# Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

## I. rész

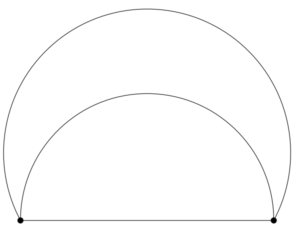
**1.** Egy bolthálózat húszéves fennállása alkalmából azzal kedveskedik a vásárlóknak, hogy 20% kedvezményt kapnak vásárlásuk összegéből, ha 4 kockával dobva a dobott számok összege legalább 20.

*a*) Mekkora ennek a valószínűsége?

*b*) Becsüljük meg, mennyibe kerül a vállalatnak ez az akció a jubileumi évben, ha 38 000 vásárlóra számítanak és a vásárlások összegszerű megoszlását az alábbi *táblázatban* adták meg:

| | |
|---|---|
| 0 – 4999 Ft | 12% |
| 5000 – 9999 Ft | 36% |
| 10 000 – 14 999 Ft | 47% |
| 15 000 – 50 000 Ft | 5% |

(*11 pont*)



**2.** Egy LED lámpát úgy alakítottak ki, hogy a LED fényforrásokat egy félgömb felületén helyezték el és azért, hogy a felülete ne legyen vakító, egy gömbszelet alakú opálos burát helyeztek fölé az *ábrának* megfelelően. A két bura falvastagsága elhanyagolható. A félgömb sugara 15 cm, a bura felülete pedig pont kétszerese a félgömb felszínének. A lámpákat a gyárban négyzetes oszlop alakú papírdobozokba csomagolják úgy, hogy a csillárok ne mozdulhassanak el a dobozban. Mekkorák legyenek a dobozok külső méretei, ha a rétegelt papír vastagsága $d = 5$ mm?

(*12 pont*)

**3.** Egy személyautó fedélzeti számítógépe az átlagfogyasztást az előzőleg megtett 100 km alapján számítja. A tankban lévő üzemanyag mennyiségét is ismerve így azt is jelzi, hogy hány km-t tudunk még autózni a meglévő üzemanyaggal, nevezzük ezt hatótávolság. Egy alkalommal induláskor a hatótáv kijelzett értéke 500 km. Egyenletes sebességgel haladunk autópályán. 50 km megtétele után a kijelző 588 km-es hatótávot jelez. Ezután még 680 km-t teszünk meg ugyanezzel az egyenletes sebességgel, amikor az üzemanyag jelző vészvillogó kigyullad, jelezve, hogy már csak 5 l üzemanyagunk van. Mennyi üzemanyag volt a tankban induláskor?

(*14 pont*)

**4.** Egy torony csonkakúp alakú kupolája alul 4 m, felül 3 m kerületű, alkotója pedig 2 m. A kupola egyik oldalán egy hangya mászik fel a torony tengelyének síkjában, 47 cm-re van a kupola alsó szegélyétől. A vele átellenes oldalon egy másik hangya mászik felfelé ugyanabban a síkban, és már csak 3 cm hiányzik, hogy elérje a kupola tetejét. Ekkor a két hangya az eredeti úti célt feladva, a lehető legrövidebb úton egymás felé indul. Mekkora távolságot tesznek meg a találkozásig, ha egyenlő sebességgel haladnak? (*14 pont*)

## II. rész

**5.** *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$5|x| = x \cdot \left(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}\,\right).$$

*b*) Határozzuk meg az $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ és a $g(x) = 5|x|$ függvények által közrezárt területrész nagyságát. (*16 pont*)

**6.** Egy üzemanyag töltő állomás földalatti benzintároló tartálya egy fekvő hengerpalásból és a két végét lezáró két félgömbből áll. Teljes hossza 6 m, sugara 1,2 m.

*a*) Mekkora a tartály térfogata?

*b*) Mennyi benzin van benne, ha a szintmérő úszó éppen a sugár felénél áll?

*c*) Egy tartálykocsiból feltöltik a tárolót. Mennyi benzint engedtek bele, ha a szintmérő 92 cm-rel emelkedett? (*16 pont*)

**7.** Egy ismeretlen alapú számrendszerben az $\overline{ab}_x$ kétjegyű szám és a számjegyei felcserélésével kapott $\overline{ba}_x$ kétjegyű szám között a következő összefüggések állnak fenn:

1. $$\overline{ab}_x + \overline{ba}_x = \overline{110}_x,$$

2. $$\overline{ab}_x - \overline{ba}_x = \overline{20}_{10}.$$

*a*) Határozzuk meg a számrendszer alapját.

*b*) Az ilyen alapú számrendszerekben milyen oszthatósági szabály érvényes a 3-mal és az 5-tel való oszthatóságra?

*c*) Határozzuk meg a $c$ és $d$ számjegyek értékét úgy, hogy az $\overline{12c45d}_x$ alakú szám a lehető legnagyobb 15-tel osztható szám legyen ezekben a számrendszerekben. (*16 pont*)

**8.** Péter egy 5,2 millió Ft értékű új autót vásárol egy autókereskedőtől. Az összeg 40%-a az önrész, amit átvételkor ki kell fizetnie, az ár fennmaradó részét 5 év alatt törleszti, évi egyenlő részletekben 8%-os éves kamattal.

*a*) Mennyi lesz Péter éves törlesztő részlete?

A kereskedő ajánlata, hogy ha 5 év múlva egy ugyanilyen értékű kocsit vesz nála, akkor ezt az autót visszavásárolja tőle, évi 10% értékcsökkenést figyelembe véve és csak az árkülönbözetet kell kifizetnie.

*b*) Mennyit kell fizetnie Péternek az új autóért 5 év múlva, ha elfogadja az ajánlatot?

Péter elhatározza, hogy elfogadja a kereskedő ajánlatát és előtakarékoskodik az 5 év múlva esedékes autócserére. A bank legjobb ajánlata évi 2,4 %-os kamat 5 éves futamidőre havi egyenlő részletekben történő befizetéssel, havi kamatozással. (A havi kamat az éves kamat tizenketted része.)

Mekkora összeget fizessen be a bankba havonta, hogy az 5 év után kivett összegből fedezni tudja az autó cseréjét? (*16 pont*)

**9.** Egy 12 pontú egyszerű gráfnak 56 éle van.

*a*) Legalább hány kilencnél nagyobb fokszámú csúcsa van a gráfnak?

*b*) Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő.

Egy asztalitenisz csapatnak 6 férfi és 6 nő versenyzője van.

*c*) Az edzőnek két férfi, két női és két vegyes párost kell kiválasztania egy közelgő versenyre. Egy versenyző legfeljebb két különböző típusú párosban játszhat. Hányféle kiválasztás lehetséges?

*d*) Mennyi az esélye annak, hogy az egyik női versenyző, Tímea, egyik párosba sem kerül be? (*16 pont*)

**Lorántfy László**
Dabas

## Megoldásvázlatok a 2018/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

### I. rész

**1.** *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:*

$$4\cdot 2^x+5^y=2,$$
$$8\cdot 2^x+3\cdot 5^y=5.$$
(*5 pont*)

*b*) *Oldjuk meg a* $[\pi;2\pi]$ *intervallumon az alábbi egyenletet:*

$$3\cdot \operatorname{tg}^2 x-2\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} x-3=0.$$
(*5 pont*)

**Megoldás.** *a*) *I. megoldás.* Az első egyenletből $5^y=2-4\cdot 2^x$, melyet a második egyenletbe helyettesítve és rendezve $4\cdot 2^x=1$. Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $x=-2$, $y=0$. Az eredeti egyenletrendszerbe történő behelyettesítés után láthatjuk, hogy a kapott számpár valóban megoldás.

*II. megoldás.* Az első egyenlet háromszorosából a második egyenletet kivonva: $4\cdot 2^x=1$. Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $x=-2$, $y=0$. Az eredeti egyenletrendszerbe történő behelyettesítés után láthatjuk, hogy a kapott számpár valóban megoldás.

*b*) Az egyenlet $\operatorname{tg} x$-ben másodfokú, melynek gyökei: $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ és $\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
$\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ a $[\pi;2\pi]$ alaphalmazon pontosan akkor teljesül, ha $x=\frac{4\pi}{3}$,
$\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ a $[\pi;2\pi]$ alaphalmazon pontosan akkor teljesül, ha $x=\frac{11\pi}{6}$.