjük, hogy $0 < w_m < 1 < w_M$.

Itt tűzöm ki az első feladatot.

1. feladat. Igazoljuk, hogy a legkisebb/legnagyobb jövedelmű állampolgár kevesebb/több adót fizet be, mint amennyi az alapjövedelem. Képletben:

$$t\bigl(w_m - \mu^{-1} t^2 w_m\bigr) < t - \mu^{-1} t^2 < t(w_M - \mu^{-1} t^2 w_M). \tag{3'}$$

Az államnak itt nagyon egyszerű célja van: maximalizálni akarja az adóbevételeket. Az elemzés folytatásához a következő segédtételre van szükségünk:

1. segédtétel. *Legyen $A > 0$ és $B > 0$ két valós szám. Az $y = Bx - Ax^2$ másodfokú függvény a maximumát az*

$$x^* = \frac{B}{2A} > 0 \tag{4}$$

pontban veszi föl.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan szorítkozhatunk a nemnegatív értékű y-t adó $0 \leqslant x \leqslant B/A$ szakaszra. Az $y = Ax\bigl(BA^{-1} - x\bigr)$-ből elhagyva az A szorzót, és az így kapott szorzatra alkalmazva a két pozitív szám számtani és a mértani középe közti egyenlőtlenséget:

$$x\bigl(BA^{-1} - x\bigr) \leqslant \left[\frac{x + BA^{-1} - x}{2}\right]^2 = \left[\frac{B}{2A}\right]^2,$$

és az egyenlőség pontosan (4) esetén valósul meg. □

A következő tétel megadja a maximális adóbevételt jelentő adókulcsot.

1. tétel. *a) Feltéve, hogy az adómorálra teljesül $1 \leqslant \mu \leqslant 2$, a (3)-beli átlagos adóbevétel akkor maximális, ha*

$$t^* = \frac{\mu}{2}. \tag{5}$$

b) Ekkor minden állampolgár jövedelme felét titkolja el: $e^* = w/2$, és az így adódó alapjövedelem $\gamma(\mu/2) = \mu/4$.

Bizonyítás. *a)* A segédtétel jelölései szerint (3)-ban $A = \mu^{-1}$ és $B = 1$. Innen adódik (5). Mivel az adókulcs értelemszerűen legfeljebb 1, szükség van a $\mu \leqslant 2$ feltevésre.

b) (5)-öt behelyettesítve (2)-be, majd (3)-ba, adódik a két másik képlet. □

Megjegyzések. 1. Ez a modell nagyon merev, hiszen az eltitkolt és az eredeti jövedelmek aránya az adómorál értékétől függetlenül 1/2. Mégis, $\mu = 1$ esetén a magyar adatok közelítőleg reprodukálhatók: a $t = 0{,}5$ adókulcs $\mathbf{E}e = 0{,}25$ adócsalást ad.

2. Egy jobb modell esetén nem kellene feltennünk, hogy $\mu \leqslant 2$. Ez a korlátozás káros, mert feleslegesen kizárja azokat a gazdaságokat, ahol $\mu > 2$, többek közt a fehér gazdaságot, ahol $\mu = \infty$, azaz $e^* = 0$.

4. Bonyolultabb modell

Rátérek a bonyolultabb modellre. Most minden állampolgár optimalizálással dönt az adóeltitkolásáról, és az adóbevételek helyett az állam egy bonyolultabb *célfüggvényt* maximalizál, amely az alapjövedelem mellett valamennyire figyelembe veszi az adófizetők különböző csoportjainak célfüggvényét is. (A modern közgazdaságtanban a célfüggvény alapfogalom, s minden szereplő saját célfüggvényét maximalizálja lehetőségein belül: a fogyasztó a hasznosságot, a vállalat a profitot, és az állam jó esetben a társadalmi jólétet.)

A bevezetőben már szóltam a nagyobb fogyasztás okozta öröm és nagyobb csalás miatt érzett szégyen viaskodásáról. Ennek leírásához szükségünk van a fogyasztás és az adócsalás közti kapcsolatra is. Ha az állampolgár nem titkolná el jövedelme egy részét, akkor fogyasztása a nettó jövedelem: $(1-t)w$ és az alapjövedelem: $\gamma(t)$ összege lenne. De letagadja jövedelme egy részét: e, azaz adót „takarít meg”: te, s ezzel növeli a fogyasztását:

$$c = (1-t)w + te + \gamma(t). \tag{6}$$

A közgazdaságtudomány főárama minden fogyasztói döntést, esetünkben az adócsalást egy ún. *hasznosságfüggvény* maximalizálásából vezet le. A legegyszerűbb $U(c,e)$ hasznosságfüggvényt akkor kapjuk, ha feltételezzük, hogy a kétváltozós függvény két egyváltozós függvény különbsége, és a kisebbítendő a fogyasztás homogén lineáris, a kivonandó pedig az eltitkolt jövedelem kvadratikus függvénye. Az adómorál most egy skalár, amely azt mutatja, hogy mennyire hat kedvezőtlenül az adócsalás az adózó közérzetére. Képletben:

$$U(c,e) = 2c - \mu w^{-1} e^2. \tag{7}$$

A μ szorzó mellé bevettük még a w^{-1} szorzót is, mert ha a második állampolgár jövedelme $\lambda(>1)$-szor nagyobb, mint az elsőé, akkor a λ-szoros jövedelem-eltitkolás nem λ^2-szeres, hanem csak λ-szoros szégyent okoz.

Behelyettesítve (6)-ot (7)-be, adódik az új, redukált hasznosság:

$$U[w,e] = 2(1-t)w + 2te + 2\gamma(t) - \mu w^{-1}e^2. \tag{8}$$

Adottnak véve γ-t, most optimumként adódik az egyszerűbb modellben önkényesen feltételezett (2)-beli jövedelem-eltitkolás.

2. tétel. *Ha a w jövedelmű állampolgár adócsalásával a* (8) *célfüggvényt maximalizálja, akkor az optimális jövedelem-eltitkolást* (2) *adja.*

Bizonyítás. (8)-ban csak $2te - \mu w^{-1}e^2$ függ közvetlenül e-től. Most $B = 2t$ és $A = \mu w^{-1}$ szerepel az 1. segédtételben, és (4)-ből adódik (2). □

Mivel az állampolgároknak van hasznosságfüggvénye, most már megadhatunk egy ún. *társadalmi jóléti függvényt,* a Rawls-félét, amelyet John Rawls filozófusról neveztek el. E szerint a társadalom jólétét a legrosszabb helyzetű tagjának (reálisabban: tagjainak) a maximális hasznossága adja. Esetünkben ez a legkisebb jövedelmű állampolgár hasznosságfüggvénye:

$$V(t) = U\big[w_m, e^*(t)\big]. \tag{9}$$

Most meghatározhatjuk a társadalmilag optimális adókulcsot.

3. tétel. *a) A Rawls-féle optimális adókulcs*

$$t^* = \frac{1-w_m}{2-w_m}\mu > 0; \tag{10}$$

feltéve, hogy

$$1 < \mu < \mu_m = \frac{2-w_m}{1-w_m}. \tag{11}$$

b) A (10)*-beli $t^*(\mu)$ adókulcs–adómorál függvény lineáris és növekvő, valamint a jövedelem-eltitkolás mértéke független az adómoráltól:*

$$\frac{e^*}{w} = \frac{1-w_m}{2-w_m} < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

c) Az optimális alapjövedelem értéke

$$\gamma^* = \frac{1-w_m}{(2-w_m)^2}\mu. \tag{13}$$

Bizonyítás. *a*) (9), (8), (3) és (2) értelmében

$$V(t) = 2(1-t)w_m + 2t\mu^{-1}tw_m + 2t\big(1-\mu^{-1}t\big) - \mu w_m^{-1}\big(\mu^{-1}tw_m\big)^2.$$

Rendezve,

$$V(t) = 2w_m + (2-w_m)t - \big(2\mu^{-1} - \mu^{-1}w_m\big)t^2.$$

Innen már az 1. segédtétel valóban megadja a társadalmilag optimális adókulcsot. □

b) és *c*) Egyszerű behelyettesítéssel. □

Megjegyezzük, hogy a bonyolult modell optimuma nulla minimális jövedelem mellett az egyszerű, bevételmaximalizáló modell optimumát adja.

2. feladat. *a*) Igazoljuk, hogy a Rawls-féle optimális adókulcs kisebb, mint az adómaximalizáló kulcs.

b) Igazoljuk, hogy minél nagyobb a minimális jövedelem, annál kisebb a társadalmilag optimális Rawls-féle adókulcs.

Ezen a ponton számpéldán szemléltetjük a bonyolultabb modellt.

3. példa. A (10) értelmében $w_m = 0{,}5$ mellett $t^* = 0{,}5$ $\mu = 1{,}5$ adómorált ad. A (12) és (13) képlet alapján ekkor rendre $e^* = 0{,}5/1{,}5 = 1/3$, $\gamma^* = 0{,}5/1{,}5^2 \cdot 1{,}5 = 1/3$.

Ha már ennyit számoltunk, érdemes tovább gondolkodni. Mindenekelőtt bemutatom a legegyszerűbb, kéttípusos népességet, ahol a $w_m < 1$ jövedelműek mellett vannak $w_M > 1$ jövedelműek is. A két típus népességbeli súlya rendre $f_m > 0$ és $f_M > 0$,

$$f_m + f_M = 1 \quad \text{és} \quad f_m w_m + f_M w_M = 1.$$

Végül még egy feladatot tűzök ki.

3. feladat. *a*) Ha a társadalmi jóléti függvényt nem Rawls szerint, hanem a közönséges súlyozott számtani átlag szerint számoljuk:

$$W(t) = f_m U\big[w_m, e^*(t)\big] + f_M U\big[w_M, e^*(t)\big], \tag{14}$$

akkor a társadalmilag optimális adókulcs 0, s nincs jövedelem-eltitkolás: $e^* = 0$.

b) Hogyan kellene módosítani a hasznosságfüggvényt, hogy ebben az esetben is pozitív legyen a társadalmilag optimális adókulcs?

Feladatmegoldások

1. feladat. (3′)-ből és $w_m < 1 < w_M$-ből következik.

2. feladat. *a*) $w_m = 0$ esetén (10) (5)-re egyszerűsödik.

b) Egyszerű átalakítással

$$t^* = 1 - \frac{1}{2 - w_m},$$

amely a minimális bérnek nyilvánvalóan csökkenő függvénye.

3. feladat. *a*) Egyszerű számolással (14) szerint

$$W(t) = 2(f_m c_m + f_M c_M) - \mu\big(f_m w_m^{-1} e_m^2 + f_M w_M^{-1} e_M^2\big).$$

Az újraelosztás miatt $f_m c_m + f_M c_M = f_m w_m + f_M w_M = 1$, és emiatt bármilyen $t > 0$ esetén $W(t) < W(0)$.

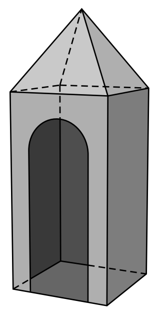
b) Ha $U(c, e)$ az 1. változóban is szigorúan konkáv függvény lenne, például $U(c, e) = \log c - \mu e^2$, akkor a módosításban is $t^* > 0$ állna.

Simonovits András

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Egy katonai laktanyában az *ábrán* látható őrbódéban őrködnek a katonák. A 3,5 m magas építmény egy négyzetes hasábból és egy hozzá kapcsolódó szabályos négyoldalú gúlából áll. Bejárata téglalap alakú, annak felső, rövidebb oldalára illesztett félkörrel. A négyzetes oszlop alapéle 1,3 m, magassága 2,5 m, míg a bejárat téglalap alakú része 0,8 m széles és 1,8 m magas.



a) Mennyibe kerül az őrbódé külső lefestése, ha 1 m^2 felület lefestéséhez 1,5 dl festék szükséges, melynek literje 3200 Ft? (Az őrbódé tetejét is festjük, ajtaját azonban nem.) (*6 pont*)

A laktanyában a hétvégi (pénteki, szombati és vasárnapi) éjszakai őrség kialakításakor a parancsnok az alábbi szempontokat veszi figyelembe:

- Minden katona legalább egy éjszaka őrködjön, de ne legyen olyan katona, aki mindhárom éjszaka őrségben van.
- A teljes létszámnak a fele teljesítsen pontosan két éjszaka őrszolgálatot.
- Az őrség létszáma az első éjszaka 16 fő, a második éjszaka 22 fő, míg a harmadik éjszaka 10 fő.

b) Hány katona vett részt az éjszakai őrségben? (*5 pont*)

2. Egy szabályos dobókockával 20-szor dobva 5 db egyest, 5 db kettest, 4 db hármast, 3 db négyest és 3 db ötöst dobtunk.

a) Számítsuk ki a dobott számok átlagát és szórását. (*3 pont*)

A dobott számok közül 4 db-ot véletlenszerűen kiválasztunk.

b) Hány esetben lesz a kiválasztott számok között legalább egy hármas? (*4 pont*)

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy kiválasztott szám különböző? (*6 pont*)

3. *a*) Az $\mathbf{u}(1; \log_8 x)$ és $\mathbf{v}(\log_2 x; -1)$ vektorok merőlegesek egymásra. Határozzuk meg x értékét $(x > 0)$. (*5 pont*)

b) Adott a síkon n db pont, melyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre $(n \geqslant 3)$. Határozzuk meg n értékét, ha a pontok 20-szor annyi négyszöget határoznak meg, mint egyenest. (*8 pont*)

4. Adott az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$ függvény.

a) Igazoljuk, hogy az f függvény szigorúan monoton csökken a negatív valós számok halmazán. (*3 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az f függvény páros. (*4 pont*)

c) Adjuk meg az f függvénynek azt az F primitív függvényét, amelyre $F(-1) = 2$. (*4 pont*)

d) Állapítsuk meg a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2+1}{x^4}$ határértéket. (*3 pont*)

II. rész

5. *a*) A tízes számrendszerben felírt $\overline{abc}$ háromjegyű szám számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő három elemét alkotják. Ha a háromjegyű számot elosztjuk a számjegyeinek összegével, 26-ot kapunk. Ha az eredeti számban a százasok és az egyesek számát felcseréljük, az eredetinél 396-tal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a háromjegyű szám? (*7 pont*)

b) Adjuk meg azokat a különböző számjegyekből álló tízes számrendszerben felírt $\overline{a6c}$ alakú háromjegyű számokat, amelyek a 4, 6 és 9 számok közül pontosan kettővel oszthatók. (*7 pont*)

c) Lehet-e $a^p \cdot b^q \cdot c^r$ négyzetszám, ha a, b és c különböző prímszámok, p, q és r pedig különböző páratlan egészek? (*2 pont*)

6. Egy földmérő noteszában egy vízszintes háromszög alakú telekről a következő bejegyzés olvasható: *„A telek három sarkán villanypózna, fúrt kút és gázcsonk található. A villanypózna a fúrt kúttól 46 méterre, a fúrt kút a gázcsonktól 20 méterre található. A villanypóznánál állva a fúrt kút és a gázcsonk alkotta szakasz 25°-os szögben látszik.”*

a) Számítsuk ki a háromszög alakú telek *lehetséges* területét. (*5 pont*)

Az előbbi telken a víz-, a gáz- és az elektromos ellátottság nagyon fontos, ugyanis azon kereskedelmi egység épül. Az elektromos rendszer költsége a víz- és a gázellátás költségeinek mértani közepe. Ha a gázellátás költségeit 100 000 Ft-tal csökkentenénk, akkor a víz-, az elektromos- és a gázellátás költségei ebben a sorrendben számtani sorozatot alkotnának. Az elektromos költségek a vízellátás költségeinek 150%-át teszik ki.

b) Mennyibe kerülnek a felsorolt közművek egyenként? (*6 pont*)

A telken a víz-, gáz- és az elektromos ellátottság kivitelezésére hat árajánlat érkezett hat különböző vállalkozástól.

c) Igazoljuk, hogy a versenytárgyalás résztvevői között biztosan van három olyan személy, akik kölcsönösen ismerik, vagy három olyan, akik kölcsönösen nem ismerik egymást (Egy vállalkozást egy tárgyalópartner képvisel). (*5 pont*)

7. Tekintsük a következő, *fagráfra* vonatkozó állítást:

Ha 5 fagráfnak összesen 41 éle van, és ezeket a fagráfokat egy gráfnak tekintjük, akkor ezen gráf pontjainak száma páros.

a) Adjuk meg az előbbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis). A választ indokoljuk. (*3 pont*)

b) Igazoljuk, hogy ha egy ötpontú *egyszerű* gráfnak 8 éle van, akkor a gráfnak van legalább két olyan pontja, amelyből pontosan három él indul ki. (*5 pont*)

2017. november 8-án a Fővárosi Állat- és Növénykertben kiselefánt született. A hírt először csak az állat egyik gondozója tudja.

c) Hányféleképpen juthat el a hír a többi 4 gondozóhoz, ha mindenki telefonon beszél a másikkal, és a lehető legkevesebb hívással értesül mindenki a hírről? (*8 pont*)

8. Az *ábrán* egy 300 méter hosszú egyenes alagút bejárata látható, mely egy 8 méter sugarú kör egy része. Az alagúton keresztülvivő autóút az alagút tetejétől 9,5 méterre található.

a) Milyen széles az autóút? (*3 pont*)

b) Mekkora térfogatú kőzetmennyiséget kellett eltávolítani az alagút fúrása során? (*5 pont*)

Egy túlméretes szállítmány olyan téglatest alakú tárgyat szállít, melyet a jármű 1,5 méter magasan lévő platójára helyeznek.

c) Mekkora lehet legfeljebb egy olyan tárgy keresztmetszete, ami még átvihető a kétsávos alagúton szabályosan közlekedve? (*8 pont*)

9. A gumiszerelő műhelyben a szakember tudja, hogy normál körülmények között a gépjárművek első – meghajtott – két kerekén lévő gumik 30 000 kilométer alatt, a hátsó gumik 50 000 kilométer alatt kopnak el.

a) Hány kilométert képes biztonságosan autózni adott gumiszettel az autós, ha az első- és hátsó tengelyen lévő kerekek egymással kicserélhetők? (*6 pont*)

A személygépkocsikra való gumik gyártósoráról lekerülő termékeket nagyon alaposan ellenőrzik. Egy gyártósori széria jellemzően 80 000 gumit tartalmaz, mely-ből általában 400 darab hibás (méret és/vagy anyag összetételi eltérés miatt). Az automatikus minőségellenőrzésen az ellenőrző berendezés csak a valóban hibás gumik 99%-át találja meg, a jó termékek 2%-át viszont hibásnak minősíti.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés által hibásnak minősített gumi valóban hibás? (*5 pont*)

c) Mekkora valószínűséggel képes az automatikus ellenőrző berendezés a jó minősítést megállapítani? (*5 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2018/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket (ha a megoldás pontos értéke nem racionális szám, akkor közelítő értéket is adjunk):*

a) $3^{2x+2}+9^{2x+1}=4$. (*5 pont*)

b) $\log_2(x-3)+\big(\log_4(8x-24)\big)^2=6{,}25$. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyenlet alakja ekvivalens átalakítások után:

$$\left(3^{2x+1}\right)^2+3\cdot 3^{2x+1}-4=0.$$

Ez a másodfokú egyenlet gyökképlete alapján akkor teljesül, ha $3^{2x+1}=1=3^0$, vagy ha $3^{2x+1}=-4$. Nyilván csak az első egyenlőséget teljesítő x van, ami a 3 alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt fennálló $2x+1=0$ egyenletből az $x=-0{,}5$ érték.

Ezért ez az eredeti egyenlet megoldása.

b) Az egyenlet alakja $x>3$ esetén a logaritmus azonosságai alapján

$$\log_2(x-3)+\left(\frac{\log_2 8(x-3)}{\log_2 4}\right)^2=6{,}25,$$

és további ekvivalens átalakításokkal:

$$4\log_2(x-3)+\big(3+\log_2(x-3)\big)^2=25,$$

$$\big(\log_2(x-3)\big)^2+10\log_2(x-3)-16=0.$$

Ez $\log_2(x-3)$-ben másodfokú egyenlet, így a gyökképlet alapján

$$\log_2(x-3)=\frac{-10\pm\sqrt{100+64}}{2}=-5\pm\sqrt{41}.$$

Ebből $x = 3 + 2^{-5\pm\sqrt{41}}$.

Ezért az eredeti egyenlet megoldásai:

$$x_1 = 3 + 2^{-5+\sqrt{41}} \approx 5{,}6447 \quad \text{és} \quad x_2 = 3 + 2^{-5-\sqrt{41}} \approx 3{,}000\,37.$$

2. *Egy háromszög oldalhosszai olyan számtani sorozat első három eleme, amelynek második eleme* 6.

a) Adjuk meg azt a számhalmazt (a legegyszerűbb alakú) pontos értékekkel, amelynek elemei az ilyen háromszögek területei. *(7 pont)*

b) Van-e az ilyen háromszögek között maximális területű, van-e minimális területű? Ha igen, akkor melyik az? *(2 pont)*

c) Van-e az ilyen háromszögek között két olyan, amelyeknél a beírt kör sugara egyenlő? Ha igen, akkor melyek azok? *(3 pont)*

Megoldás. *a*) A számtani sorozat differenciájának abszolút értékét d-vel jelöljük, így az oldalhosszak $6-d$, 6 és $6+d$, ahol nyilván $0 \leqslant d$, és a háromszög-egyenlőtlenség miatt $6+d < 6-d+6$, azaz $d < 3$.

A háromszög területét a Héron-képlettel számoljuk ki. A félkerület:

$$s = \frac{6-d+6+6+d}{2} = 9.$$

A terület:

$$T = \sqrt{9\big(9-(6-d)\big)(9-6)\big(9-(6+d)\big)} = \sqrt{27(9-d^2)}\,.$$

Ebből $0 \leqslant d < 3$ miatt következik, hogy $0 < T \leqslant \sqrt{27\cdot 9} = 9\sqrt{3}$, és T minden ilyen értéket felvesz, így a keresett számhalmaz $\left]0; 9\sqrt{3}\,\right]$.

b) Az *a*) megoldásából következik, hogy ilyen háromszögek között minimális területű nincs, maximális területű van, a $d=0$ esetben. Ez a 6 oldalhosszúságú szabályos háromszög.

c) Ismeretes, hogy a háromszög beírt körének sugara $\varrho = \frac{T}{s}$. A feladatban szereplő háromszögeknél $s=9$ állandó, így ϱ és T kapcsolata kölcsönös és egyértelmű, tehát ϱ és d kapcsolata is az. Ezért a feladatban szereplő háromszögeknél a különböző háromszögek beírt körének sugara is különbözik.

Tehát nincs két olyan háromszög, amelyeknél a beírt kör sugara egyenlő.

3. *Egy ügyfél egy bankból* 1980*-ban felvett egymillió Ft kölcsönt, évi* 5%*-os kamatra,* 20 *évi, évente egyszeri, azonos összegű törlesztési kötelezettséggel.*

a) Mennyi volt az évi törlesztési összeg, 10 Ft-ra kerekítve? *(5 pont)*

A kölcsönszerződést nem lehetett megváltoztatni a növekvő infláció ellenére sem, pedig 1992*-ben* (12 *évvel a tárgyalt hitelfelvétel után) már a bank adott* 10%*-os kamatot a nála elhelyezett pénzre. Ezért a bank a fent leírt kölcsön felvevőjének felajánlotta, hogy hátralevő tartozását megszüntetheti, ha az éppen fennálló tartozásának* 90%*-át kifizeti.*

b) Mennyivel tartozott az ügyfél 12 év leteltével? *(4 pont)*

c) Mennyit helyezzen el az ügyfél egy (másik) bankban, hogy abból az eredeti törlesztő részletét évente kivéve és 10%-os kamattal számolva 8 év alatt megszüntesse a tartozását? Érdemes-e elfogadni a bank ajánlatát, vagy kisebb összegnek egy (másik) bankban való elhelyezésével érdemes tovább törleszteni a tartozását? *(4 pont)*

Megoldás. *a)* A feladatban leírt kölcsöntörlesztésre T kölcsön, n évre, p%-os kamat és t törlesztőrészlet esetén, $q = 1 + \frac{p}{100}$ jelöléssel az ismert képlet érvényes:

$$Tq^n = t\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ebből a mi esetünkben:

$$t = 1\,000\,000 \cdot \frac{1{,}05^{20} \cdot 0{,}05}{1{,}05^{20} - 1}.$$

Ezt zsebszámológéppel kiszámolva és azt tízesre kerekítve: $t \approx 80\,240$ Ft.

b) A járadékszámítási képletet használva és hasonlóan kiszámolva a 12 év után fennálló tartozás:

$$1\,000\,000 \cdot 1{,}05^{12} - t \cdot \frac{1{,}05^{12} - 1}{0{,}05} \approx 518\,660 \text{ Ft.}$$

c) Egy bankban elhelyezett x összegből a fenti t évjáradékot kivéve 8 év alatt évi 10% kamat mellett megszűnik az adósság. Az x lép a képletben T helyébe: $x \cdot 1{,}1^8 - t\frac{1{,}1^8-1}{0{,}1}$. Ebből

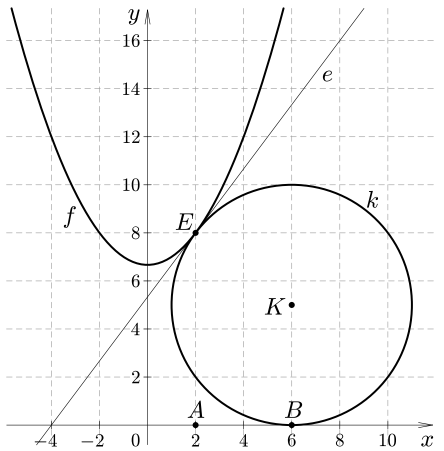
$$x = t \cdot \frac{1{,}1^8 - 1}{0{,}1 \cdot 1{,}1^8} \approx 428\,070 \text{ Ft.}$$

Mivel az $518\,660$ Ft összeg 90%-a 10 Ft-ra kerekítve $466\,790$ Ft $> 428\,070$ Ft, érdemes folytatni a fenti módon a törlesztést.

4. *Jelölje k azt a kört, amelyik érinti a koordináta-rendszer x tengelyét, és érinti az $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 20)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény grafikonját a függvénynek a 2 abszcisszájú pontjában. (A függvény grafikonjának az érintése egy pontban azt jelenti, hogy az érintő kör ebben a pontban érinti a grafikonhoz az adott pontban húzott érintőt, és az érintő elválasztja a grafikont és a kört.)*

a) Írjuk fel a k kör egyenletét. *(7 pont)*

b) Mennyi annak a korlátos síkidomnak a területe, amelyet az y tengely, az x tengely, a k kör és a függvény grafikonja határol? *(7 pont)*



Megoldás. *a*) A függvény 2 abszcisszájú pontja $E(2;8)$, a függvény grafikonjához ebben a pontban húzott érintő iránytangense $f'(2)=\frac{4}{3}$. A k kör középpontja azon az egyenesen van, amely áthalad a $E(2;8)$ ponton és egy normálvektora $\overrightarrow{n}(3;4)$, ezért az egyenes egyenlete $3x+4y=38$.

A k kör $K(u;v)$ középpontja rajta van az egyenesen, ezért $3u+4v=38$, másrészt ugyanolyan távol van E-től, mint az x tengelytől, így

$$\sqrt{(u-2)^2+(v-8)^2}=v,$$

és erre $(u-2)^2+(v-8)^2=v^2$ is teljesül, de a feladat szerint nyilván csak $u>2$ és $0<v<8$ lehet, mert a kör az érintőnek a függvény grafikonjával ellentétes oldalán és az x tengely felett van.

A $3u+4v=38$, $(u-2)^2+(v-8)^2=v^2$ egyenletrendszert oldjuk meg. Mivel $3(u-2)=32-4v$, így $(32-4v)^2+9(v-8)^2=9v^2$. Ebből $25(8-v)^2=9v^2$, és az u-ra, v-re tett feltételek miatt $v=5$ és $u=6$.

A kör egyenlete $(x-6)^2+(y-5)^2=25$.

b) A keresett terület kiszámításához felhasználjuk a függvénynek a $[0;2]$ intervallumon vett görbe alatti t_1 területét, az $A(2;0)E(2;8)K(6;5)B(6;0)$ trapéz t_2 területét, és az EKB körcikk t_3 területét.

$$t_1=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{9}+\frac{20x}{3}\right]_0^2=\frac{128}{9},$$

$$t_2=\frac{AE+BK}{2}\cdot AB=\frac{8+5}{2}\cdot 4=26,$$

$$t_3=5^2\pi\cdot\frac{\alpha}{2\pi}=12{,}5\cdot\alpha,\quad \text{ahol}\quad \alpha=EKB\sphericalangle.$$

Az EKB háromszögben a koszinusz-tételt alkalmazva:

$$\cos\alpha=\frac{EK^2+KB^2-EB^2}{2EK\cdot KB}=\frac{25+25-(64+16)}{2\cdot5\cdot5}=-0{,}6,$$

így t_3 értéke zsebszámológéppel számolva és 3 tizedesre kerekítve 27,679. A keresett terület:

$$t=t_1+t_2-t_3=\frac{128}{9}+26-12{,}5\cdot\alpha\approx 12{,}54.$$

II. rész

5. *a) Oldjuk meg az X halmazra az $A \setminus X = B$; $A \cup X = C$ egyenletrendszert, ahol az adott A, B, C halmazokra $B \subset A \subset C$ teljesül.* *(6 pont)*

b) Igazoljuk, hogy az A és B ítéletekre az $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ és A ítéletek ekvivalensek. *(6 pont)*

c) Igaz-e, hogy $\forall H \subset \mathbb{R}^+$ és $\forall h \in H$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $\frac{1}{n} < h < n$? Ha nem, akkor adjunk rá példát, ha igen, akkor írjuk le, hogy az ilyen n függ-e a h-tól, vagy nem? Állításunkat bizonyítani nem kell. *(4 pont)*

Megoldás. *a)* Mivel tetszőleges A és X halmazra nyilvánvaló (a műveletek definíciójából következően), hogy $X = (A \cup X) \setminus (A \setminus X)$, ezért $X = C \setminus B$.

b) Az $(A; B)$ ítéletpár lehetséges (i; i), (i; h), (h; i), (h; h) értékeit az $(A \vee B) \wedge \wedge (A \vee \neg B)$ ítéletre kipróbálva rendre az i, i, h, h értéket kapjuk, ami az A értéke, tehát valóban ekvivalensek.

c) Igaz, és az n függ a h-tól.

6. *a) Hány olyan 2018 pontú, páronként nem izomorf fagráf van, amelyekben nincs háromnál több élt tartalmazó út?* *(11 pont)*

b) Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azoknak a 2018 pontú fagráfoknak a pontjai, amelyek mindegyikének pontja az origó, és minden élének a két végpontja olyan $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ pont, amelyre x_1, y_1, x_2, y_2 egész számok, és az $(x_1 - x_2)$, $(y_1 - y_2)$ számoknak az egyike 0, a másik 0, 1, vagy -1. *(5 pont)*

Megoldás. *a)* Ha egy 2018 pontú fagráfban nincs háromnál több élt tartalmazó út, akkor – mivel a gráf összefüggő – a leghosszabb út kettő vagy három élt tartalmaz benne. Ha a fagrában minden út legfeljebb két élt tartalmaz, akkor egy ilyen út legyen az AB, BC élekből álló ABC részgráf. Ez a részgráf a fagráf más (A, B, C csúcsoktól különböző) P csúcsához sem A-ból, sem C-ből induló, B-t nem tartalmazó úttal nem csatlakozhat, mert különben lenne a gráfban három élből álló út. Tehát BP út van a fagráfban, de ez csak a BP él lehet, mert különben A-t P-vel két élnél hosszabb út kötné össze.

Ezért (izomorfiától eltekintve) csak egy olyan 2018 pontú fagráf van, amelyben nincs kettőnél több élt tartalmazó út. Ha egy 2018 pontú fagráfban minden út legfeljebb három élből áll, és van három élből álló út, akkor legyen egy ilyen az AB, BC, CD élekből álló út.

A fentihez hasonlóan belátható, hogy egyrészt sem A-hoz, sem D-hez nem csatlakozhat a gráf további éle, mert különben lenne három élnél hosszabb út; másrészt a gráf minden további pontját a B és C pont közül pontosan az egyikkel él köti össze, mert különben lenne három élnél hosszabb út (vagy egy kör).

Tehát, ha egy 2018 pontú fagráfban minden út legfeljebb három élből áll, és van három élből álló út, akkor a gráfnak az AB, BC, CD éleken kívül n darab ($0 \leqslant n \leqslant 2014$) B-hez csatlakozó olyan éle, és $(2014 - n)$ darab C-hez csatlakozó olyan éle van, amelynek másik végpontja nincs A, B, C, D között. Rögzített n

esetén az n-hez és a $(2014 - n)$- hez tartozó két gráf izomorf (illetve $n = 1007$-nél azonos), tehát 1008 különböző ilyen fagráf van.

Így a keresett szám 1009.

b) A feladatban leírt fagráfnak az origót a gráf tetszőleges $P(x; y)$ pontjával összekötő út éleinek száma nem kisebb, mint $|x| + |y|$, így $|x| + |y| \leqslant 2017$.

Ezért P benne van az $N = (2017; 0)$, $(0; 2017)$, $(-2017; 0)$, $(0; -2017)$ négyzetben, annak a határát is beleszámítva. Mivel N minden pontja nyilván valamelyik fagráfnak pontja, ezért a fagráfok pontjai az N négyzet belsejében vagy határán elhelyezkedő pontok.

7. *Egy társaság 5 nőből és 5 férfiből áll, és köztük két házaspár van.*

a) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha minden nő mindkét oldalán férfi ül? Két leülés különböző, ha van olyan személy a társaságban akinek a két leülésnél legalább az egyik oldal (jobb vagy bal) felől nem ugyanaz ül, mint a másik leülésnél. (*4 pont*)

b) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha minden nő mindkét oldalán férfi ül, és mindkét férj a felesége jobb oldalán ül (két leülés különböző olyan módon, mint az a) esetnél). (*4 pont*)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a társaság úgy ül le, hogy minden nő mindkét oldalán férfi ül, de egyik férfi sem ül a felesége mellett? (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel ugyanannyi férfi van, mint nő, és két nő nem ül egymás mellett, ezért nők és férfiak felváltva ülnek. A nők ciklikus permutációban $4! = 24$-féleképpen ülhetnek le. A nők leülése után a férfiak leülésének ciklikus cseréje már változást jelentene a leülésben, ezért az ő leülésük száma $5! = 120$. Így a tejes leülési szám a kettő szorzata: $24 \cdot 120 = 2880$.

b) A nők ciklikus permutációban $4! = 24$-féleképpen ülhetnek le. Ezeknél a leüléseknél a két férj helye rögzített, a további három férfi pedig $3! = 6$-féleképpen ülhet le. Tehát a keresett szám $24 \cdot 6 = 144$.

c) A jobb leírás érdekében megjelöljük a székeket, nagybetűvel a nők, kis betűvel a férfiak székét, az óramutató járása szerint: $A\ a\ B\ b\ C\ c\ D\ d\ E\ e$. Az egyik (mindegy, hogy melyik) férjes nő (n_1) helyét rögzítjük, legyen ez A. A másik férjes nő (n_2) 4 különböző helyre ülhet.

Ha B-re ült, akkor az n_1 nő f_1 férje 3 helyre: b, c, illetve d székekre ülhetett, és ekkor f_2 férj rendre a (c, d, e), a (d, e), illetve a (c, e) székekre ülhetett. Ez 7 eset.

Ha n_2 C-re ült, akkor f_1 ugyanazokra a b, c, illetve d székekre ülhetett, és ekkor f_2 férj rendre az (a, d, e), az (a, d, e), illetve az (a, e) székekre ülhetett. Ez 8 eset.

A szimmetria miatt, ha n_2 nem B-re, hanem E-re, illetve nem C-re, hanem D-re ült, akkor is a férjek leülésére 7, illetve 8 lehetőség van. Tehát a házastársak leülésére 30 lehetőség van. Mindegyiknél $3! = 6$ lehetőség a többi férfi leülésére, és $3! = 6$ lehetőség a többi nő leülésére. Tehát, ha a társaság úgy ül le, hogy minden nő mindkét oldalán férfi ül, de egyik férfi sem ül a felesége mellett, akkor a lehetséges leülések száma $30 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$.

Az összes leülések száma az a) rész szerint 2880, tehát a keresett valószínűség $\frac{1080}{2880} = \frac{3}{8}$.

8. *Legyen*

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{ha} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \left|2\sin(x-\pi)\right|, & \text{ha} \quad \pi \leqslant x \leqslant 3\pi. \end{cases}$$

a) Differenciálható-e a függvény az $x_0 = \pi$ pontban? (*4 pont*)

b) Adjuk meg azt a legbővebb halmazt, amelyen a függvény szigorúan monoton növekvő, és amelyen szigorúan monoton csökkenő. (*6 pont*)

c) Adjuk meg bizonyítás nélkül a függvény szélsőértékeinek helyét és értékét, de jelezzük nem csak azt, hogy minimum vagy maximum, hanem a szélsőértéknek a szigorú, a helyi és az abszolút tulajdonságát is. (*6 pont*)

Megoldás. a) Ha egy $g(x)$, $x \in (a;b)$ függvény differenciálható az $x_0 \in (a;b)$ pontban, akkor a differenciálhányados definíciója szerint nyilvánvaló, hogy a $g(x)$, $x \in (a;x_0]$ függvény is és a $g(x)$, $x \in [x_0;b)$ függvény is differenciálható x_0-ban, és a differencálhányadosok egyenlők.

Ennek alapján az $f(x) = \sin 2x$, ha $0 \leqslant x \leqslant \pi$ függvény differenciálhányadosa π-ben $2\cos 2\pi = 2$, és az $f(x) = \left|2\sin(x-\pi)\right|$, ha $\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$ függvény differenciálhányadosa π-ben $2\cos 0 = 2$.

Másrészt az $f(x) = \sin 2x$, ha $0 \leqslant x \leqslant \pi$ függvény differenciálhányadosa π-ben 2 és az $f(x) = \left|2\sin(x-\pi)\right|$, ha $\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$ függvény differenciálhányadosa π-ben 2 miatt az

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{ha} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \left|2\sin(x-\pi)\right|, & \text{ha} \quad \pi \leqslant x \leqslant 3\pi. \end{cases}$$

függvény is differenciálható π-ben (és a differenciálhányadosa 2).

A bizonyítás tehát arra a tételre való hivatkozással történik, hogy egy függvény az értelmezési tartományának belső pontjában akkor és csak akkor differenciálható, ha abban a pontban van jobb és bal oldali differenciálhányadosa, és azok megegyeznek.

b) A függvény a $\left[0;\frac{1}{4}\pi\right]$, $\left[\frac{3}{4}\pi;\frac{3}{2}\pi\right]$, $\left[2\pi;\frac{5}{2}\pi\right]$ intervallumokon szigorúan monoton növekvő, mert a végpontok kivételével a differenciálhányadosok pozitívok: $\left(0;\frac{1}{4}\pi\right)$-ben $2\cos 2x > 0$, $\left(\frac{3}{4}\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$-ben megosztva: $\left(\frac{3}{4}\pi;\pi\right]$-ben $2\cos 2x > 0$, $\left[\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$-ben $2\cos(x-\pi) > 0$, és $\left(2\pi;\frac{5}{2}\pi\right)$-ben $\left|2\cos(x-\pi)\right| > 0$.

De a zárt intervallumokon is érvényes a szigorú monotonitás, a definíció alapján bizonyítható. Ugyanis az intervallum kezdőpontjában felvett függvényérték kisebb, a végpontjában felvett függvényérték pedig nagyobb, mint a nyilt intervallumban felvett függvényérték.

Hasonlóan bizonyítható, hogy az $\left[\frac{1}{4}\pi;\frac{3}{4}\pi\right]$, $\left[\frac{3}{2}\pi;2\pi\right]$, $\left[\frac{5}{2}\pi;3\pi\right]$ zárt intervallumokon az $f(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő: az intervallumok belsejében a differenciálhányados negatív, a végpontokra a szigorú monotonitás a definíció alapján belátható.

c) A szélsőértékek helye és értéke:

$x=0$-ban szigorú helyi minimum van, értéke 0.

$x=\frac{1}{4}\pi$-ben szigorú helyi maximum van, értéke 1.

$x=\frac{3}{4}\pi$-ben szigorú abszolút minimum van, értéke -1.

$x=\frac{3}{2}\pi$-ben szigorú helyi és abszolut (nem szigorú) maximum van, értéke 2.

$x=2\pi$-ben szigorú helyi minimum van, értéke 0.

$x=\frac{5}{2}\pi$-ben szigorú helyi és abszolút (nem szigorú) maximum van, értéke 2.

$x=3\pi$-ben szigorú helyi minimum van, értéke 0.

9. *Egy könyvesboltban három kiadónak (jelölésük legyen* A, B, C*) mind a négy középiskolai évfolyam részére szóló matematika tankönyve megtalálható, áruk az évfolyamtól nem, csak a kiadótól függően rendre* 1500 Ft, 1800 Ft *és* 2000 Ft. *A könyvekről a boltban levő példányok számára vonatkozóan az alábbi adatok állnak rendelkezésünkre.*

9. *évfolyamos:*	A-*ból* 102 db, B-*ből* 120 db, C-*ből* 78 db *van;*
10. *évfolyamos:*	*összesen* 220 db *van, áruk átlagosan* 1750 Ft;
11. *évfolyamos:*	*összesen* 210 db *van, áruk átlagosan* 1760 Ft;
12. *évfolyamosról:*	*nincs adat,*

de tudjuk, hogy a négy évfolyaméból együtt (tehát az összes könyv) 810 db *van, áruk átlagosan* 1760 Ft. *(Az átlagok egészre kerekített értékek).*

a) *Mennyi a raktáron levő* 9. *évfolyamos könyvárak módusza, mediánja, átlaga és szórása?* (*6 pont*)

b) *Mit tudunk a fenti adatok alapján a* 12. *évfolyamos könyvek számáról és átlagáráról?* (*5 pont*)

c) *Ha az* A *kiadó raktárban levő könyveinek a száma* 305, *akkor mennyi a* B *és a* C *kiadók raktárban levő könyveinek száma, egészre kerekítve (az átlagok is egészre kerekített értékek voltak)?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A 9. évfolyamos könyvárak módusza: 1800, mediánja: 1800. Átlaga:

$$\frac{102\cdot 1500+120\cdot 1800+78\cdot 2000}{102+120+78}=1750.$$

Szórása:

$$\sqrt{\frac{102\cdot(1500-1750)^2+120\cdot(1800-1750)^2+78\cdot(2000-1750)^2}{102+120+78}},$$

egészre kerekítve 196.

b) A 12. évfolyamos könyvek darabszámát az összesből a többi évfolyamos darabszámát levonva kapjuk, száma: $810-300-220-210=80$. Ha a 12. évfolyamos könyvek átlagára x Ft, akkor az összes könyv árát kétféleképpen kiszámolva az x-re egyenletet kapunk:

$$810\cdot 1760=300\cdot 1750+220\cdot 1750+210\cdot 1760+80x.$$

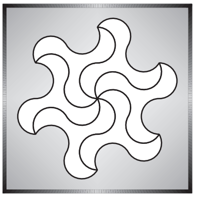
Ebből a 12. évfolyamos könyvek átlagára: $x = 1825$ Ft.

c) Legyen a B, illetve a C kiadók raktárban levő könyveinek száma b, illetve c. Tehát $b + c = 810 - 305 = 505$, és az átlagáruk alapján

$$1500 \cdot 305 + 1800b + 2000c = 810 \cdot 1760, \quad \text{azaz} \quad 18b + 20c = 9681.$$

A két egyenletből (egészre kerekítve): $b = 220$ és $c = 285$.

Kántor Sándor
Debrecen



Matematika feladatok megoldása

B. 4820. *Egy egységnyi oldalú szabályos háromszögrácson kijelöltünk négy olyan rácspontot, amelyek egy $\mathcal{P}$ paralelogramma csúcsai; a $\mathcal{P}$ területe $\sqrt{3}$ egység. Mekkora lehet a $\mathcal{P}$ belsejébe eső rácsszakaszok összege?*

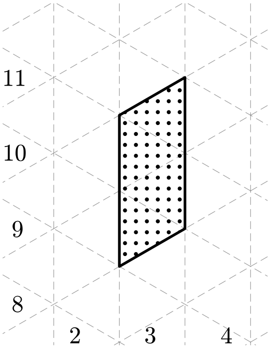
(*6 pont*)

Megoldás. Bontsuk esetekre a feladatot aszerint, hogy egy paralelogramma hány oldala illeszkedik rácsvonalra.

1. eset: Mind a négy oldal rácsvonalra illeszkedik.

Mivel a paralelogramma területe $\sqrt{3}$, ezért 4 rácsháromszöget tartalmaz. Vagyis ekkor a paralelogramma belsejében lévő rácsvonalak összhossza 3 (*1. ábra*).

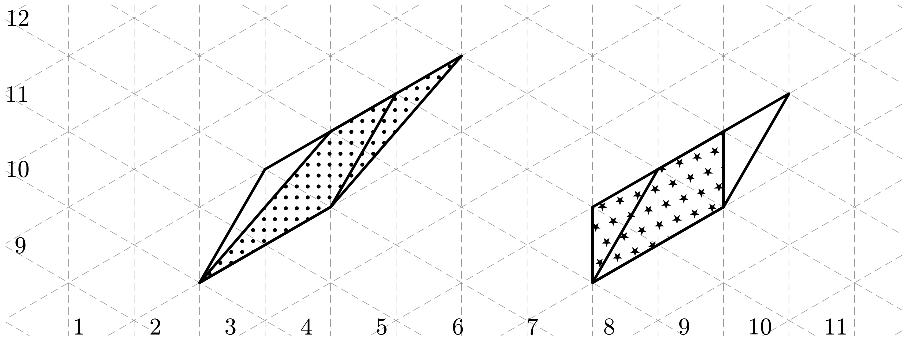
2. eset: Két oldal (nevezzük őket alapoknak) illeszkedik rácsvonalra. Mivel a paralelogramma magassága minimum $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (hiszen két párhuzamos rácsvonal között legalább ekkora a távolság), ezért az alapok hossza csak 1 vagy 2 lehet.



1. ábra

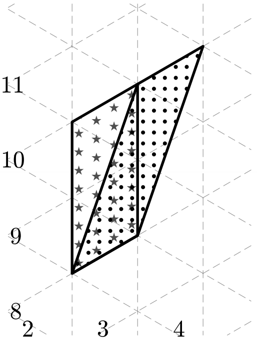
2.a eset: Az alapok hossza 2.

Vegyük észre, hogy ha egy paralelogrammát „eltolunk” egy egységgel (például a *2. ábrán* a pontozottat a simába), akkor nem változik a belső rácsvonalak összege (hiszen a „leeső”, és „bekerülő” háromszögek egybevágóak, eltolhatók egymásba, és ugyanannyi bennük a rácsvonalak összege). Ez csak akkor nem igaz, ha a keletkező paralelogramma mindegyik oldala rácsegyenesre illeszkedik, hiszen ekkor „elvész” az oldal a paralelogramma belsejéből, vagyis ebben az esetben 1-gyel csökken az összhossz (például a *2. ábrán* a sima paralelogrammából a csillagosba való „eltolásnál”).

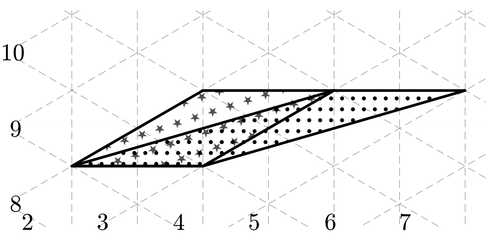


2. ábra

Vagyis az összes ebbe az esetbe illő paralelogrammát eltolhatjuk egy teljesen rácsvonalakra illeszkedő paralelogrammába úgy, hogy közben 1-gyel csökken a belső rácsvonalak összege. Tehát ekkor $3 + 1 = 4$ a belső rácsvonalak összhossza.



3. ábra



4. ábra

2.b eset: Az alapok hossza 1 (*3. ábra*).

Ekkor továbbra is igaz, hogy szabadon tologathatjuk a paralelogrammát, azonban a végén (amikor egy olyan paralelogrammát kapunk, amelynek minden oldala illeszkedik egy rácsegyenesre) a rácsvonalak összege 2-vel csökken. Vagyis ekkor $3 + 2 = 5$ a belső rácsvonalak összhossza.

3. eset: Nincs rácsvonalra illeszkedő oldala a paralelogrammának. Itt is igaz, hogy eltolhatjuk a paralelogrammát (nem feltétlenül egy egységgel), amíg egy olyat nem kapunk, amelynek az egyik oldala már rácsvonalra illeszkedik (*4. ábra*).

Ekkor egy 2. esetbeli paralelogrammát kapunk (hiszen az eltolás nem változtat a paralelogramma területén), vagyis kétféle lehet:

– Ha az alapja 2, akkor az eltolás során 2-vel csökkent a belső rácsvonalak összhossza, vagyis kezdetben $4 + 2 = 6$ volt.

– Ha az alapja 1, akkor az eltolás során 1-gyel csökkent a belső rácsvonalak összhossza, vagyis kezdetben $5 + 1 = 6$ volt.

Tehát ebben az esetben mindig 6 a belső rácsvonalak összhossza

Tehát egy $\sqrt{3}$ területű paralelogrammában a rácsvonalak összhossza 3, 4, 5 vagy 6 lehet.

Tóth Viktor (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)

58 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 24 versenyző: Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Beke Csongor, Borbényi Márton, Deák Bence, Gáspár Attila, Győrffy Ágoston, Imolay András, Kerekes Anna, Kocsis Júlia, Kovács Benedek, Kővári Péter Viktor, Márton Dénes, Matolcsi Dávid, Pap Benedek, Simon Dániel Gábor, Szabó Kristóf, Szakály Marcell, Szemerédi Levente, Tiderenczl Dániel, Tóth Viktor, Vankó Miléna, Várkonyi Dorka, Zólomy Kristóf. 5 pontos 2, 4 pontos 1, 3 pontos 3, 2 pontos 12, 1 pontos 12, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 4865. *Egy hegyesszögű háromszög a és b oldalai által bezárt szög harmadolói f és g. Igazoljuk, hogy*

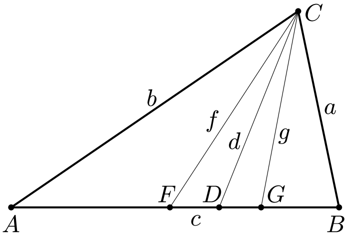
$$\frac{f+g}{2} < \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

(*6 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit, a C-ből induló szögfelező hossza legyen d, a háromszög belső szögei α, β és γ. Írjuk fel $ABC\triangle$ területét kétféleképpen:

$$\frac{ab\sin\gamma}{2} = T_{ABC} = T_{ADC} + T_{BCD} =$$

$$= \frac{db\sin\frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{ad\sin\frac{\gamma}{2}}{2}.$$



Innen, felhasználva hogy $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, kapjuk:

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{d}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

A kitűzöttnél erősebb

$$\text{(1)} \qquad \max\{f,g\} < \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{d}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

állítást fogjuk igazolni. Az FDC háromszögben $F\sphericalangle = \alpha + \gamma/3$ és $D\sphericalangle = \beta + \gamma/2$, így a szinusz-tétel szerint

$$\frac{f}{d} = \frac{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}.$$

Megmutatjuk, hogy ha $0 < \alpha, \gamma < \pi/2$ és $\alpha + \gamma \geqslant \pi/2$, akkor

$$\text{(2)} \qquad \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)} < 1.$$

Ebből, mivel f és g szerepe szimmetrikus, következik (1). Először tegyük fel, hogy $\alpha+\gamma=\pi/2$. Ekkor

$$\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\gamma}{3}\right)}=\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{2\gamma}{3}}=$$

$$=\frac{1+\cos\gamma}{2\cos\frac{2\gamma}{3}}=\frac{1+4\cos^3\frac{\gamma}{3}-3\cos\frac{\gamma}{3}}{4\cos^2\frac{\gamma}{3}-2}.$$

Mivel $0<\gamma/3<\pi/6$, így $\sqrt{3}/2<\cos\gamma/3<1$. Az $x:=\cos\gamma/3$ jelölést bevezetve ez a bizonyítandó állítás:

$$\frac{4x^3-3x+1}{4x^2-2}<1\ \Leftrightarrow\ 4x^3-4x^2-3x+3<0\ \Leftrightarrow\ (x-1)(4x^2-3)<0.$$

Ez pedig nyilvánvalóan teljesül, mert $x-1<0$ és $4x^2-3>0$, ezért $\alpha+\gamma=\pi/2$ esetén (2)-t beláttuk.

Most rögzítsük γ-t, és legyen

$$f(\alpha)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}.$$

Megmutatjuk, hogy f a $[\pi/2-\gamma,\pi/2]$ intervallumon monoton csökken. Ehhez deriváljuk f-et:

$$f'(\alpha)=\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}{\sin^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{-\gamma}{6}}{\sin^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}.$$

A derivált triviálisan negatív, így f valóban monoton csökkenő. Ebből és az $\alpha+\gamma=$ $=\pi/2$ speciális esetből (2) és így az állítás is következik.

Megjegyzések: 1. A (2) egyenlőtlenséget deriválás nélkül, trigonometrikus azonosságok ügyes alkalmazásával is igazolhatjuk. Érdemes azonban a bemutatott módszert észben tartani, amikor egyenlőtlenséget akarunk bizonyítani. Ha a derivált előjele triviálisan látszik, mint esetünkben is, akkor biztosan megkönnyíti a számolást.

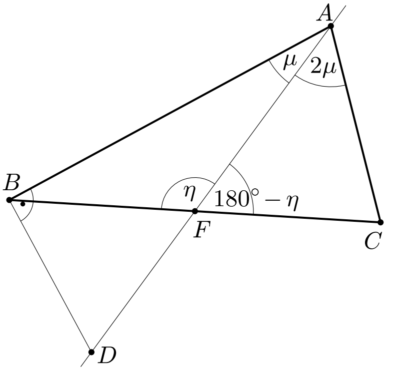
2. Honlapunkon található a feladatra két elemi megoldás, amelyek nem használnak differenciálszámítást.

18 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 11 versenyző: Beke Csongor, Borbényi Márton, Csahók Tímea, Daróczi Sándor, Gáspár Attila, Imolay András, Kerekes Anna, Kővári Péter Viktor, Németh 123 Balázs, Szabó Kristóf, Tóth Viktor. 5 pontos 1, 4 pontos 1, 2 pontos 4, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4868. *Az ABC háromszögben $AC < AB$, és az AF súlyvonal az A-nál lévő szöget* $1:2$ *arányban osztja. A B-ben AB-re állított merőleges az AF egyenest D-ben metszi. Mutassuk meg, hogy $AD = 2AC$.*

(*3 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Írjuk fel a szinusz-tételt az ABF, illetve az AFC háromszögekben:



$$\frac{AB}{BF} = \frac{\sin\eta}{\sin\mu};$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{\sin(180° - \eta)}{\sin 2\mu}.$$

Továbbá definíció szerint az ABD derékszögű háromszögben $\cos\mu = AB/AD$. Felhasználva, hogy $BF = FC$, valamint a $\sin 2\mu = 2\sin\mu\cos\mu$ azonosságot a következőket kapjuk:

$$AC = \frac{\sin(180° - \eta)}{\sin 2\mu}CF = \frac{\sin\eta}{2\sin\mu\cos\mu}BF = \frac{\sin\eta}{\sin\mu}BF \cdot \frac{1}{2\cos\mu} = \frac{AB}{2\cos\mu} = \frac{AD}{2}.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

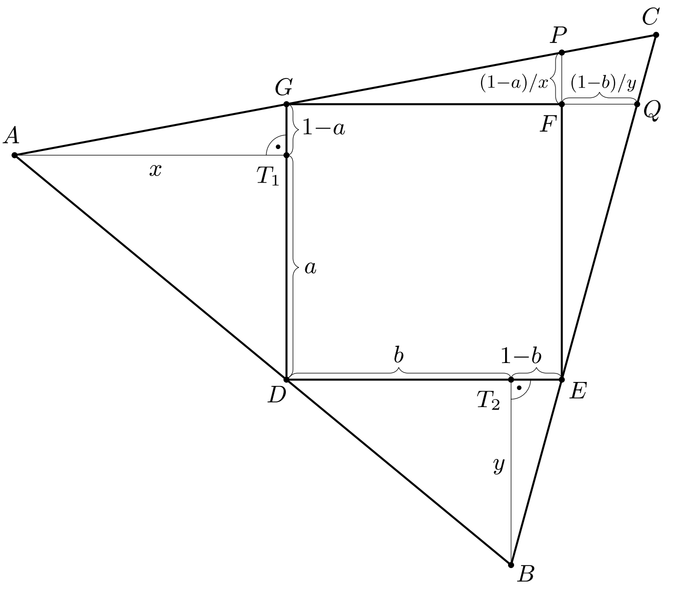
53 dolgozat érkezett. 3 pontos 48, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 2 dolgozat.

B. 4884. *Legalább mekkora egy olyan háromszögnek a területe, mely magába foglal egy egységnégyzetet?*

(*6 pont*) Javasolta: *Bogár Péter* (Békéscsaba)

Megoldás. A minimális területű háromszög minden oldala biztosan tartalmazza a négyzetnek legalább egy pontját, különben a megfelelő oldalegyenest a négyzet irányába párhuzamosan eltolhatnánk, amivel a háromszög területét csökkentenénk. Világos, hogy ha a háromszög egyik oldala tartalmazza a négyzet egy oldalának egy belső pontját, akkor az egész oldalt is tartalmazza (mivel a háromszög tartalmazza a négyzetet), ezért feltehetjük, hogy a minimális területű háromszög minden oldala biztosan tartalmazza a négyzetnek legalább egy csúcsát. Ha két oldal ugyanazt a négyzetcsúcsot tartalmazza, akkor a háromszögnek és négyzetnek van egy közös csúcsa. E közös csúcs körül a háromszög illeszkedő oldalait elforgathatjuk, hogy rendre egybeessenek a négyzet oldalaival, ezzel a háromszög területét nem növeljük.

Összességében azt kaptuk, hogy az *ábra* általános érvényű azzal a kiegészítéssel, hogy a $CPFQ$ négyszög esetleg szakasszá vagy ponttá fajulhat (s ezzel együtt az AT_1G és BT_2E háromszögek is elfajulhatnak természetesen), ezek azonban gondolatmenetünket érdemben nem befolyásolják. Használjuk tehát az ábra jelöléseit, továbbá legyen $DT_1 = a$, $AT_1 = x$; $DT_2 = b$ és $BT_2 = y$. Ekkor $GT_1 = 1 - a$ és



$ET_2 = 1 - b$. A szögeik egyenlősége miatt $AT_1G\triangle \sim GFP\triangle$ és $BT_2E\triangle \sim EFQ\triangle$ teljesül, amiből $PF = (1-a)/x$ és $FQ = (1-b)/y$ adódik. Továbbá

$$ADT_1\triangle \sim DBT_2\triangle$$

miatt $ab = xy$ is teljesül. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x/a \leqslant 1$. (Különben $y/b \leqslant 1$, és a szerepek szimmetrikusak.)

Becsüljük alulról az ABC háromszög T területét:

$$\text{(1)} \qquad T \geqslant T - T_{FQCP} = T_{DEFG} + T_{ADG} + T_{BED} + T_{FPG} + T_{QFE} =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\frac{1-a}{x}}{2} + \frac{\frac{1-b}{y}}{2} = 1 + \frac{x + y + \frac{1-a}{x} + \frac{1-b}{y}}{2}.$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{1-a}{x} + \frac{1-b}{y} - \frac{1-xy}{y} = \frac{1}{x} - \frac{a}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y} - \frac{b}{y} + x = x + \frac{1}{x} - \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right) \geqslant 0,$$

ugyanis a feltevés szerint $a \leqslant 1$, s így $x \leqslant \frac{x}{a} \leqslant 1$ teljesül, továbbá az $f(t) = t + 1/t$ függvény a $(0,1]$ intervallumon monoton csökken. Ebből, folytatva (1)-et, tovább becsülhetjük alulról T-t:

$$T \geqslant 1 + \frac{x + y + \frac{1-xy}{y}}{2} = 1 + \frac{y + \frac{1}{y}}{2} \geqslant 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha $T_{FQCP} = 0$, azaz a négyzet egyik oldala illeszkedik a háromszög valamely oldalára (a négyzet maradék két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalán van). Egyszerű számolással meggyőződhetünk róla, hogy ilyenkor valóban $T=2$.

Tehát egy egységnégyzetet magában foglaló háromszög területe legalább 2 területegység.

Daróczi Sándor (Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn., 11. évf.)

36 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 16 versenyző: Baran Zsuzsanna, Daróczi Sándor, Döbröntei Dávid Bence, Fülöp Anna Tácia, Gáspár Attila, Győrffy Ágoston, Imolay András, Kerekes Anna, Kővári Péter Viktor, Lakatos Ádám, Scheidler Barnabás, Sulán Ádám, Szabó 417 Dávid, Tiderenczl Dániel, Tóth Viktor, Weisz Máté. 5 pontos 3, 4 pontos 6, 3 pontos 6, 2 pontos 4, 1 pontos 1 dolgozat.

B. 4894. *Hét rabló a zsákmányolt aranytallérokat úgy osztja el, hogy névsor szerint haladva annyit vesznek el, amennyi a még nem szétosztott aranytallérok számában a számjegyek összege. Két teljes kör után az arany elfogy. Mindenkinek ugyanannyi jutott, csak a vezérnek lett több. Hányadik volt a vezér a névsorban?*

(*4 pont*) *Matlap* (Kolozsvár)

Megoldás. Miután az első rabló elvesz annyi aranytallért, amennyi a zsákmányolt aranytallérok számában a számjegyek összege, a megmaradt tallérok száma biztosan osztható lesz 9-cel, hiszen a 9-cel való oszthatósági szabály alapján a számjegyek összegének 9-es maradéka ugyanannyi, mint a szám 9-es maradéka.

Még 13-szor veszik el egy 9-cel osztható összegből mindig az összeg számjegyeinek összegét, ami szintén osztható 9-cel, tehát minden lépésben 9-cel osztható szám marad.

Mivel a tallérok elfogynak, az utolsó lépésben elvett tallérok száma csak egyjegyű, 9-cel osztható szám lehet, mert a kettő vagy többjegyű számok nagyobbak számjegyeik összegénél. Tehát a 14-dik lépésben elvett tallérok száma 9.

Mivel 14-szer vesznek el az aranyból és ebből 13-szor biztosan a 9 többszörösét, a kiindulási szám biztosan nagyobb, mint 100.

Nézzük azt esetet, amikor az aranyak száma még háromjegyű, egy rabló elveszi a számjegyek összegét és a maradék aranyak száma már csak kétjegyű lesz:

$$\overline{abc}-(a+b+c)=99a+9b.$$

Mivel $a>0$, ezért ez a szám csak akkor kétjegyű, ha $a=1$ és $b=0$. Tehát valamikor az elvételek során az aranyak száma 99 lesz.

Ezután a következő módon fog fogyni az arany:

a tallérok száma	99	81	72	63	54	45	36	27	18	9	0
a tallérok számában a számjegyek összege	18	9	9	9	9	9	9	9	9	9	0

Ez összesen 10 lépés, tehát az 5. rabló volt az, aki 99 tallérból 18-at vett el. A feladat szövege szerint a vezéren kívül mindenkinek ugyanannyi jut, tehát ők mindkét alkalommal 9-9 aranyat vettek. Ezt felhasználva az első öt tallér elvétel így alakul:

a tallérok száma	135	126	117	108	99	81
a tallérok számában a számjegyek összege	9	9	9	9	18	9

Tehát a vezér az 5. volt a névsorban.

Markó Anna Erzsébet (Révkomárom, Selye János Gimnázium, 11. évf.) és
Vida Tamás (Győr, Kazinczy F. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

221 dolgozat érkezett. 4 pontos 109, 3 pontos 63, 2 pontos 19, 1 pontos 26, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 4905. *Legyen* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n-1} \geqslant a_{2n} \geqslant 0$, *illetve* $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 1$. *Igazoljuk, hogy*

$$a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Mikor teljesül egyenlőség?

(*4 pont*)

Megoldás. Ha valamilyen $k \leqslant n$-re $a_{2k-1} = 0$, akkor $a_{2k-1} = a_{2k} = \ldots = a_{2n-1} = a_{2n} = 0$, és ugyanolyan feltételek mellett feladatként a bizonyítandó egyenlőtlenség $n = k-1$ esetét kapjuk. Ha pedig $a_{2k-1} > 0 = a_{2k}$, akkor hasonlóan elég $n = k-1$-re igazolni az állítást. Ezért az egyenlőtlenség bizonyítása során feltesszük, hogy a_{2n}, és így valamennyi a_j pozitív.

A feltételek szerint minden $t > k$-ra $a_{2t-1}a_{2t} \leqslant a_{2k-1}a_{2k}$, azaz

$$a_{2t-1}a_{2t} \leqslant \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}a_{2t-1}a_{2t}};$$

így

$$(2t-1)a_{2t-1}a_{2t} \leqslant a_{2t-1}a_{2t} + 2\sum_{k=1}^{t-1} \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}a_{2t-1}a_{2t}}.$$

A kapott egyenlőtlenségeket összeadva:

$$\sum_{t=1}^{n} (2t-1)a_{2t-1}a_{2t} \leqslant \sum_{t=1}^{n} a_{2t-1}a_{2t} + 2\sum_{1\leqslant k<t\leqslant n} \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}\sqrt{a_{2t-1}a_{2t}} =$$

$$= \left(\sum_{b=1}^{n} \sqrt{a_{2b-1}a_{2b}}\right)^2.$$

Az utóbbi összeg mindegyik tagjára a (kéttagú) számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget felírva:

$$\left(\sum_{b=1}^{n} \sqrt{a_{2b-1}a_{2b}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{b=1}^{n} \frac{a_{2b-1}+a_{2b}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Egyenlőséget akkor kapunk, ha valamennyi $a_{2t-1}a_{2t} \leqslant a_{2k-1}a_{2k}$ és $\sqrt{a_{2b-1}a_{2b}} \leqslant \leqslant \frac{a_{2b-1}+a_{2b}}{2}$ becslésünkben egyenlőség áll. Előbbieknél ez ($a_j > 0$ miatt) $a_{2t-1} = a_{2k-1}$ és $a_{2t} = a_{2k}$ (minden $k < t$-re), utóbbiaknál pedig $a_{2b-1} = a_{2b}$ esetén (minden b-re) teljesül, vagyis $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n}$-re. Az általános esetben tehát az egyenlőség teljesülésének szükséges és elégséges feltétele

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad \text{vagy}$$

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2v} = \frac{1}{2v}, \quad a_{2v+1} = a_{2v+2} = \ldots = 0, \quad \text{valamely} \quad 1 \leqslant v < n\text{-re.}$$

Kupás Vendel Péter (Gyöngyösi Berze Nagy János Gimn., 12. évf.)

70 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 10 versenyző: Bukva Dávid, Fülöp Anna Tácia, Gáspár Attila, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Kovács Tamás, Kupás Vendel Péter, Nagy Nándor, Terjék András József, Weisz Máté. 3 pontos 25, 2 pontos 8, 1 pontos 21, 0 pontos 6 dolgozat.

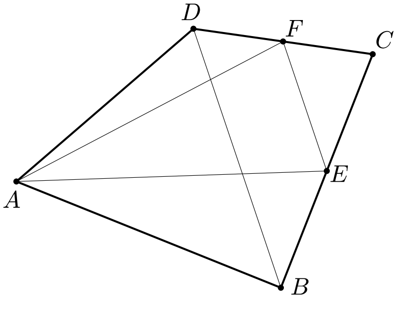
B. 4906. *Az $ABCD$ konvex négyszög BC és CD oldalainak felezőpontja rendre E és F. Az AE, EF és AF szakaszok a négyszöget négy olyan háromszögre bontják, melyek területeinek mérőszáma négy egymást követő egész szám. Legfeljebb mekkora lehet az ABD háromszög területe?*

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

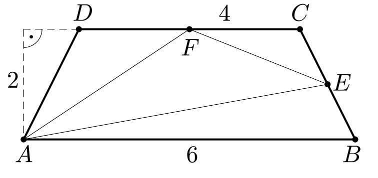
Megoldás. Használjuk az *1. ábrát.* Legyenek az ABE, AEF, AFD, FEC háromszögek területeinek mérőszámai (nem feltétlenül ebben a sorrendben) az n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ pozitív egész számok. Ekkor $T_{ABCD} = 4n+6$. Mivel $T_{ABCD} = T_{ABD} + T_{BCD}$, emiatt T_{ABD} pontosan akkor maximális, ha T_{BCD} minimális.

Másfelől a BCD háromszögben EF a BD-vel párhuzamos középvonal, emiatt a BCD háromszög hasonló az ECF háromszöghöz. A hasonlóság aránya 2, így a háromszögek területeire $T_{BCD} = 4 \cdot T_{ECF}$ teljesül.

Mivel T_{ECF} az n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ számokból kerül ki, ezért T_{BCD} akkor a legkisebb, ha $T_{ECF} = n$, és ekkor $T_{BCD} = 4 \cdot T_{ECF} = 4n$. Ekkor $T_{ABD} = T_{ABCD} - T_{BCD} = (4n+6) - 4n = 6$.



1. ábra



2. ábra

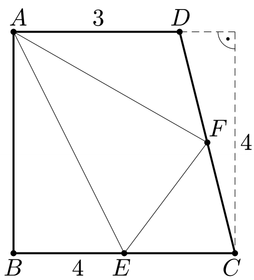
Vagyis az ABD háromszög területének lehető legnagyobb értéke 6 területegység.

Meg kell még mutatnunk, hogy létezik megfelelő $ABCD$ négyszög. Ehhez néhány példa a beküldött jó konstrukciók közül. (*Sajnos a beküldött megoldások jelentős részében ezt elfelejtették megmutatni, ezért a viszonylag sok* 4 *pontos dolgozat.*)

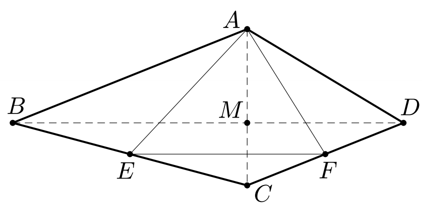
1. példa: Legyen $ABCD$ olyan trapéz, melynek alapjai $AB=6$, illetve $CD=4$ és az alapokhoz tartozó magassága 2 (*2. ábra*). Ekkor $T_{ABD}=6$; $T_{ABCD}=10$, $T_{ABE}=3$, $T_{AFD}=2$ és $T_{ECF}=1$, amiből $T_{AEF}=10-(3+2+1)=4$.

2. példa: Most $ABCD$ olyan trapéz, melynek alapjai $BC=4$, illetve $AD=3$ és az alapokhoz tartozó magassága 3 (*3. ábra*). Ekkor $T_{ABD}=6$; $T_{ABCD}=14$, $T_{ABE}=4$, $T_{AFD}=3$ és $T_{ECF}=2$, amiből $T_{AEF}=14-(4+3+2)=5$.

(*Több példa voltaképpen ezen a két ábrán alapult; az alapokat felezve, kétszerezve, vagy $\sqrt{2}$-vel osztva, míg a magasságot pont fordítva alakítva: duplázva, felezve, illetve $\sqrt{2}$-vel szorozva.*)



3. ábra



4. ábra

3. példa: Az utolsó példánk (bár AB itt is párhuzamos CD-vel) arra épít, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra. Legyen $ABCD$ olyan négyszög, melynek átlói merőlegesen metszik egymást az M pontban,

$$AM=\frac{6\sqrt{2}}{5},\quad CM=\frac{4\sqrt{2}}{5},\quad BM=3\sqrt{2}\ \text{ és }\ DM=2\sqrt{2}$$

hosszú (*4. ábra*). Ekkor

$$T_{ABE}=\frac{T_{ABC}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\left(\frac{6\sqrt{2}}{5}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)}{2\cdot 2}=3,$$

$$T_{AFD}=\frac{T_{ACD}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{6\sqrt{2}}{5}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)}{2\cdot 2}=2,$$

míg

$$T_{ECF}=\frac{T_{BCD}}{4}=\frac{\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\cdot\frac{4\sqrt{2}}{5}}{2\cdot 4}=1.$$

Mivel

$$T_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{5}}{2} = 10, \quad \text{innen} \quad T_{AEF} = 10 - (3 + 2 + 1) = 4.$$

Végül

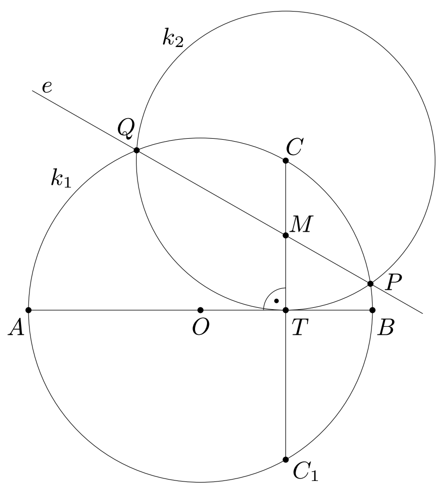
$$T_{ABD} = \frac{\left(2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \frac{6\sqrt{2}}{5}}{2} = 6.$$

Győrffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.),
Lukács Lilla Réka (Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.),
Olosz Adél (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn. és Szakgimn., 11. évf.) és
Schrettner Jakab (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 101 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 44 versenyző, 4 pontos 48, 3 pontos 6, 2 pontos további 3 tanuló dolgozata.

B. 4908. *Legyen C az AB átmérőjű körvonal tetszőleges pontja. A C pont merőleges vetülete az AB szakaszra legyen T. Rajzoljuk meg a C középpontú, T-n átmenő kört és a két kör metszéspontjai legyenek P és Q. Bizonyítsuk be, hogy a PQ egyenes felezi a CT szakaszt.*

(*4 pont*) (*Kvant*)



Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Tudjuk, hogy olyan kör inverz képe, amely átmegy az alapkör középpontján, egyenes lesz. A k_1 kör átmegy a k_2 kör középpontján valamint P és Q pontjain, így a k_1 kör k_2 körre vett inverz képe a $PQ = e$ egyenes lesz.

Tükrözzük a C pontot az AB egyenesre, legyen a tükörkép C_1. Ekkor $CC_1 = 2CT$.

Invertáljuk a C_1 pontot a k_2 körre. Mivel C_1 rajta van a k_2 kör CT sugarának meghosszabbításán, így képe a CT sugárra esik. Mivel rajta van a k_1 körön is, ezért képének rajta kell lenni az e egyenesen, mert ez a k_1 kör inverz képe. Tehát a C_1 pont inverz képe a CT sugár és az e egyenes metszéspontja, M lesz.

Az inverzió tulajdonságai miatt:

$$|CM| \cdot |CC_1| = |CT|^2,$$

$$|CM| = \frac{|CT|^2}{|CC_1|} = \frac{|CT|^2}{2|CT|} = \frac{|CT|}{2}.$$

Tehát az M pont, és így a PQ egyenes felezi a CT szakaszt.

Hervay Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) és
Velkey Vince (Budapest, Piarista Gimnázium, 12. évf.)
megoldása alapján

62 dolgozat érkezett. 4 pontos 50, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 3, 0 pontos 5 dolgozat.

B. 4911. *Egy* 8×8*-as sakktáblára bábukat helyeztünk úgy, hogy minden sorba és minden oszlopba is páratlan számú bábu került. Bizonyítsuk be, hogy a sötét mezőkön összesen páros sok bábu áll.*

(*5 pont*)

I. megoldás. A sakktáblának ez a tulajdonsága nem változik, ha a tábla két oszlopát vagy sorát (a rajtuk álló bábukkal együtt) megcseréljük, hiszen oszlopcserénél az oszlopokban nyilván megmarad ez a tulajdonság, a sorokban meg csak annyi történt, hogy adott soron belül kicseréltünk két mezőt, így a paritás szintén nem változik. Ugyanez a helyzet sorcserénél is.

Tehát szabadon cserélgethetjük az oszlopokat és a sorokat, az említett tulajdonságon ez nem fog változtatni. Számozzuk meg az eredeti sakktáblán a sorokat fentről lefele s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 és s_8 jelöléssel, az oszlopokat pedig balról jobbra o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7 és o_8 jelöléssel. Cserélgessük úgy a sorokat, hogy utána a sorrend s_1, s_3, s_5, s_7, s_2, s_4, s_6, s_8 legyen, az oszlopokat pedig úgy, hogy a sorrendjük o_1, o_3, o_5, o_7, o_2, o_4, o_6, o_8 legyen. Ekkor úgy fog kinézni a tábla, hogy négy 4×4-es négyzetre lesz felosztva, amelyek közül kettő átellenes csupa fekete, a másik kettő meg fehér mezőkből áll. Erre tehát ugyanúgy teljesülnek a fenti feltételek, vagyis, hogy minden oszlopban és sorban páratlan számú mezőn áll bábu. Nézzük az egyik 4×8-as téglalapot, amelynek sorai s_1, s_3, s_5 és s_7. Ebben összesen négy sor van, mindben páratlan darab bábu, azaz összesen páros darab van, tehát ha a 4×4-es fekete részen összesen páros darab bábu áll, akkor a 4×4-es fehér részen is, ha pedig páratlan, akkor a fehéren is, vagyis ugyanaz a paritása a felső két 4×4-es négyzetben lévő bábuk számának. Ugyanígy látható, hogy a jobb felső 4×4-es fehér, és a jobb alsó 4×4-es fekete négyzetben lévő bábuk számának is ugyanaz a paritása, azaz a két fekete résznek is meg fog egyezni. Ez pedig azt jelenti, hogy bennük összesen páros számú bábu van, és éppen ezt akartuk belátni.

Csizmadia Viktória (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Mivel minden sorban páratlan számú bábu van, összesen páros bábu van a táblán (mivel számuk nyolc páratlan szám összege).

Egy sakktáblán azoknak a mezőknek ugyanolyan a színe, ahol a sor és az oszlop (amelyben a mező van) sorszámának összege ugyanolyan paritású. Tegyük fel, hogy akkor világos az adott mező, ha ez a szám páros (fordított esetben a lenti bizonyítás azt adja meg, hogy páros számú bábu áll világos mezőkön, de ebből következik, hogy sötéten is).

Vegyük az alábbi összeget: minden páros számú sornak és oszlopnak vesszük a bennük szereplő bábuk számát, majd ezt a nyolc számot összeadjuk. Az összeg (mivel mindegyik tagja páratlan és nyolc tagja van) páros. Ebben az összegben kétszer számoltuk azokat a mezőket, ahol a sor és az oszlop száma is páros (ezek világosak), így ez nem változtat az összeg paritásán. Egyszer sem számoltuk azokat, amelyeknél a sor és az oszlop száma is páratlan, így ezek sem változtatnak a paritáson (ezek a mezők is világosak). Egyszer számoltuk azokat, ahol vagy a sor, vagy az oszlop sorszáma páros, de nem mindkettőé (ezek a sötét mezők). Így ezeknek a száma határozza meg az összeg paritását. Ha az ezeken a mezőkön álló bábukból páratlan sok lenne, az összeg is páratlan lenne, ami ellentmondás. Így bizonyítottuk az állítást, páros sok bábu áll a sötét mezőkön.

Molnár Bálint (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Tudjuk, hogy lehet a bábuknak olyan elhelyezkedése, amikor páros sok bábu van a sötét mezőkön. Ha például csak a főátlóra teszünk nyolc darab bábut, akkor a sötét mezőkön nulla darab bábu lesz. Ekkor minden sorban és oszlopban egy bábu áll.

Ahhoz, hogy egy másik jó elhelyezkedést megkapjunk, egy vagy több rácstéglalap csúcsában levő mezőket kell „megváltoztatni". Egy mezőt megváltoztatni azt jelenti, hogy, ha eddig volt ott bábu, akkor levesszük, ha eddig nem volt, akkor meg felteszünk egyet. Ez azért igaz, mert minden sorban és oszlopban páros sok mezőt kell megváltoztatunk, és ezt csak így lehet megtenni. Nyilván, ha egy lépésben kétszer változtatunk meg egy mezőt, akkor ugyanolyan marad.

Egy rácstéglalap mindenképpen páros sok sötét mezőt tartalmaz, hiszen, ha az „alsó" két mező különböző, akkor a „felső" kettő is, ha pedig azonosak, akkor a „felső" kettő is azonos. Így egy lépésben egy páros számmal változik a lefedett sötét mezők száma.

Ezekkel a lépésekkel minden lehetséges bábu-elhelyezkedést meg tudunk kapni, hiszen minden sorban és oszlopban akár 7 mezőt is beállíthatunk tetszőlegesen, a 8. pedig ezektől függ.

Ha a kiindulásnál páros sok sötét mezőn állt bábu, és minden lépésben páros sokat változtattunk meg, akkor mindig páros sok ilyen mező lesz.

Várkonyi Zsombor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

105 dolgozat érkezett. 5 pontos 64, 4 pontos 5, 3 pontos 3, 2 pontos 15, 1 pontos 9, 0 pontos 9 dolgozat.

B. 4918. *Mutassuk meg, hogy M darab ($M \geqslant 2$) térbeli egységvektorból ki lehet választani $M-1$ olyat, amelyek összegének hossza legalább egységnyi.*

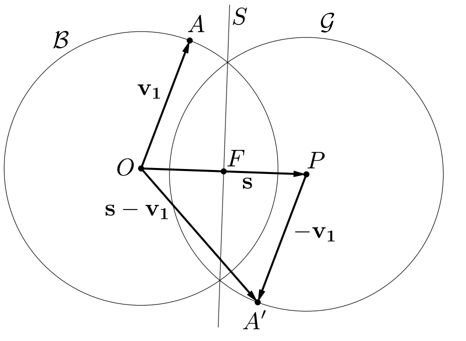
(*5 pont*)

Megoldás. Az adott egységvektorok legyenek $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_M}$, az O origó középpontú egységnyi sugarú gömböt jelölje $\mathcal{B}$. Legyen P az a pont, aminek helyvektora $\mathbf{s} = \mathbf{v_1} + \ldots + \mathbf{v_M}$; továbbá a P középpontú egységgömböt jelölje $\mathcal{G}$.

Világos, hogy ha a $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_M}$ vektorok közül egyet elhagyunk, akkor a maradék összege az origóból valahova $\mathcal{G}$ felszínére mutat. Ezért ha $\mathcal{G}$ felszíne nem metsz bele $\mathcal{B}$ belsejébe, akkor bármely $M-1$ vektort kiválaszthatjuk, ezek összege „kimutat $\mathcal{B}$-ből", így legalább egységnyi hosszúságú. A továbbiakban tegyük fel, hogy

$\mathcal{G}$ és $\mathcal{B}$ egy körben metszik egymást, amely nyilván illeszkedik az OP szakasz S felezőmerőleges síkjára.

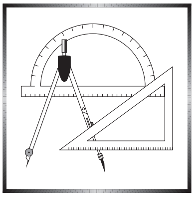
Vetítsük le a $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_M}$ vektorokat az OP egyenesre, és tekintsük a vetületek előjeles hosszát: ha a vetületvektor $\mathbf{s}$-sel egyállású, akkor a hosszát pozitívnak tekintjük, egyébként negatívnak. Mivel a vektorok összege éppen $\mathbf{s}$, azért a vetületek előjeles hosszának összege $|\mathbf{s}|$. Így van olyan vektor, mondjuk $\mathbf{v_1}$, amely vetületének előjeles hossza legfeljebb $|\mathbf{s}|/2$. Ez geometriailag pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{v_1}$ az origóból egy olyan A pontba mutat, amely az S-nek az origót tartalmazó zárt félterébe esik. Messük el a $\mathcal{G}$ és $\mathcal{B}$ gömböket az AOP síkkal, így kapjuk az *ábrát.*



Legyen az A pontnak az OP szakasz F felezőpontjára vett tükörképe A'. Ekkor $\overrightarrow{PA'} = -\mathbf{v_1}$, ezért $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA'} = \mathbf{s} - \mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} + \ldots + \mathbf{v_M}$, azaz $M-1$ darab adott vektor összege. A tükrözés miatt az S sík elválasztja az O és A' pontokat (esetleg $A' \in S$), valamint A' illeszkedik $\mathcal{G}$ felszínére, ezért – ahogyan az az ábráról leolvasható – A' nem lehet a $\mathcal{B}$ gömb belsejében. Így $|\overrightarrow{OA'}| \geqslant 1$, és a bizonyítást befejeztük.

Zsigri Bálint (Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.)

69 dolgozat érkezett. 5 pontos 36, 4 pontos 9, 3 pontos 7, 2 pontos 4, 1 pontos 3, 0 pontos 10 dolgozat.



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1476–1482.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1476. Igazoljuk, hogy az

$$\frac{(y-6)^2}{3xy} + x \cdot \frac{y+3}{y} \geqslant 4 + x - \frac{4}{x} - \frac{xy}{12}$$

egyenlőtlenség minden pozitív x, y valós számpárra teljesül.

C. 1477. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ trapéz AD alapján van olyan E pont, amelyre az ABE, BCE és CDE háromszögek kerülete egyenlő, akkor $BC = \frac{1}{2}AD$.

Feladatok mindenkinek

C. 1478. Egy 37-tel osztható hatjegyű szám számjegyei különbözőek, és nem szerepel közöttük a 0. Mutassuk meg, hogy a számjegyek sorrendjét cserélgetve még legalább hat 37-tel osztható számot kaphatunk.

C. 1479. Egy ABC háromszögben az AC oldal T belső pontjára $TA = BC$, továbbá az AB oldal P belső pontjára a CBP és PAT háromszögek egybevágóak. A BC oldal Q belső pontjára TQ nem párhuzamos AB-vel, és a BPQ háromszög hasonló a TCQ háromszöghöz. Igazoljuk, hogy $PT = QT$.

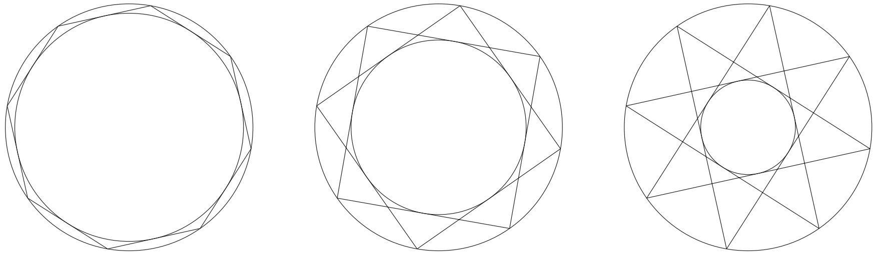
C. 1480. Oldjuk meg az

$$\frac{x^3 - 7x + 6}{x - 2} = \frac{2x + 14}{x + 2}$$

egyenletet az egész számok halmazán.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1481. Egy 2 sugarú körbe írt szabályos nyolcszög csúcsait három különböző módon kötjük össze az *ábra* szerint: minden szomszédos, minden másodszomszédos, majd minden harmadszomszédos csúcsot. Igazoljuk, hogy a három beírt kör sugarának szorzata 2.



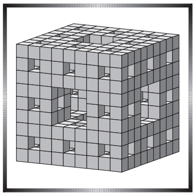
C. 1482. Igazoljuk, hogy

$$\left|2\sin x + \sin(2x)\right| < \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\,.$$

❄

Beküldési határidő: 2018. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4948–4956.)

B. 4948. Az n pozitív egész számot nevezzük *darabosnak,* ha van olyan prímosztója, amely nagyobb $\sqrt{n}$-nél. Például a 2017 (prímszám), a $2018 = 2 \cdot 1009$ és a $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ darabosak, a $2023 = 7 \cdot 17^2$ nem az. Hány olyan darabos szám van, amelynek csak 30-nál kisebb prímosztói vannak?

(*3 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 4949. Az ABC hegyesszögű háromszög B-ből, illetve C-ből induló magasságának talppontja D, illetve E. Legyen P az AD, Q pedig az AE szakasz olyan belső pontja, amelyre $EDPQ$ húrnégyszög. Mutassuk meg, hogy a BP és CQ szakaszok az A-ból induló súlyvonalon metszik egymást.

(*3 pont*)

B. 4950. Jelöljük F_n-nel az n-edik Fibonacci-számot ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), és definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatot a következő rekurzióval: legyen $a_0 = 2018$, és minden $k \geqslant 0$-ra legyen $a_{k+1} = a_k + F_n$, ahol F_n a legnagyobb a_k-nál kisebb Fibonacci-szám. Előfordul-e az (a_k) sorozatban Fibonacci-szám?

(*4 pont*)

B. 4951. A V halmaz elemei olyan n-dimenziós vektorok (rendezett szám n-esek), amelyek minden koordinátája -1, 0 vagy 1. Semelyik három különböző V-beli vektor összege nem a nullvektor. Mutassuk meg, hogy $|V| \leqslant 2 \cdot 3^{n-1}$.

(*4 pont*)

B. 4952. Át lehet-e darabolni véges sok egyenes vágással egy kockát két kisebb egybevágó kockába?

(*5 pont*) Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)

B. 4953. Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 1$ egész számra

$$\ln n + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{n-1}{n}} < \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 4954. Az ABC háromszög A csúcsán keresztül húzzunk egy BC-vel párhuzamos ℓ egyenest. Az ℓ messe az ABC, illetve az ACB szög belső szögfelezőjét K-ban, illetve L-ben. A beírt kör BC-n levő érintési pontja D. Mutassuk meg, hogy a körülírt kör a KL szakasz Thalész-körét két pontban metszi, és ez a két pont kollineáris D-vel.

(*6 pont*)

B. 4955. Legyen n pozitív egész. Nemnegatív egészekből legfeljebb hány $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots$ rendezett hármast lehet megadni úgy, hogy a következő feltételek teljesüljenek?

(1) Mindegyik i-re $x_i + y_i + z_i = n$.

(2) Az $x_1, x_2, \ldots$ számok mind különbözők, az $y_1, y_2, \ldots$ számok mind különbözők, és a $z_1, z_2, \ldots$ számok is mind különbözők.

Adjunk meg egy ilyen tulajdonságú, maximális hosszúságú sorozatot.

(*6 pont*) Javasolta: *Erben Péter* (Budapest)

B. 4956. Az $ABCD$ tetraédert mindegyik csúcsából lekicsinyítettük; így kaptuk az $AA_bA_cA_d$, $B_aBB_cB_d$, $C_aC_bCC_d$ és $D_aD_bD_cD$ kisebb tetraédereket, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az $A_bB_cC_dD_a$, $A_bB_dD_cC_a$, $A_cC_bB_dD_a$, $A_cC_dD_bB_a$, $A_dD_bB_cC_a$ és $A_dD_cC_bB_a$ tetraéderek térfogata egyenlő.

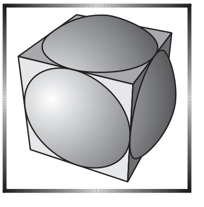
(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2018. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (722–724.)



A. 722. A Hawking Űrtársaság a Lokális Galaxiscsoport n élhető bolygója között $n-1$ darab rögzített árú járatot üzemeltet (az ár oda és vissza mindig megegyezik). Tudjuk, hogy e járatokkal bármelyik élhető bolygóról bármelyik élhető bolygóra el lehet jutni.

Az Űrtársaság központjának falán egy jól látható tábla található, melyen egy arckép mellett fel van tüntetve bármely két különböző élhető bolygóhoz az őket összekötő legolcsóbb járatsorozat ára. Tegyük fel, hogy ezen a táblán éppen az $1, 2, \ldots, \binom{n}{2}$ egységnyi pénzmennyiségek szerepelnek valamilyen sorrendben. Igazoljuk, hogy n vagy $n-2$ négyzetszám.

A. 723. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre bármely x valós szám esetén létezik a

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

határérték. Mutassuk meg, hogy ha $g(x)$ konstans, akkor $f(x)$ legfeljebb másodfokú polinomfüggvény.

A. 724. Az $ABCD$ tetraéder belsejében úgy helyezkedik el a $\mathcal{G}$ gömb, hogy érinti az ABD, ACD és BCD lapokat, de nincs közös pontja az ABC síkkal. Legyen E az a pont a tetraéder belsejében, amelyre $\mathcal{G}$ érinti az ABE, ACE és BCE síkokat is. A DE egyenes döfje az ABC lapot F-ben, és legyen L a $\mathcal{G}$ gömbnek az ABC síkhoz legközelebbi pontja. Mutassuk meg, hogy az FL szakasz átmegy az $ABCE$ tetraéderbe írt gömb középpontján.

Beküldési határidő: 2018. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 454. A szólánc kedvelt nyelvi játék. A játék során úgy kell szavakat egymás után mondani, hogy az előző szó utolsó betűjével kezdődjön a következő szó. Ebben a feladatban egy kész szólánc összekevert szavait kell a játék szabályainak megfelelően újra sorrendbe állítani.

Készítsünk programot `i454` néven, amely a bemeneten megadott N szó mindegyikét felhasználva a szóláncot előállítja. Minden szó a szóláncban egyszer szerepelhet és kell is, hogy szerepeljen. Több lehetséges megoldás esetén elegendő egyet megadni.

A program standard bemenetének első sorában a szavak N $(2\leqslant N\leqslant 500)$ számát és az ezt követő N sorban a szavakat (ékezetmentesek és nagybetűsek) adjuk meg. A program a standard kimenetre írja ki a szóláncot. A szavakat szóközzel elválasztva sorolja fel.

Példa bemenet (a / jel sortörést jelöl)	**Példa kimenet**

`6`
`LANKAD / DAL / DURVA`
`FIATAL / AJKAD / DAGAD`
	`FIATAL LANKAD DURVA AJKAD DAGAD DAL`

Beküldendő egy tömörített `i454.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 455 (É). Mobiltelefon-előfizetések számát sorolja fel 2000 és 2015 között, ezer lakosra megadva a következő weboldal: `https://www.ksh.hu/docs/hun/xstadat/xstadat_eves/i_int074.html` (utolsó letöltés: 2018. január 6.). A feladat ezen adatok feldolgozása lesz táblázatkezelő program segítségével.

1. Töltsük be a `mobilelofizetesek.txt` szövegfájlt a táblázatkezelő egy munkalapjára az A1-es cellától kezdődően. Munkánkat i455 néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Vizsgáljuk meg országonként, hogy egyik évről a következőre, hány ezer fővel nőtt a felhasználók száma. Ennek függvényében adjuk meg, hogy az adott országban mekkora volt az átlagos növekedés. Végül az U oszlop egy cellájában határozzuk meg, hogy az összes országot figyelembe véve mekkora az átlagos évenkénti növekedés.
3. Az R oszlopban adjuk meg százalékban kifejezve, hogy mennyi az adott ország éves növekedésének átlaga az összes ország átlagához viszonyítva.
4. Az U oszlop egy cellájában határozzuk meg, hogy melyik az az ország, ahol a legnagyobb eltérés mutatkozott a felhasználók száma között valamely két egymást követő évet viszonyítva egymáshoz.

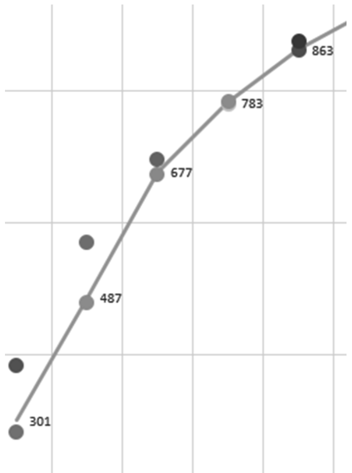
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Mobiltelefon-előfizetések száma (2000-2015) (ezer lakosra)																	
2	Ország	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	átlag
22	India	3	6	12	31	47	80	145	202	295	441	624	732	699	708	745	788	-3%
23	Írország	647	768	762	873	945	1 027	1 110	1 159	1 160	1 067	1 052	1 085	1 096	1 055	1 051	1 037	-52%
24	Izrael	732	897	1 010	1 042	1 117	1 175	1 243	1 285	1 264	1 240	1 228	1 220	1 207	1 228	1 215	1 335	-25%
25	Japán	551	534	643	685	722	760	785	844	867	913	968	1 045	1 109	[illegible]	[illegible]	1 251	-11%
26	Kanada	[illegible]	344	379	421	471	528	575	615	662	705	757	778	790	806	810	819	34%
27	Kína	67	132	159	207	256	298	348	410	478	553	632	722	808	887	923	932	7%
28	Koreai Köztársaság	583	629	[illegible]	721	782	815	850	953	956	995	1 048	1 077	1 094	1 110	1 157	[illegible]	-76%
29	Lengyelország	176	261	363	455	604	763	[illegible]	1 084	1 150	[illegible]	1 229	1 313	1 415	1 401	1 489	1 487	52%
30	Lettország	165	280	396	523	681	840	994	1 023	1 075	1 091	1 103	1 114	1 277	1 248	1 188	1 270	36%
31	Litvánia	150	294	481	622	915	1 325	1 457	1 540	1 598	1 599	1 594	1 622	1 651	1 513	1 419	1 395	54%
32	Luxemburg	695	929	1 066	1 206	1 041	1 114	1 529	1 437	1 451	1 445	1 431	1 482	1 454	1 486	1 495	1 485	-2%
33	Macedónia	56	108	176	373	473	541	604	856	937	925	1 024	1 052	1 062	1 062	1 055	1 054	23%
34	Magyarország	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	10%
35	Málta	231	585	[illegible]	704	741	791	832	880	916	998	1 073	1 224	1 244	1 298	1 270	1 293	25%
36	Mexikó	136	207	243	279	352	426	494	586	655	715	775	792	834	873	847	853	-11%
37	Németország	577	671	707	773	853	946	1 023	1 152	1 266	1 262	1 065	1 097	1 116	1 209	1 204	1 167	27%
38	Norvégia	718	796	835	891	986	1 028	1 043	1 067	1 091	1 107	1 145	1 158	[illegible]	[illegible]	1 161	1 136	-49%
39	Olaszország	741	896	943	981	1 077	1 219	1 361	1 510	1 509	1 495	1 548	1 581	1 596	1 588	1 543	1 513	-5%
40	Oroszország	22	53	121	249	511	834	1 048	1 192	1 589	1 601	1 655	1 420	1 455	1 528	1 551	1 600	95%
41	Portugália	647	771	834	958	1 009	1 039	1 160	1 277	1 329	1 115	1 153	[illegible]	1 124	1 130	1 121	1 104	-43%
42	Románia	112	172	230	317	461	604	725	927	1 114	1 145	1 114	1 074	1 050	1 056	1 059	1 071	19%
43	Spanyolország	602	728	811	886	904	984	1 038	1 084	1 097	1 116	1 113	1 131	1 094	1 069	1 079	1 079	41%
44	Svájc	647	733	792	849	854	[illegible]	994	[illegible]	1 163	1 204	1 232	1 274	1 321	1 353	1 367	1 420	-4%
45	Svédország	718	808	892	924	978	1 008	1 057	[illegible]	1 084	1 121	1 172	1 212	1 246	1 255	1 279	1 304	-28%
46	Szerbia	..	..	..	..	472	670	815	1 045	1 198	1 244	1 253	1 302	1 178	1 194	1 221	1 205	24%
47	Szlovákia	231	399	543	683	793	842	907	1 123	1 019	1 013	1 090	1 100	1 119	1 139	1 169	1 223	23%

U
Összes átlag
53,90
Legnagyobb eltérés:
Oroszország
Magyarország hányadik
27
Várható év:
2021
Leggyakrabban egyező
Európai Unió-28
Görögország

5. Az U oszlop egy újabb cellájában adjuk meg, hogy Magyarország – a 2015-ös évet figyelembe véve – hányadik volt a mobiltelefon-előfizetéssel rendelkezők számának rangsorában.
6. Az előző eredmények alatt egy új cellában határozzuk meg, hogy várhatóan melyik lesz az az év, amikor minden ország eléri az 1 millió előfizetőt, ha az adatok

az eddigi országonkénti növekedést követik (tételezzük fel, hogy az előfizetések száma független a népességtől, és a népesség meghaladja az 1 millió főt mindegyik országban).

7. Feltételes formázást használva jelöljük világoskék színnel és félkövér stílussal az évenkénti magyarországi értékeket és az adott évben a magyarországi értékkel egyező értékeket. A magyarországi értékhez legközelebb eső, nála nagyobb számértéket jelöljük félkövér, dőlt betűstílussal és pirosan kitöltött cellával, az annál kisebb, hozzá legközelebb eső értéket félkövér stílussal, piros kitöltéssel.



8. A 6. pont eredményét tartalmazó cella alatt határozzuk meg, hogy melyik az az ország, vagy országok, amik a leggyakrabban voltak a magyarországi értékek közelében az összes évet tekintve.
9. Készítsünk diagramot külön diagram típusú munkalapra, ahol ábrázoljuk a magyarországi, és a hozzá legközelebb álló két ország értékeit az évek függvényében a *minta* alapján.
10. A diagramot és a táblázatot a minta alapján formázzuk úgy, hogy a táblázat első két sora mindig látható legyen.

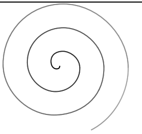
Beküldendő egy tömörített `i455.zip` állományban a megoldást adó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja a felhasznált táblázatkelő nevét és verzióját.

I. 456. A képek tárolására igen sokféle fájltípus alakult ki a tárolásmóddal, a méretekkel szembeni különböző elvárások miatt. A szöveges módon tárolt, tömörítés nélküli képek nagyméretű fájlokat eredményeznek. Szerkezetük egyszerű és a legtöbb képnézegető, képszerkesztő képes megjeleníteni őket.

Készítsünk programot `i456` néven, amely egy `.pgm` kiterjesztésű (**p**ortable **g**ray**m**ap format), 8-bites, szürkeárnyalatos képet állít elő, amely egy arkhimédészi spirált ábrázol. A kép négyzet alakú legyen és a spirál középen helyezkedjen el. A hátteret állítsuk fehérre és a spirál színét, belülről kifelé, menetenként feketétől fokozatosan a világosszürkéig változtassuk.

A program standard bemenetének első sorában a négyzet alakú kép N $(10 \leqslant N \leqslant 1000)$ oldalhosszát, a szürkeárnyalatok K $(1 \leqslant K \leqslant 255)$ számát, második sorában a spirál meneteinek M $(1 \leqslant M \leqslant 10)$ számát és L $(1 \leqslant L \leqslant 10)$ vonalvastagságát adjuk meg.

A program írja a standard kimenetre az előállított `pgm` típusú képfájl szöveges tartalmát, amelyet, ha fájlba irányítunk át, akkor utána képnézegetővel az ábra megtekinthető.

Példa a bemenetre:	**Kimenet egy képnézetőben**
`100 15` `3 2`	

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad. Részpontszám kapható arra a programra, amely vonalvastagságot, vagy színátmenetet nem kezel.

Beküldendő egy tömörített `i456.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 26. Informatikusok a 21-es játék egy módosított, digitalizált változatával játszanak. Nem kártyával, hanem számítógép segítségével. A gép a játék megkezdésekor mindegyik játékosnak előállít egy 64 hosszú, 1 és 9 közötti egészeket tartalmazó sorozatot – ezek lesznek egy-egy játékos „felhúzható lapjai”. A játék körökből áll, melyek során minden játékos „húzhat” a neki sorsolt lapok közül, vagy „dobhat” a kezében található lapok közül. Fontos szabály, hogy húzni vagy dobni csak pontosan 1, 2, 4 vagy 8 számú lapot szabad. A játékos a dobáshoz bármely kártyalapokat kiválaszthatja a kezéből, de húzni csak a számsorozat sorrendben következő, megfelelő darabszámú lapját szabad. A játékosok kezdetben egy lappal sem rendelkeznek. Az a játékos győz, akinek elsőként lesz a kezében az adott körben történt húzása vagy dobása után 21 a számok összege. A játék során a kézben tartott lapok összege meghaladhatja a 21-et, ez nem jelent kiesést.

Természetesen minden játékos vihetett magával egy programozható eszközt, és annak segítségével is játszhatott. Készítsünk olyan programot, amely a 64 egész ismeretében meghatározza az egyes körökben a húzások és dobások stratégiáját úgy, hogy a lehető legkevesebb kört kelljen a játékosnak játszania a 21 eléréséhez.

A megoldást adó program a standard bemenetről olvassa be a 64 egész számot, majd írja ki a standard kimenet első sorába a 21 eléréséhez szükséges legkevesebb körök számát, illetve a következő sorokban a játékos kezében lévő kártyákat növekvő sorrendben. Amennyiben a 21 nem elérhető a 64-es sorozatból szabály szerinti húzásokkal és dobásokkal, akkor a kimenet csak egy 0 legyen. Amennyiben azonos számú kör, de különböző húzások és dobások esetén is elérhető a 21, akkor bármelyik megoldás elfogadható.

Példa:

Bemenet (nem teljes, de nem lényeges a további része)	**Kimenet (a / jel sortörést jelöl)**
`2 3 7 4 9 8 4 5 3 3 ...`	`3 / 2 / 2 3 4 7 9 / 2 3 7 9`

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely nem minden bemeneti értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `is26.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

S. 125. Egy bolygó felszínét teljesen lefedik a rajta található országok, melyeket egymástól határvonalak választanak el. Minden ország egy-egy összefüggő részén található a bolygónak. A határvonalak a bolygó felületén haladó görbék, találkozási pontjaikban határvárosok találhatók. Egy-egy határváros legalább kettő, de akár több ország határvonalainak a találkozási pontja. Minden országnak legalább két szomszédja, és legalább három határvárosa van. A határvonalak a határvárosokon kívül nem keresztezik egymást, és határváros sincs máshol, csak határvonalak találkozásánál.

Egy ország határvárosainak számát nevezzük az ország határszámának. Állapítsuk meg, hogy mennyi a bolygón az országok határszámának maximuma.

A határvárosokat pozitív egész számokkal, a határvonalakat a megfelelő határvárosok számából képzett számpárokkal jelöljük. A megoldást adó program a standard bemenet első sorából olvassa be a határvárosok V számát, illetve a határvonalak L számát, majd a következő L sor mindegyikéből egy-egy határvonalat megadó számpárt. A program írja a standard kimenetre a bolygón található országok határszámai közül a legnagyobbat.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést jelöl)	**Kimenet**

`6 10`
`1 2 / 1 3 / 2 3 / 3 4 / 2 4 /`
`4 5 / 5 1 / 4 6 / 3 5 / 6 5`
	`5`

Korlátok: $4 \leqslant V \leqslant 1000$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb bemeneti értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `s125.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2018. május 10.

❄

Gyakorló feladatsor emelt szintű fizika érettségire

Tesztfeladatok*

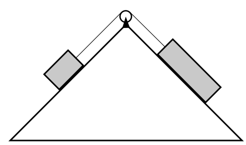
1. Hányszor van napfelkelte a Holdon egy (földi) év alatt?

A) Közelítőleg 365-ször; *B*) körülbelül 12-szer; *C*) egyszer sem.

2. Egy induló mozdony kerekeire ható tapadási súrlódási erő

A) a kerék középpontjának gyorsulásával egy irányba mutat;
B) a kerék középpontjának gyorsulásával ellentétes irányba mutat;
C) a sínre merőleges irányba mutat.
D) A fenti válaszok egyike sem helyes.

3. Egyenlő szárú, derékszögű háromszög alapú hasábból készült kettős lejtőt átfogójával az asztalra rögzítünk. Fonállal összekötött, m és $2m$ tömegű testet teszünk a kettős lejtő egy-egy lapjára, majd elengedjük őket.



Merre mozognak, ha a testek és a lejtő között a csúszási és a tapadási súrlódási tényező egyaránt $\mu = 0{,}3$?

A) A $2m$ tömegű test mozog lefelé.
B) Az m tömegű test mozog lefelé.
C) Semerre sem mozognak.

4. Mikor tapasztaljuk a lebegés jelenségét? Ha a két rezgés

A) amplitúdója közel azonos;
B) fáziskülönbsége állandó;
C) rezgésideje közel azonos;
D) frekvenciája több nagyságrenddel eltér egymástól.

5. Hol keringhetnek a geostacionárius műholdak?

A) Bármelyik szélességi kör fölött, tetszőleges magasságban.
B) Bármelyik hosszúsági kör fölött, 80 és 1000 km magasság között.
C) Az Egyenlítő fölött, kb. 36 000 km magasan.
D) Az Egyenlítő fölött, 80 és 1000 km közötti magasságban.

6. Egy m tömegű pici testből és egy elhanyagolható tömegű fonálból ingát készítünk. A felfüggesztett ingát vízszintes helyzetbe kitérítjük, majd elengedjük. Mekkora szöget zár be a fonál a vízszintessel akkor, amikor éppen mg erő feszíti?

A) Körülbelül 19,5°; *B*) 30°; *C*) körülbelül 41,8°; *D*) 90°.

*A válaszok közül minden esetben pontosan egy a helyes.

7. Az alábbi állítások közül válasszuk ki az *igazat!*

A) Az ideális gázmodellben a részecskék egymással és az edény falával rugalmatlanul ütköznek.

B) Az ideális gáz normál állapotú, ha nyomása 101,3 kPa, térfogata 22,4 liter és hőmérséklete 273,15 K.

C) Ha egy pohár vízben úszó tömör jégkocka elolvad, a víz szintje nem változik.

D) Egy fémgyűrűt melegítve a lyuk átmérője csökken, mivel a gyűrű anyaga minden irányban tágul.

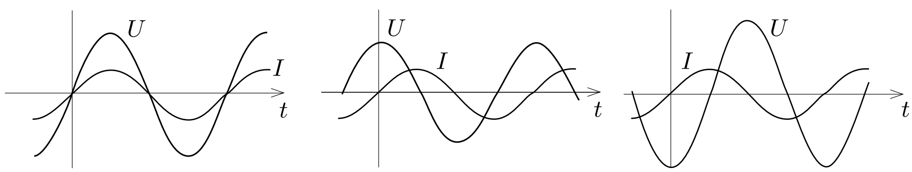
8. Azonos térfogatú, hőmérsékletű és tömegű oxigéngáznak és hidrogéngáznak biztosan megegyezik a

A) nyomása; *B*) anyagmennyisége;
C) belső energiája; *D*) sűrűsége.

9. Egy 5 mm átmérőjű, töltetlen fémgömb és egy 15 mm átmérőjű, 4 μC töltésű fémgömb szigetelőállványon 1 m távol van egymástól. A gömböket egy hosszú vezetékkel összekötjük, majd a vezetéket eltávolítjuk. Milyen lesz a fémgömbök között fellépő elektrosztatikus erő?

A) Kb. 0,027 N taszítóerő; *B*) kb. 0,036 N taszítóerő;
C) kb. 0,036 N vonzóerő; *D*) nem lép fel erő.

10. Egy soros *RLC*-kör egyes elemein lévő áramerősséget és feszültséget mutatják a grafikonok. Melyik válasz jelöli *helyesen* az áramköri elemeket?



I. II. III.

A) I. ohmos ellenállás, II. kapacitív ellenállás, III. induktív ellenállás;
B) I. kapacitív ellenállás, II. ohmos ellenállás, III. induktív ellenállás;
C) I. induktív ellenállás, II. kapacitív ellenállás, III. ohmos ellenállás;
D) I. ohmos ellenállás, II. induktív ellenállás, III. kapacitív ellenállás.

11. Egy optikai rácson centiméterenként 400 karcolás van. Lézerrel átvilágítva rajta a 2 méterre lévő ernyőn a direkt sugár és az első erősítési hely távolságát 4 cm-nek mérjük. Mennyivel változik meg ez a távolság, ha a fény útjába olyan rácsot teszünk, amelyen centiméterenként 600 karcolás van?

A) 1 cm-rel; *B*) 2 cm-rel; *C*) 3 cm-rel; *D*) 4 cm-rel.

12. Bélyeget vizsgálunk egy f fókusztávolságú egyszerű nagyítóval (lupéval). Hová tegyük a tárgyat, hogy a lencse nagyítása $N = -3$ legyen?

A) A nagyítótól $\frac{1}{3}f$ távolságra; *B*) a nagyítótól $\frac{2}{3}f$ távolságra;
C) a nagyítótól $\frac{5}{3}f$ távolságra; *D*) a nagyítótól $\frac{3}{5}f$ távolságra.

13. Az alábbi, űrkutatással kapcsolatos állítások közül melyik *hamis?*

A) Az első olyan űrhajót, amelynek fedélzetén ember utazta körbe a Földet, a Szovjetunió bocsátotta föl.

B) A Hold felszínére a NASA űrprogramja juttatott el embert.

C) Az első sikeres leszállást egy üstökösre az Európai Űrügynökség szondája hajtotta végre.

D) Az első űrtávcsövet az Európai Űrügynökség telepítette Föld körüli pályára.

14. Egy telepre rákapcsolunk egy 3 ohmos ellenállást, majd ezt eltávolítva egy 12 ohmos ellenállást. Azt tapasztaljuk, hogy rajtuk ugyanannyi idő alatt ugyanakkora hő fejlődik. Mekkora a telep belső ellenállása?

A) 7,5 ohm;

B) 6 ohm.

C) Két különböző ellenálláson nem fejlődhet ugyanannyi hő.

D) Ezekből az adatokból nem lehet meghatározni a telep belső ellenállását.

15. Melyik állítás *nem* tartozik a speciális relativitáselmélet *axiómái* közé?

A) A vákuumbeli fénysebesség bármely koordináta-rendszerben ugyanakkora.

B) Egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző koordinátarendszerek a fizika számára egyenértékűek.

C) Az idő nem abszolút, hanem koordinátarendszer-függő a $t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ képlet szerint.

Számolásos feladatok

1. Egy röntgencsőben 100 kV feszültséggel gyorsított elektronok csapódnak volfrámanódba. Mekkora az így keletkező fékezési röntgensugárzás legkisebb hullámhossza?

2. Mekkora két síktükör egymással bezárt szöge, ha a tükrök síkjainak metszésvonalára merőleges síkban beeső keskeny fénynyaláb kétszeres visszaverődés után

a) az eredeti irányával 120°-os szöget bezáróan;

b) az eredeti irányával párhuzamosan, de azzal ellentétes irányban

halad tovább?

3. A radon 222-es izotópja α-sugárzó, radioaktív izotóp.

a) Mely elem keletkezik a bomlás során? Honnan kapta a nevét, és kik fedezték fel (izolálták) ezt az elemet?

b) Mennyi idő alatt bomlik el egy adott mennyiségű radongáz 88,6%-a? A radon felezési ideje 3,83 nap.

c) A bomlás során a kilépő, $6{,}64\cdot 10^{-27}$ kg tömegű α-részecske mozgási energiája 5,486 MeV. Mekkora az α-részecske, illetve a leánymag sebessége, ha a radonmag sebessége a bomlás pillanatában elhanyagolható? A relativisztikus hatásoktól eltekintünk. A keletkező leánymag és az α-részecske tömegének aránya jó közelítéssel megegyezik tömegszámuk arányával.

4. Egy d átmérőjű, d magasságú üres, szigetelő anyagból készült, vékony falú henger függőlegesen elhelyezkedő szimmetriatengelye körül foroghat. A fedőlapja és az alaplapja középpontjába egy-egy q töltést rögzítünk. A henger magasságának felében, a henger belső oldalára teszünk egy m tömegű, q töltésű pici testet, majd elengedjük. Legfeljebb mekkora lehet a kis test tömege, hogy a henger falára tapadjon,

a) ha a henger nem forog;

b) ha a henger percenként 72-es fordulatszámmal egyenletesen forog?

Adatok: $d = 20$ cm, $q = 500$ nC, a tapadási súrlódási tényező a henger fala és a test között $\mu_0 = 0{,}4$.

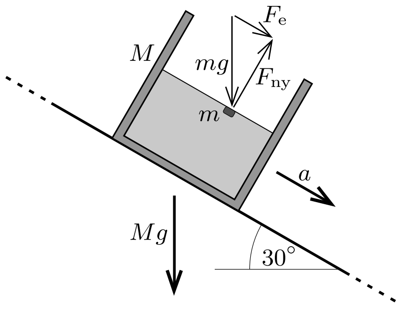
Varga Balázs
Göd

Fizika gyakorlat megoldása

G. 615. 30°*-os hajlásszögű, elég hosszú lejtőn gyorsulva csúszik lefelé egy vízzel félig telt tartály. Mekkora szöget zár be a víz felszíne a lejtő síkjával, ha a súrlódás elhanyagolható?*

(*3 pont*)

Megoldás. A tartály – és a benne lévő víz minden „darabkája” – a lejtő esésvonalával párhuzamosan $a = g/2$ gyorsulással mozog lefelé (hiszen az M tömegű tartály+víz rendszerre ható, összesen Mg nagyságú nehézségi erő lejtő irányú komponense $Mg/2$).



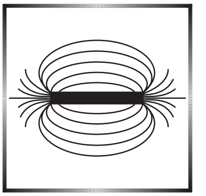
A folyadék felszínének közelében található m tömegű, kicsiny vízmennyiségre ható eredő erő
$$F_e = ma = \frac{mg}{2}.$$
Ez az erő a függőlegesen lefelé mutató, mg nagyságú nehézségi erőnek és a folyadék többi része által kifejtett $\boldsymbol{F}_{ny}$ nyomóerőnek a vektori összege (lásd az *ábrát*).

Mivel $\boldsymbol{F}_e$ a függőlegessel 60°-os szöget zár be, és a nagysága $mg/2$, a vektorháromszög egy szabályos háromszög fele, és így $\boldsymbol{F}_{ny}$ merőleges $\boldsymbol{F}_e$-re. Tudjuk továbbá, hogy $\boldsymbol{F}_{ny}$ merőleges a folyadék felszínére; ebből az következik, hogy a súrlódásmentes lejtőn lecsúszó tartályban a folyadék felszíne *párhuzamos* a lejtő síkjával.

Szántó Barnabás (Keszthely, Vajda János Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

42 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 4, hiányos (1 pont) 10, hibás 17 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 4948. *Egyforma keresztmetszetű és azonos anyagi minőségű két hengeres rúd a közös szimmetriatengelyük mentén mozogva összeütközik. A rudak hossza ℓ_1 és ℓ_2, a sebességük v_1 és v_2, az ütközés egyenes és centrális. A rudak rugalmasak, a bennük kialakuló feszültségekre és deformációkra minden pillanatban és mindenhol a Hooke-törvény érvényes. Mekkora az ütközési szám ennél az ütközésnél?*

(Lásd a Rugalmas testek ütközése *című cikket a KöMaL 2017. évi májusi számának 298. oldalán.)*

(*6 pont*) *Szegedi Ervin* (1957–2006) feladata

Megoldás. Tegyük fel, hogy ℓ_1 jelöli a rövidebb rúd hosszát, vagyis $\ell_1 < \ell_2$. Az egydimenziós mozgásban szereplő sebességeket tekinthetjük előjeles számoknak, ezzel a sebességvektorok nagysága mellett az irányukat is kifejezhetjük.

A feladatban hivatkozott cikk említi, hogy alkalmasan választott vonatkoztatási rendszerben az ütközési felület a különböző hosszúságú rudak esetében is (egy bizonyos ideig) mozdulatlan lesz. Keressük meg ezt az „alkalmasan választott" vonatkoztatási rendszert! Jelöljük ezen vonatkoztatási rendszer talajhoz viszonyított sebességét u-val! Miután a rudak ütköznek, a lökéshullámok a két rúdban (a rudak végpontjaihoz viszonyítva) azonos sebességgel kezdenek terjedni. Emiatt, amikor a hullám az ℓ_1 hosszú rúd végére ér, akkor a másik rúdban is ℓ_1 hosszú utat tett meg, a rúd maradék része pedig még eredeti, v_2 sebességével halad. Azok a részek, amelyeken a lökéshullám áthaladt, az ütközési felülethez képest mozdulatlanok, vagyis talajhoz rögzített rendszerből szemlélve u sebességgel haladnak. Ezek a testek zárt rendszert alkotnak, így a lendületmegmaradás törvénye szerint

$$\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2 = 2\ell_1 u + (\ell_2 - \ell_1)\, v_2, \quad \text{vagyis} \quad u = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Kihasználtuk, hogy a rudak tömege a hosszúságukkal arányos, és az arányossági tényező (a rúd keresztmetszetének és sűrűségének szorzata) kiesik a képletekből.

Az ütközési felület tehát ekkora u sebességgel halad az ütközés során. Az ilyen sebességgel haladó koordináta-rendszerből nézve az ℓ_1 hosszú rúd kezdeti sebessége $v_1 - u$, az ütközés utáni sebessége pedig értelemszerűen ennek ellentettje, $u - v_1$ lesz. (Az ütközési felület ebből a rendszerből nézve mozdulatlan, vagyis a merev fallal való ütközéshez hasonló helyzet alakul ki.) A talajhoz rögzített rendszerből nézve a rövidebb rúd ütközés utáni sebessége:

$$v_1' = u - v_1 + u = 2u - v_1 = 2 \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} - v_1 = v_2.$$

Az ütközési számot (annak egyik definíciója szerint) úgy kaphatjuk meg, hogy a tömegközépponti rendszerben kiszámítjuk *valamelyik* test ütközés utáni és ütközés előtti lendületének hányadosát (annak abszolút értékét). Az ütközés után az ℓ_1 hosszúságú rúd minden egyes pontjának ugyanakkora a sebessége, a rúdban nem maradtak feszültségek (ez nem áll fenn az ℓ_2 hosszúságú rúdra), így egyszerűbb a rövidebb rudat vizsgálnunk. Az ütközési szám kiszámításához tehát meg kell nézni, mekkora sebességgel haladt a rövidebb rúd az ütközés előtt és után a tömegközépponti rendszerben.

A tömegközéppont sebessége:

$$u_{\mathrm{tk}} = \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2}.$$

Az ℓ_1 hosszú rúd sebessége tehát a tömegközépponti rendszerben az ütközés előtt:

$$v_{1,\mathrm{tk}} = v_1 - u_{\mathrm{tk}} = v_1 - \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{(\ell_1 + \ell_2)v_1 - \ell_1 v_1 - \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{\ell_2(v_1 - v_2)}{\ell_1 + \ell_2},$$

az ütközés után pedig:

$$v'_{1,\mathrm{tk}} = v'_1 - u_{\mathrm{tk}} = v_2 - \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{(\ell_1 + \ell_2)v_2 - \ell_1 v_1 - \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{\ell_1(v_2 - v_1)}{\ell_1 + \ell_2}.$$

Az ütközési szám a fenti két sebesség hányadosának abszolút értékével egyenlő:

$$k = \left|\frac{v'_{1,\mathrm{tk}}}{v_{1,\mathrm{tk}}}\right| = \left|\frac{\ell_1(v_2 - v_1)}{\ell_2(v_1 - v_2)}\right| = \left|-\frac{\ell_1}{\ell_2}\right| = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Az ütközési szám tehát a rövidebb és a hosszabb rúd hosszának hányadosa. (Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a hosszabb rúd ütközés utáni és ütközés előtti lendületének hányadosát számoljuk ki a tömegközépponti rendszerben.)

Németh Róbert (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

11 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás, kicsit hiányos (5 pont) 1 dolgozat.

P. 4971. 30°*-os hajlásszögű, elég hosszú lejtőn gyorsulva csúszik lefelé egy vízzel félig telt tartály. Mekkora szöget zár be a víz felszíne a lejtő síkjával, ha a tartály és a lejtő közötti súrlódási együttható* 0,2?

(*4 pont*) *Példatári feladat alapján*

Megoldás. Kövessük a **G. 615.** gyakorlat megoldásának gondolatmenetét (lásd lapunk 236. oldalán), de itt most vegyük figyelembe a súrlódási erőt is.

Az M tömegű tartály+víz rendszerre ható, összesen Mg nagyságú nehézségi erő lejtő irányú komponense $Mg\sin\alpha$, a lejtő és a tartály alja közötti nyomóerő $Mg\cos\alpha$, a súrlódási erő tehát $Mg\mu\cos\alpha$ (ahol α a lejtő hajlásszögét, μ a súrlódási együtthatót jelöli). Az egész rendszerre ható eredő erő lejtő irányú komponense $Mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, a tartály és a benne lévő víz minden „darabkája" tehát (elegendő hosszú idő múlva, amikor a víz mozgása a tartályhoz képest már lecsillapodott)

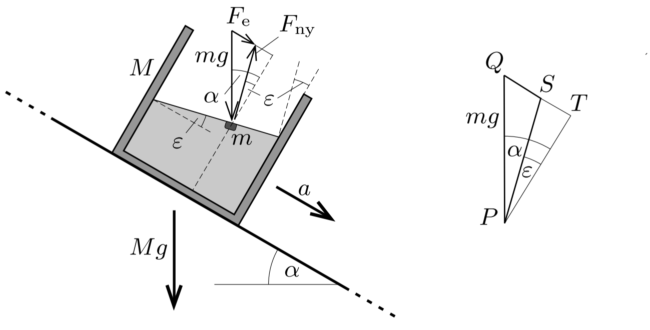
$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

gyorsulással mozog a lejtő esésvonalával párhuzamosan lefelé.

A folyadék felszínének közelében található m tömegű kicsiny vízmennyiségre ható eredő erő

$$F_\mathrm{e} = ma = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Ez az erő a függőlegesen lefelé mutató, mg nagyságú nehézségi erőnek és a folyadék többi része által kifejtett $\boldsymbol{F}_\mathrm{ny}$ nyomóerőnek a vektori összege (lásd az *ábrát*).



Az $\boldsymbol{F}_\mathrm{ny}$ erő a lejtő síkjára merőleges iránnyal valamekkora ε szöget zár be. Mivel $\boldsymbol{F}_\mathrm{ny}$ merőleges a folyadék felületére, ε a víz felszínének a lejtő síkjával bezárt szöge – éppen ezt keressük.

Megjegyzés. Azt, hogy a folyadék felszíne (görbült folyadékfelszín esetén az érintősíkja) merőleges a folyadék többi része által kifejtett $\boldsymbol{F}_\mathrm{ny}$ nyomóerőre, a következőképpen láthatjuk be. A folyadék egy kicsiny darabkájára a környezete azért fejt ki erőt, mert a folyadék nyomása helyről helyre változhat. A nagyobb nyomású „szomszédos részek" nagyobb erőt fejtenek ki, mint a szemközti „folyadékdarabkák", emiatt az eredő erő a nyomásváltozás (nyomáscsökkenés) irányába mutat. A felszín közelében (közvetlenül a határfelület alatt) a folyadék nyomása még mindenhol a külső légnyomással egyezik meg, az érintősík mentén tehát nem alakulhat ki nyomásváltozás, nem léphet fel ilyen irányú erő. A felszínre merőleges irányban más a helyzet, arrafelé haladva már növekedhet a nyomás, tehát kialakulhat ilyen irányú eredő erő.

A kinagyított erőháromszög képéről (lásd az ábra jobb oldali részét) leolvasható, hogy

$$PQ = mg, \qquad QT = mg\sin\alpha, \qquad PT = mg\cos\alpha,$$

$$QS = F_\mathrm{e} = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad \text{vagyis} \qquad ST = QT - QS = mg\mu\cos\alpha,$$

ahonnan

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{ST}{PT} = \frac{mg\mu\cos\alpha}{mg\cos\alpha} = \mu.$$

Ezt a szöget az adott súrlódási együtthatóhoz tartozó *súrlódási határszögnek* nevezik; ennél kisebb hajlásszögű lejtőn a súrlódó test nem tud magától megindulni. Esetünkben, amikor $\mu = 0{,}2$, a víz felszíne a lejtő síkjával $\varepsilon = 11{,}3°$-os szöget zár be. A **G. 615.** gyakorlatban $\mu = 0$, tehát $\varepsilon = 0$, a folyadék felszíne ilyenkor párhuzamos a lejtő síkjával. A másik határesetben, amikor $\varepsilon = \alpha$ (tehát a tartály gyorsulása nulla, esetleg el sem indul), a víz felszíne az edényben – a szó eredeti értelmében – *vízszintes,* a lejtő síkjával α szöget zár be.

Több dolgozat alapján

86 dolgozat érkezett. Helyes 40 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 17, hiányos (1–2 pont) 27, hibás 2 dolgozat.

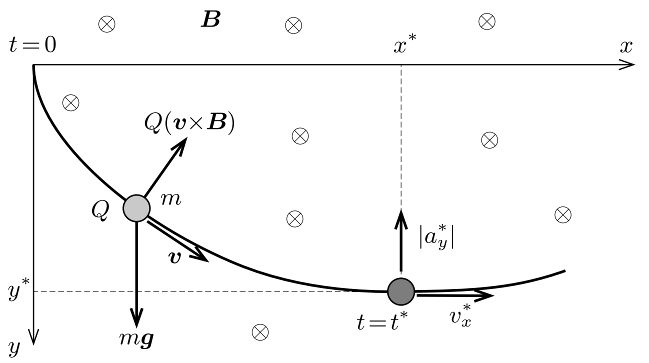
P. 4975. *Egy földi laboratóriumi kísérlet során az m tömegű, Q töltésű kicsiny testet vákuumban, B indukciójú, vízszintes irányú, homogén mágneses térben engedjük el. (Feltehetjük, hogy $mg < QBc$, ahol c a fénysebesség.) A test mozgását addig vizsgáljuk, míg eléri legmélyebb helyzetét.*

a) Mekkora lesz a test legnagyobb sebessége?
b) Milyen mélyre süllyed?
c) Mekkora átlagsebességgel mozog vízszintes irányban?
d) Mekkora a test gyorsulása pályájának legmélyebb pontján?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

I. megoldás. Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, amelynek x tengelye vízszintes, y tengelye pedig függőlegesen lefelé mutat. A mágneses indukció ugyancsak vízszintes irányú és az *ábrán* látható módon a papír síkjába befelé irányul. A kicsiny töltött test a koordináta-rendszer origójából indul, és a pályája – vázlatosan – az ábrán látható görbe. (A mozgás nyilván az $x-y$ síkban történik, így elegendő ezt vizsgálnunk.)

A „földi laboratórium” kifejezés arra utal, hogy a testre ható erők között a mágneses Lorentz-erő mellett a nehézségi erőt is figyelembe kell vennünk. A testre



ható erő komponensei:

$$F_x = Qv_yB, \tag{1}$$

$$F_y = mg - Qv_xB, \tag{2}$$

ahol

$$v_x = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \qquad \text{és} \qquad v_y = \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

a test sebességének megfelelő derékszögű összetevői.

A Newton-féle mozgásegyenletek:

$$F_x = ma_x \qquad \text{és} \qquad F_y = ma_y,$$

ahol

$$a_x = \frac{\Delta v_x(t)}{\Delta t} \qquad \text{és} \qquad y_y = \frac{\Delta v_y(t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

Behelyettesítve az erőkomponenseket a következő mozgásegyenleteket kapjuk:

$$a_x = \omega_0 v_y, \tag{5}$$

és

$$a_y = g - \omega_0 v_x, \tag{6}$$

ahol

$$\omega_0 = \frac{QB}{m} \tag{7}$$

egy körfrekvencia dimenziójú állandó.

Megjegyzés. Ezt a mennyiséget „ciklotronfrekvenciának" nevezik, mert ilyen körfrekvenciával mozog a ciklotronokban egy Q/m fajlagos töltésű részecske a B indukciójú homogén mágneses mezőben.

Felírhatjuk még a munkatételt a töltött részecske mozgására az indulás pillanata és egy tetszőleges későbbi pillanat között. Mivel a Lorentz-erő merőleges a sebességre, tehát nem végez munkát, elegendő a nehézségi erő munkavégzésével számolnunk:

$$\frac{1}{2}m\big(v_x(t)^2 + v_y(t)^2\big) = mgy(t). \tag{8}$$

Innen leolvashatjuk, hogy a test sebessége akkor lesz a legnagyobb, amikor a függőleges elmozdulás (y^*) maximális. Mivel ilyenkor a függőleges irányú sebesség éppen nulla, a vízszintes irányú sebességkomponensre fennáll:

$$v_x^* = \sqrt{2gy^*}. \tag{9}$$

a) és *b*) Írjuk fel az (5) egyenletet a kicsiny sebesség- és elmozdulás-megváltozásokkal, majd összegezzük ezeket a megváltozásokat a mozgás kezdetétől a pálya legmélyebb pontjáig:

$$\frac{\Delta v_x(t)}{\Delta t} = \omega_0 \frac{\Delta y(t)}{\Delta t},$$

$$\sum \Delta v_x(t) = \omega_0 \sum \Delta y(t),$$

ahonnan

$$v_x^* = \omega_0 y^* \tag{10}$$

adódik. Összevetve ezt az eredményt a munkatételből kapott (9) összefüggéssel, válaszolhatunk az első két alkérdésre. A test legnagyobb sebessége

$$|\boldsymbol{v}| = v_x^* = \frac{2g}{\omega_0} = \frac{2mg}{QB},$$

a legmélyebb süllyedése pedig (az indulási magassághoz viszonyítva):

$$y^* = \frac{2g}{\omega_0^2} = \frac{2gm^2}{Q^2B^2}.$$

c) A fentiekhez hasonló módon járhatunk el a vízszintes irányú (6) mozgásegyenlettel, ami

$$\Delta v_y(t) = g\Delta t - \omega_0 \Delta x(t)$$

alakban is felírható. Összegezve a mozgás kezdetétől a legmélyebb pontba érkezés t^* időpillanatáig, amikor a vízszintes irányú elmozdulás x^*, a függőleges irányú sebesség pedig nulla:

$$0 = gt^* - \omega_0 x^*,$$

ahonnan a mozgás ezen szakaszára vonatkoztatott átlagsebesség:

$$\bar{v} = \frac{x^*}{t^*} = \frac{g}{\omega_0} = \frac{mg}{QB}.$$

Mivel a vízszintes irányú mozgás a $0 < x(t) < x^*$ intervallumon történő mozgás ismétlődése, az egész mozgás átlagsebessége (x^*-nál sokkal hosszabb úton) ugyancsak $mg/(QB)$.

d) A pálya legmélyebb pontjánál a test gyorsulása (6) szerint:

$$a_y^* = g - \omega_0 v_x^*,$$

ami (7) és a v_x^*-re kapott kifejezés alapján:

$$a_y^* = g - \frac{QB}{m}\frac{2mg}{QB} = g - 2g = -g.$$

A töltött test tehát éppen a nehézségi gyorsulással megegyezően gyorsul függőlegesen *felfelé.*

Illés Gergely (Eger, Szilágyi Erzsébet Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Tekintsünk egy olyan koordináta-rendszert, amely az indukcióvonalakra merőlegesen, vízszintes irányban $\boldsymbol{v}_0$ sebességgel mozog a laboratóriumi rendszerhez képest. Ha a töltött test pillanatnyi sebessége a „mozgó” rendszerben $\boldsymbol{v}$, akkor a laboratóriumi rendszerben a sebessége $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_0$, így a Newton-féle mozgásegyenlet:

$$m\boldsymbol{a}=Q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_0)\times\boldsymbol{B}+m\boldsymbol{g},$$

amit

$$m\boldsymbol{a}=Q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}+[m\boldsymbol{g}+Q\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}] \tag{11}$$

alakban is felírhatunk. A fenti képletben $\boldsymbol{a}$ a test gyorsulása, ami a laboratóriumi rendszerben ugyanaz a vektor, mint az egyenletesen mozgó másik koordinátarendszerben a gyorsulás.

A (11) egyenlet szögletes zárójelében szereplő két vektor ugyanolyan (függőleges) irányú, és ha $\boldsymbol{v}_0$ nagyságát megfelelően, nevezetesen $v_0=mg/(QB)$ módon választjuk, a két tag éppen kiejtheti egymást. Ekkor a mozgásegyenlet olyan, mintha a test súlytalan lenne, és csak a mágneses Lorentz-erő hatása alatt mozogna. Úgy is mondhatjuk, hogy a mozgó rendszerben megjelenik egy $E=Bv_0$ nagyságú homogén, függőlegesen felfelé irányuló elektromos mező, aminek hatása kiegyenlíti az mg nagyságú, függőlegesen lefelé mutató nehézségi erőt.

Jól ismert, hogy homogén mágneses mezőben a mágneses erővonalakra merőleges kezdősebességgel rendelkező részecske pályája kör, és a részecske a kör mentén $\omega_0=QB/m$ körfrekvenciával egyenletesen mozog. Jelen esetben is ez valósul meg, hiszen a test kezdősebessége a laboratóriumi rendszerben nulla, a mozgó rendszerben tehát v_0 nagyságú. A körpálya sugara

$$R=\frac{v_0}{\omega_0}=\left(\frac{m}{QB}\right)^2 g$$

lesz. A mozgás – a laboratóriumi rendszerből nézve – egy v_0 sebességű egyenletes mozgás és egy v_0 kerületi sebességű körmozgás szuperpozíciója. A pálya alakja ezek szerint *ciklois.*

a) A test sebessége a pálya legmélyebb pontjánál lesz a legnagyobb, ugyanis itt lesz egymással párhuzamos és egyirányú a kétféle mozgáshoz tartozó sebességvektor:

$$v_{\max}=2v_0=2\frac{mg}{QB}.$$

b) A test legnagyobb lesüllyedése a kezdőponthoz képest

$$\Delta h=2R=2\left(\frac{m}{QB}\right)^2 g.$$

c) A test sebessége a vízszintes irányú, állandó v_0 nagyságú sebességnek és a körmozgásból adódó, a nulla körül ingadozó sebességnek a vektori összege. Az eredő (hosszú időtartamra vonatkoztatott) átlagsebesség tehát v_0 nagyságú, vízszintes és a mágneses erővonalakra is merőleges irányú vektor lesz.

d) A test gyorsulása csak a körmozgásból adódik, nagysága a pálya minden pontjában

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \left(\frac{mg}{QB}\right)^2 \cdot \left(\frac{QB}{m}\right)^2 \frac{1}{g} = g$$

nagyságú. A gyorsulás iránya a mozgás kezdetekor függőlegesen lefelé, a pálya legmélyebb pontjában pedig függőlegesen felfelé mutat.

Tófalusi Ádám (Debreceni Fazekas M. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, és induljunk ki a vízszintes és a függőleges irányokra vonatkozó (5) és (6) mozgásegyenletből. Az (5) egyenlet, amit $a_x - \omega_0 v_y = 0$ alakban is felírhatunk, azt fejezi ki, hogy a $v_x(t) - \omega_0 y(t)$ mennyiség változási üteme (deriváltja) nulla, tehát ez a kifejezés *időben állandó.* Az állandó (mivel a kezdőpillanatban v_x is és y is nulla) nulla kell hogy legyen, vagyis

$$v_x(t) = \omega_0 y(t). \tag{12}$$

Helyettesítsük be v_x-et a függőleges irányú mozgásra vonatkozó (6) egyenletbe:

$$a_y(t) = g - \omega_0^2 y(t),$$

amit

$$a_y(t) = -\omega_0^2\big(y(t) - y_0\big) \tag{13}$$

alakban is felírhatunk, ahol $y_0 = g/\omega_0^2$.

Felismerhetjük, hogy (13) egy olyan rugóra akasztott súlyos test mozgásegyenlete, amely test saját súlya alatt a rugó megnyúlása y_0, és a rezgés körfrekvenciája ω_0. A harmonikus rezgőmozgás ismert képleteiből (az $y(0) = 0$ és $v_y(0) = 0$ kezdőfeltételeket is figyelembe véve) könnyen megkaphatjuk, hogy

$$y(t) = \frac{g}{\omega_0^2}(1 - \cos\omega_0 t),$$

$$v_y(t) = \frac{g}{\omega_0}\sin\omega_0 t,$$

$$a_y(t) = g\cos\omega_0 t.$$

Ezekből (12) segítségével rögtön adódik, hogy

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega_0}(1 - \cos\omega_0 t),$$

ennek változási üteme pedig

$$a_x(t) = g\sin\omega_0 t.$$

Az $x(t)$-t úgy kapjuk meg, hogy olyan függvényt keresünk, aminek változási üteme $v_x(t)$, és a kezdőpillanatban nulla értékű:

$$x(t)=\frac{g}{\omega_0^2}(\omega_0 t-\sin\omega_0 t).$$

A fenti képletekből a feladat valamennyi kérdésére könnyen megkapjuk a választ: a test legnagyobb sebessége $2g/\omega_0$, legnagyobb lesüllyedése $2g/\omega_0^2$, a mozgás átlagsebessége g/ω_0, és a gyorsulása a pálya legalsó pontjában (és minden más helyes is) g.

Megjegyzés. Mindhárom megoldásban a newtoni mechanika nemrelativisztikus mozgásegyenletéből indultunk ki. Ez csak akkor jogos, ha $v_{\max}\ll c$, vagyis $mg\ll QBc$. Ez sokkal erősebb megszorítás, mint a feladat szövegében szereplő $mg<QBc$.

(G. P.)

21 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2 pont) 5 dolgozat.

P. 4976. *Három kicsiny golyót egy egyenes mentén helyeztünk el úgy, hogy kezdetben nem mozognak, és a szomszédos golyók távolsága d. A golyók tömege és töltése rendre m, $2m$, $5m$, illetve q, q, $2q$.*

a) Mekkora lesz a golyók távolsága és sebessége az indulást követő nagyon rövid t_0 idő múlva?

b) Mekkora lesz a golyók sebessége elegendően hosszú idő múlva?

(Az elektrosztatikus erőkön kívül minden más erőhatás elhanyagolható.)

(5 pont) *A Kvant nyomán*

Megoldás. *a*) Legyen az m tömegű, q töltésű golyó az 1. számú, a $2m$ tömegű, q töltésű a 2. számú, az $5m$ tömegű és $2q$ töltésű pedig a 3. számú test! Vizsgáljuk meg először, hogy mekkora erők hatnak az egyes testekre! Mivel a golyók kicsik, alkalmazhatjuk a ponttöltésekre vonatkozó Coulomb-féle erőtörvényt. A pozitív irányt az 1. testtől a 3. számú test irányába megválasztva rendre felírhatjuk az egyes testre ható eredő erőket a kezdeti helyzetben:

$$F_1=-k\frac{q^2}{d^2}-k\frac{2q^2}{(2d)^2}=-k\frac{3q^2}{2d^2},$$

$$F_2=k\frac{q^2}{d^2}-k\frac{2q^2}{d^2}=-k\frac{q^2}{d^2},$$

$$F_3=k\frac{2q^2}{(2d)^2}+k\frac{2q^2}{d^2}=k\frac{5q^2}{2d^2}.$$

Mivel az indulást követő t_0 nagyon rövid, ezek az erők t_0 idő alatt állandónak tekinthetőek, és így az egyes testek sebessége rendre:

$$v_1 = \frac{I_1}{m} = \frac{F_1 t_0}{m} = -k\frac{3q^2 t_0}{2d^2 m},$$

$$v_2 = \frac{I_2}{2m} = \frac{F_1 t_0}{2m} = -k\frac{q^2 t_0}{2d^2 m},$$

$$v_3 = \frac{I_3}{5m} = \frac{F_1 t_0}{5m} = k\frac{q^2 t_0}{2d^2 m}.$$

(A lendületmegmaradás törvénye szerint $mv_1 + 2mv_2 + 5mv_3 = 0$, és ez valóban teljesül.)

Mivel az erők t_0 idő alatt jó közelítéssel állandóknak tekinthetők, a gyorsulások sem változhatnak ezen idő alatt. Így a golyók átlagsebessége a kezdeti és a t_0 időpontbeli „végsebesség” számtani közepe, amiből megkaphatjuk a testek elmozdulását:

$$r_1 = \frac{0+v_1}{2} t_0 = -k\frac{3q^2 t_0^2}{4d^2 m},$$

$$r_2 = \frac{0+v_2}{2} t_0 = -k\frac{q^2 t_0^2}{4d^2 m},$$

$$r_3 = \frac{0+v_3}{2} t_0 = k\frac{q^2 t_0^2}{4d^2 m}.$$

Ezekből számolható a golyók közötti távolság is:

$$d_{1,2} = d + |r_2 - r_1| = d\left(1 + k\frac{q^2 t_0^2}{2d^3 m}\right),$$

$$d_{2,3} = d + |r_3 - r_2| = d\left(1 + k\frac{q^2 t_0^2}{2d^3 m}\right),$$

$$d_{3,1} = 2d + |r_3 - r_1| = 2d\left(1 + k\frac{q^2 t_0^2}{2d^3 m}\right).$$

b) Használjuk fel az előző részfeladat eredményeit! Látható, hogy kis t_0 idő elteltével az $1-2$ és $2-3$ testek távolságának aránya állandó maradt, hiszen:

$$\frac{d_{1,2}}{d_{2,3}} \equiv 1.$$

Ebből az is következik, hogy újabb kis Δt idő múlva is fenn fog állni ez az arány, mint ahogy az azután következő összes későbbi időpillanatra is. Ennek egyenes következménye, hogy a testek pillanatnyi sebességének aránya is mindvégig ugyanakkora lesz, és így a testek végsebességére (rendre u_1, u_2 és u_3) is fennáll, hogy:

$$u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3 = (-3) : (-1) : (+1).$$

Ezek szerint a végsebességekre teljesül, hogy

$$u_1 = -3u_3 \qquad \text{és} \qquad u_2 = -u_3.$$

Emellett tudjuk, hogy nagyon hosszú idő múlva – amikor a kis golyók olyan távol lesznek, hogy már nem fejtenek ki egymásra számottevő erőt – az elektromos mező kezdeti energiája teljesen átalakul a golyók mozgási energiájává. Felírhatjuk a munkatételt:

$$k\frac{q^2}{d} + k\frac{2q^2}{2d} + k\frac{2q^2}{d} = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}(2m)u_2^2 + \frac{1}{2}(5m)u_3^2,$$

azaz

$$4k\frac{q^2}{d} = \frac{1}{2}m(3u_3)^2 + \frac{1}{2}(2m)u_3^2 + \frac{1}{2}(5m)u_3^2 = 8mu_3^2,$$

vagyis

$$u_3 = \sqrt{\frac{kq^2}{2dm}}, \quad u_1 = -3\sqrt{\frac{kq^2}{2dm}}, \quad u_2 = -\sqrt{\frac{kq^2}{2dm}}.$$

Kondákor Márk (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A fenti gondolatmenet nem minden esetben, hanem csak a q_i töltések és az m_i tömegek bizonyos speciális értékeinél alkalmazható. A golyók távolságának aránya csak akkor marad időben állandó, ha fennáll, hogy

$$-\frac{q_1}{m_1}\left(q_2 + \frac{1}{4}q_3\right) + \frac{q_3}{m_3}\left(q_2 + \frac{1}{4}q_1\right) = 2\frac{q_2}{m_2}(q_1 - q_3).$$

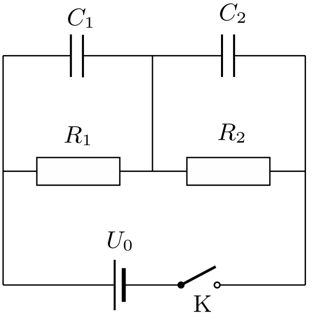
A feladatban szereplő adatok mellett ez az összefüggés teljesül.

Általános esetben, tetszőleges tömeg- és töltésadatok mellett a feladat elemi eszközökkel nem oldható meg.

(G. P.)

51 dolgozat érkezett. Helyes Berke Martin, Debreczeni Tibor, Kondákor Márk, Molnár Mátyás, Morvai Orsolya, Máth Benedek, Póta Balázs és Sal Dávid megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 13, hiányos (1–3 pont) 27, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 4977. *Az ábrán látható kapcsolásban a kapcsoló zárása előtt a kondenzátorok töltetlenek. Egy adott pillanatban zárjuk a kapcsolót. (Az áramforrás belső ellenállásától, a vezetékek és az ellenállások kapacitásától, továbbá a körben lévő elemek induktivitásától tekintsünk el.)*



Ábrázoljuk vázlatosan a kondenzátorok feszültségét az idő függvényében!

Adatok: $C_1 = 150\ \mu\text{F}$, $C_2 = 50\ \mu\text{F}$, $R_1 = 40\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 10\ \text{k}\Omega$, $U_0 = 100$ V.

(*5 pont*) *Nagy László* (1931–1987) feladata

Megoldás. A kapcsoló zárása előtt a töltetlen kondenzátorok feszültsége nyilván nulla. A kapcsoló zárásakor a kondenzátorok „rövidre zárják” az áramforrást, és – ha a feladat szövegében szereplő közelítésekkel élünk – egy „pillanat alatt” feltöltődnek. A kondenzátorok közös pontjára csak az ellenállásokon keresztül juthat töltés, így az össztöltésük hirtelen nem tud megváltozni, tehát a két kondenzátor (egy nagyon rövid ideig) sorosan kapcsoltnak tekinthető. A hirtelen feltöltődött kondenzátorok kezdeti feszültsége a kapacitások reciprokának arányában megosztott telepfeszültség:

$$\frac{U_{1,0}}{U_{2,0}}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{1}{3},\qquad U_{1,0}+U_{2,0}=U_0=100\ \mathrm{V},$$

vagyis

$$U_{1,0}=25\ \mathrm{V}\qquad \text{és}\qquad U_{2,0}=75\ \mathrm{V}.$$

A kapcsoló zárása után elegendően hosszú („végtelen hosszú”) idővel a kondenzátorok töltése már nem változik, a feszültségük tehát valamekkora állandósult $U_{1,\infty}$ és $U_{2,\infty}$ értékre áll be. Ilyenkor az ellenállások közös pontját a kondenzátorok közös pontjával összekötő vezetéken már nem folyik áram, tehát mindkét ellenálláson ugyanakkora áram folyik.

Az ellenállásokra eső feszültség (ami megegyezik a kondenzátorokra eső feszültséggel) az ellenállások arányában osztja meg az áramforrás feszültségét:

$$\frac{U_{1,\infty}}{U_{2,\infty}}=\frac{R_1}{R_2}=4,\qquad U_{1,\infty}+U_{2,\infty}=U_0=100\ \mathrm{V},$$

vagyis

$$U_{1,\infty}=80\ \mathrm{V}\qquad \text{és}\qquad U_{2,\infty}=20\ \mathrm{V}.$$

A kondenzátorok feszültségének időbeli változása várhatóan exponenciális függvénnyel írható le. Ezen sejtés szigorú bizonyításához a változásokat megadó differenciálegyenleteket kellene felírnunk és megoldanunk. Szerencsére ennél sokkal egyszerűbben is eljárhatunk. A töltések átrendeződése, azok időbeli változása ugyanolyan jellegű, ugyanolyan „időállandójú” exponenciális függvényekkel írható le a kondenzátorok feltöltődésekor is, mint a kisülésükkor (lásd pl. a *Kondenzátor feltöltése és kisülése ohmos ellenálláson át* című részt a „Függvénytáblázat” 148. oldalán).

Ha az áramforrást (zárt kapcsolóállás mellett) kiiktatjuk az áramkörből és az eredetileg hozzá csatlakozó vezetékeket rövidre zárjuk, akkor egy olyan kapcsoláshoz jutunk, amelyben két párhuzamosan kapcsolt, tehát

$$C_\mathrm{e}=C_1+C_1=200\ \mu\mathrm{F}$$

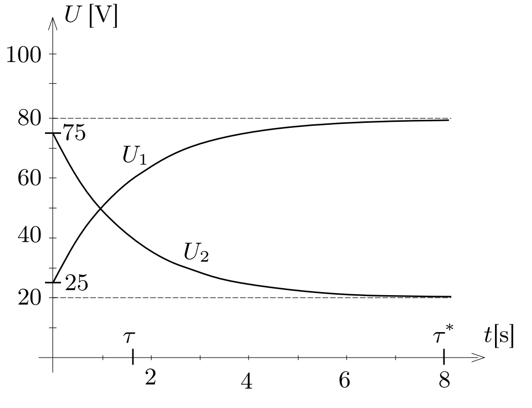
eredő kapacitású kondenzátor két párhuzamosan kapcsolt, tehát

$$R_\mathrm{e}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=8\ \mathrm{k}\Omega$$

eredő ellenálláson keresztül veszíti el töltését. A kisülés folyamata időben exponenciálisan, $e^{-t/\tau}$ függvénnyel leírható módon zajlik le, ahol az időállandó

$$\tau = R_e C_e = \left(8 \cdot 10^3\ \Omega\right)\left(2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{F}\right) = 1{,}6\ \mathrm{s}.$$

Megjegyzés. Simonyi Károly Villamosságtan című könyvében említi, hogy a feszültség beállásának idejét $\tau^* = 5\tau$ idővel szokták közelíteni. Esetünkben a kondenzátorok feszültsége 8 s alatt változik meg a kezdeti értékekről a végső (aszimptotikus) értékekre, ahogy azt az *ábra* mutatja.



Tófalusi Ádám (Debreceni Fazekas M. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

20 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 11, hibás 1 dolgozat.

P. 4985. *Egy fényképezőgép objektívjének fókusztávolsága* 3 cm. *Egy távoli tárgyról fényképet készítünk, majd a képet* 3*-szorosára felnagyítjuk. Mit látunk nagyobbnak, a fénykép készítésének helyéről nézve a tárgyat, vagy ugyanezt a tárgyat a fényképen? Hányszor nagyobbnak látjuk?*

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. A leképezési törvény szerint

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}.$$

Ha a t tárgytávolság sokkal nagyobb, mint az f fókusztávolság, akkor a képtávolság $k \approx f$, és a T nagyságú tárgy képének mérete a háromszoros nagyítás után

$$3K = 3\frac{k}{t}T \approx 3\frac{f}{t}T.$$

Ezt a nagyított képet a tisztánlátás $s \approx 25$ cm távolságából

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{3K}{s} = 3\frac{fT}{ts}$$

látószög alatt látjuk. Ugyanekkora látószögben a t távolságra lévő tárgy

$$x = t \operatorname{tg} \alpha = 3\frac{fT}{s}$$

nagyságúnak látszana.

A két (látszólagos) méret aránya (a szemünk ezt az arány „érzékeli”):

$$\frac{T}{x} = \frac{s}{3f} \approx \frac{25\ \text{cm}}{3 \cdot 3\ \text{cm}} \approx 3.$$

A tárgy tehát a fénykép készítésének helyéről nézve kb. 3-szor nagyobbnak látszik a valóságban, mint a háromszorosra nagyított fényképen a tisztánlátás távolságából.

Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)

17 dolgozat érkezett. Helyes Bukor Benedek, Hajdu Ákos, Jáger Baláz, Markó Gábor, Molnár Mátyás és Ónodi Gergely megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 7 dolgozat.

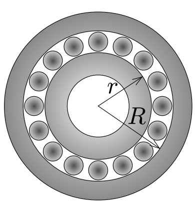
Fizikából kitűzött feladatok

M. 377. Vizsgáljuk meg, hogyan függ egy ampermérővel rövidre zárt napelemen átfolyó áram erőssége a „direkt napsugár” beesési szögétől! Ügyeljünk az ampermérő helyes méréshatár-beállítására!

(*6 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

G. 633. Lehetséges-e, hogy a labdarúgópályán egy szabadrúgás után a kapu felső lécéről a gólvonalon túlra pattanó labda a földről kifelé, a pálya felé pattan?

(*3 pont*)



G. 634. Az *ábrán* látható golyóscsapágy belső gyűrűje mozdulatlan, a golyók középpontjai 0,2 m/s sebességgel futnak körbe. Mekkora a külső gyűrű fordulatszáma, ha $r = 3$ cm, $R = 4$ cm?

(*3 pont*)

G. 635. Egy edényben 0 °C hőmérsékletű víz található. A víz egy részét kiöntjük, 0 °C hőmérsékletű jégdarabbá fagyasztjuk, és visszahelyezzük az edényben maradt vízre, amelyen úszni fog.

a) Magasabban lesz-e a jégdarab kiálló részének a csúcsa, mint az eredeti vízszint?

b) Minek nagyobb a gravitációs helyzeti energiája, az eredeti vízmennyiségnek vagy az új víz-jég rendszernek?

(*3 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

G. 636. Vajon Miskolctól milyen messze helyezték el az autópálya mellett a *képen* látható táblát?

(*4 pont*) Közli: *Részegh Anna,* Vácduka

P. 5023. Egy 25°-os lejtőn lecsúszó test sebessége a lejtő alján negyede annak a sebességnek, mint amekkorát súrlódás nélkül érhetett volna el. Mekkora a súrlódási együttható?

(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 5024. Egy m tömegű testet D direkciós erejű, feszítetlen állapotában ℓ hosszúságú gumiszálra függesztünk. Ezután az egyensúlyban lévő testet lassan húzzuk úgy, hogy az mindig a test kezdeti helyzetéhez tartozó vízszintes egyenesen mozogjon. Mekkora lesz a kitérítő erő nagysága, amikor a gumiszál a függőlegessel φ szöget zár be?

Adatok: $\ell = 0{,}5$ m, $\varphi = 30°$, $m = 0{,}4$ kg, $D = 10$ N/m.

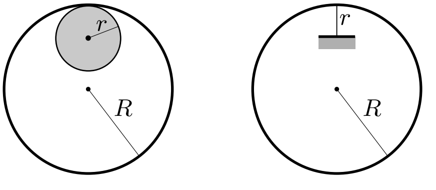
(*4 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

P. 5025. Torricelli-kísérletet végzünk egy vastag falú üvegcsővel. A cső belső keresztmetszete 1 cm^2, a külső keresztmetszete 3 cm^2. A cső tömege 624 g, és 2 cm mélyen nyúlik a higanyba.

Mekkora erővel kell tartani a csövet ilyenkor?

(*4 pont*) Közli: *Werner Bence Tamás,* Budapest

P. 5026. Egy m tömegű és R sugarú, vékony gyűrűt kétféleképpen hozunk kis kitérésű lengésbe. Az egyik esetben egy r sugarú, vízszintes tengelyű hengerre fűzzük fel a gyűrűt, kissé kitérítjük, majd elengedjük. A másik esetben egy r hosszúságú, elhanyagolható tömegű, vékony tűt ragasztunk a gyűrűbe úgy, hogy a tű a gyűrű közepe felé mutasson, és a gyűrű erre a tűre támaszkodjon lengés közben. A gyűrű mindkét esetben síkmozgást végez.



Melyik esetben hosszabb a lengésidő?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5027. Egy kísérleti, rakétahajtású kerékpárral sikerült 333 km/h sebességet elérni. Álló helyzetből indulva 1,1 másodperc múlva lett a sebessége 100 km/h, 2,5 másodpercnél volt a sebessége 200 km/h, 4,3 másodpercnél 300 km/h, és 4,8 másodpercnél érte el a 333 km/h sebességet.

Mikor és mekkora volt a legnagyobb gyorsulása, és mekkora út befutása után érte el a legnagyobb sebességet? Mekkora volt az össztömeg, ha 4,2 kN tolóerejű volt a rakéta?

(*4 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

P. 5028. Egy 1 méter hosszúságú, zárt hengeres tartályban levegő van. A tartályt a vízszintes hossztengelye irányában állandó gyorsulással mozgatjuk, miközben a bezárt levegő hőmérsékletét mindvégig állandó, $T = 273$ K értéken tartjuk. Mekkora a_0 gyorsulás esetében lenne a tartály elején a levegő nyomása

a) 0,1%-kal kisebb,

b) feleakkora, mint a tartály hátulján?

Útmutatás: A földi légkör sűrűsége – ha a hőmérséklet mindenhol $T = 273$ K lenne – a barometrikus magasságformula szerint változna: $\varrho(h) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}$, ahol M a levegő átlagos *moláris tömege,* és kb. 5500 méter magasságban csökkenne a sűrűség a tengerszinten mérhető érték felére.

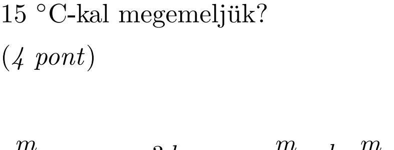
(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5029. Egy alumíniumkockára ráhelyezünk egy vele azonos tömegű vaskockát.

a) Mekkora az így kapott fémtömb átlagsűrűsége?

b) Hány kg/m^3-rel változik meg a fémtömb átlagsűrűsége, ha a hőmérsékletét 15 °C-kal megemeljük?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

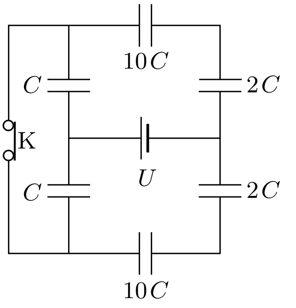


P. 5030. Egy $4d$ hosszúságú, m tömegű, szigetelő pálca végeihez ugyancsak m tömegű, kicsiny fémgömböket rögzítettünk. A pálca egyik végétől d távolságban egy m tömegű, átfúrt fémgömb található, amely súrlódásmentesen csúszhat a pálcán. Mindhárom fémgömbre Q töltést juttatunk, és a rendszert – egy űrállomáson lebegve – magára hagyjuk.

Mekkora lesz a középső gömb maximális sebessége, és mennyit mozdulnak el a testek a legnagyobb sebesség eléréséig?

(*4 pont*) *Versenyfeladat nyomán*

P. 5031. Az *ábra* szerinti elrendezésben $C = 4\ \mu\mathrm{F}$. A rendszer $U = 16$ V egyenfeszültségre van kapcsolva.



a) Mekkora az egyes kondenzátorok feszültsége és töltése?

b) A K kapcsolót nyitjuk. Az új egyensúly beálltáig mennyi töltés áramlik át az áramforráson?

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5032. Mekkora sebességgel lökődik vissza egy ${}^{220}_{86}\mathrm{Rn}$ atommag, miközben egy α-részecskét bocsát ki? A radonizotóp tömege 220,011 394 u, a bomlás után visszamaradó polónium $\left({}^{216}_{84}\mathrm{Po}\right)$ tömege pedig 216,001 915 u.

(*4 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

P. 5033. Kozmikus porból és gázokból álló, M tömegű csillagközi köd perdülete N. A belső gravitációs hatások következtében a köd teljes anyaga két kis méretű gömbbe tömörül, és így kettőscsillag alakul ki.

a) Mekkora a kettőscsillag tömegközéppont körüli T_{csillag} keringési ideje, ha a csillagok körpályán mozognak, és a tömegük m_1, illetve m_2? ($m_1 + m_2 = M$ és $m_1 \leqslant m_2$.)

b) Mekkora lehet a két csillag távolsága?

c) Ha a kialakuló kettőscsillag távolsága nem pontosan állandó, hanem kis amplitúdóval ingadozik, mekkora ennek az ingadozásnak a periódusideje?

(*6 pont*) Közli: *Mihail Sandu,* Călimăneşti, România

Áprilisi pótfeladat*. Becsüljük meg, mennyi lehet a hátsó belső borítón közölt fényképen látható „kolbásztökinga” lengésideje! A homogén tömegeloszlásúnak feltételezhető tök hossza kb. 115 cm, keresztmetszete változó, és a felső vége egy rögzített, de hajlékony indán csüng.

Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

❄

Beküldési határidő: 2018. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

*A megoldás beküldhető, de nem számít bele a pontversenybe.

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 224): **Exercises up to grade 10: C. 1476.** Prove that the inequality $\frac{(y-6)^2}{3xy}+x\cdot\frac{y+3}{y}\geqslant 4+x-\frac{4}{x}-\frac{xy}{12}$ holds for all positive x and y. **C. 1477.** Prove that if there is a point E on base AD of a trapezium $ABCD$ such that the perimeters of triangles ABE, BCE and CDE are equal then $BC=\frac{1}{2}AD$. **Exercises for everyone: C. 1478.** Given that a six-digit number is divisible by 37, its digits are all different, and 0 does not occur among them, show that at least six more numbers divisible by 37 can be obtained by changing the order of the digits. **C. 1479.** In a triangle ABC, T is an interior point of side AC such that $TA=BC$, and P is an interior point of side AB such that the triangles CBP and PAT are congruent. Q is an interior point of side BC such that TQ is not parallel to AB and triangle BPQ is similar to triangle TCQ. Prove that $PT=QT$. **C. 1480.** Solve the equation $\frac{x^3-7x+6}{x-2}=\frac{2x+14}{x+2}$ on the set of integers. **Exercises upwards of grade 11: C. 1481.** The vertices of a regular octagon inscribed in a circle of radius 2 are connected in three different ways, as shown in the *figure:* each vertex with the adjacent vertices, each vertex with the second adjacent vertices, and finally, each vertex with the third adjacent vertices. Prove that the product of the radii of the three inscribed circles is 2. **C. 1482.** Prove that $\left|2\sin x+\sin(2x)\right|<\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

New exercises – competition B (see page 226): **B. 4948.** The positive integer n is said to be *chunky* if it has a prime factor greater than $\sqrt{n}$. For example, 2017 (a prime number), $2018=2\cdot 1009$ and $2022=2\cdot 3\cdot 337$ are chunky, while $2023=7\cdot 17^2$ is not. How many chunky numbers are there which only have prime factors less than 30? (*3 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 4949.** The feet of the altitudes drawn from vertices B and C of an acute-angled triangle ABC are D and E, respectively. Let P be an interior point of AD, and let Q be an interior point of AE such that $EDPQ$ is a cyclic quadrilateral. Show that the line segments BP and CQ intersect on the median drawn from A. (*3 points*) **B. 4950.** Let F_n denote the nth Fibonacci number ($F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$), and define the sequence $a_0,a_1,a_2,\ldots$ with the following recurrence relation: let $a_0=2018$, and for all $k\geqslant 0$ let $a_{k+1}=a_k+F_n$, where F_n is the largest Fibonacci number less than a_k. Will there be any Fibonacci number in the sequence (a_k)? (*4 points*) **B. 4951.** The elements of a set V are n-dimensional vectors (ordered n-tuples of numbers) of which each coordinate is -1, 0 or 1. No three different vectors of V add up to the zero vector. Show that $|V|\leqslant 2\cdot 3^{n-1}$. (*4 points*) **B. 4952.** Is it possible to dissect a cube with a finite number of straight cuts so that the pieces can be put together to form two smaller congruent cubes? (*5 points*) (Proposed by *Z. Gyenes,* Budapest) **B. 4953.** Prove that $\ln n+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n-1}{n}}<\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ for all integers $n>1$. (*5 points*) (Proposed by *G. Holló,* Budapest) **B. 4954.** Line ℓ passes through vertex A of a triangle ABC, and it is parallel to BC. Let ℓ intersect the interior angle bisectors of angles ABC and ACB at K and L, respectively. The inscribed circle touches BC at point D. Show that the circumscribed circle intersects the Thales circle of line segment KL at two points, and these two points are collinear with D. (*6 points*) **B. 4955.** Let n be a positive integer. What is the largest possible number of ordered triples of non-negative integers $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\ldots$ such that the following conditions hold: (1) For all i, $x_i+y_i+z_i=n$. (2) The numbers $x_1,x_2,\ldots$ are all different, the numbers

$y_1, y_2, \ldots$ are all different, and the numbers $z_1, z_2, \ldots$ are also all different. Give an example for such a sequence of maximum length with the required property. (*6 points*) (Proposed by *P. Erben,* Budapest) **B. 4956.** A transformation of central similitude is applied to a tetrahedron $ABCD$ with each vertex as centre. The four diminished tetrahedra obtained are $AA_bA_cA_d$, $B_aBB_cB_d$, $C_aC_bCC_d$ and $D_aD_bD_cD$. Given that these small tetrahedra are pairwise disjoint, prove that the volumes of tetrahedra $A_bB_cC_dD_a$, $A_bB_dD_cC_a$, $A_cC_bB_dD_a$, $A_cC_dD_bB_a$, $A_dD_bB_cC_a$ and $A_dD_cC_bB_a$ are equal. (*6 points*) (Proposed by *Sz. Kocsis,* Budapest)

New problems – competition A (see page 227): **A. 722.** The Hawking Space Agency operates $n-1$ space flights between the n habitable planets of the Local Galaxy Cluster. Each flight has a fixed price which is the same in both directions, and we know that using these flights, we can travel from any habitable planet to any habitable planet. In the headquarters of the Agency, there is a clearly visible board on a wall, with a portrait, containing all the pairs of different habitable planets with the total price of the cheapest possible sequence of flights connecting them. Suppose that these prices are precisely $1, 2, \ldots, \binom{n}{2}$ monetary units in some order. Prove that n or $n-2$ is a square number. **A. 723.** Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that the limit $g(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ exists for all real x. Prove that $g(x)$ is constant if and only if $f(x)$ is a polynomial function whose degree is at most 2. **A. 724.** A sphere $\mathcal{G}$ lies within tetrahedron $ABCD$, touching faces ABD, ACD, and BCD, but having no point in common with plane ABC. Let E be the point in the interior of the tetrahedron for which $\mathcal{G}$ touches planes ABE, ACE, and BCE as well. Suppose the line DE meets face ABC at F, and let L be the point of $\mathcal{G}$ nearest to plane ABC. Show that segment FL passes through the centre of the inscribed sphere of tetrahedron $ABCE$.

Problems in Physics

(see page 250)

M. 377. Create a short circuit across a solar cell by connecting an ammeter across it. Investigate how the current depends on the angle of incidence of the „direct sun rays". Do not forget to set a proper measurement range for the ammeter.

G. 633. Is it possible that after a free kick is awarded to a team on a soccer pitch, the ball bounces from the crossbar of the goal behind the goal line and from the ground it bounces outward towards the pitch? **G. 634.** The inner ring of the ball-bearing shown in the *figure* is at rest, the centres of the balls are undergoing circular motion at a speed of 0.2 m/s. What is the number of revolution of the outer ring, if $r = 3$ cm, $R = 4$ cm? **G. 635.** There is some water at a temperature of 0 °C in a bowl. Some part of it is taken out and frozen to a piece of ice at a temperature of 0 °C, then it is put back to the bowl, in which it floats on the top of the remaining water in it. *a*) Will the top of the ice be at a greater height than the original water level? *b*) Which one has the greater gravitational potential energy: the water ice system, or the original water in the bowl? **G. 636.** How far may the city Miskolc be from the road sign in which the following warning is written: "You cannot even save 8 minutes till Miskolc. Is it worth it?" (The speed limit for the highways in Hungary is 130 km/h.)

P. 5023. The speed of an object sliding down a slope of angle of elevation 25°, is one-quarter of the final speed that the object could have reached if there was no friction. What is the coefficient of kinetic friction? **P. 5024.** An object of mass m is suspended by a rubber thread of unstretched length l, and of force (spring) constant k. Then the object, which is in equilibrium, is pulled slowly, such that it moves along a horizontal line through its initial position. What is the magnitude of the pulling force, which belongs to the position when the rubber thread makes an angle of φ with the vertical? *Data:* $\ell = 0.5$ m, $\varphi = 30^\circ$, $m = 0.4$ kg, $k = 10$ N/m. **P. 5025.** Torricelli's experiment was carried out by means of a thick-walled glass tube. The inner diameter of the tube is 1 cm^2 and its outer diameter is 3 cm^2. The mass of the tube is 624 g and it emerges into the mercury to a depth of 2 cm. By what force should the tube be hold? **P. 5026.** A thin ring of mass m and of radius R is made swing with small amplitude in two different ways. In one of the cases the ring is supported by a horizontal cylinder of radius r, displaced a bit and then released. In the other case a thin pin of length r and of negligible mass is attached to the inside part of the ring, such that it points towards the centre of the ring, and the ring is supported by this pin while it swings. The motion of the ring is planar in both cases. In which case will the period of the oscillation be larger? **P. 5027.** An experimental bicycle was powered with a rocket engine, and happened to reach the speed of 333 km/h. Starting from rest it reached the speed of 100 km/h in 1.1 s, 200 km/h in 2.5 s, 300 km/h in 4.3 s and in 4.8 seconds it reached the speed of 333 km/h. When did it reach its greatest acceleration and what was the value of this acceleration? How much distance did it cover until it reached its greatest velocity? What was the total mass if the thrust of the rocket was 4.2 kN? **P. 5028.** Some air is confined in a 1 m long cylinder-shaped container. The cylinder is moved at a constant acceleration in the direction of its symmetry axis, while the temperature of the air in it is kept constant $T = 273$ K. At what value of the acceleration a_0, would the pressure at the front of the cylinder be *a*) 0.1% less than the pressure at the back of the cylinder? *b*) half of the pressure at the back of the cylinder? *Hint:* The density of atmospheric air as a function of the height h – if the temperature is constant 273 K – can be calculated with the barometric formula: $\varrho(h) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}$, where M is the average molar mass of the air, and the density drops to half of the sea level value at about 5500 m above sea level. **P. 5029.** An iron cube is placed to the top of an aluminium cube having the same mass as the iron cube. *a*) What is the average density of the gained metal object? *b*) By what amount measured in g/dm^3 does the average density of the object change if its temperature is increased by 15 °C? **P. 5030.** Small metal spheres of mass m were attached to an insulating rod of mass m and of length $4d$. There is another metal sphere (with a hole through it) of mass m, at a distance of d from one of the ends of the rod. This sphere can move frictionlessly along the rod. All the three metal spheres are given a charge of Q, and the system is released – the system is floating in a space station. What will the maximum speed of the sphere in the middle be and how much distance will the spheres move until the maximum speed is reached? **P. 5031.** The capacitance of the condensers in the circuit shown in the *figure* is $C = 4$ μF. The system is connected to a constant voltage supply of value $U = 16$ V. *a*) Calculate the charge of the condensers and the voltage across them. *b*) The switch K is opened. How much charge flows through the voltage supply until the new equilibrium state is reached? **P. 5032.** At what speed will the nucleus of a $^{220}_{86}$Rn atom be pushed back when it ejects an α particle? The mass of the radon isotope is 220.011 394 u and the mass of the remaining $^{216}_{84}$Po polonium isotope is 216.001 915 u. **P. 5033.** The angular momentum of the interstellar cloud of mass M, consisting of cosmic dust and gases, is N. Due to the internal gravitational effects the total material of the cloud forms two small spheres, thus a binary star system is created. *a*) What is the period T_{star} of the binary star revolving about its centre of mass, if the paths of the stars are circular and the masses of the stars are m_1 and m_2? ($m_1 + m_2 = M$ and $m_1 \leqslant m_2$.) *b*) What can the distance between the stars be? *c*) If the distance between the two stars is not exactly constant, but varies with a small amplitude, what may the period of this variation be?