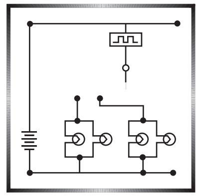


## Fizika gyakorlat megoldása

**G. 605.** *Két, egymással párhuzamosan futó sínpáron két vonat halad. Az egyik sebessége* 80 km/h. *A köztük levő távolság* 4,8 km, *negyedóra múlva a távolság ugyanennyi. Mekkora a másik vonat sebessége, ha mindkét vonat hossza* 200 m?

(*3 pont*)

**Megoldás.** Többféle esetet képzelhetünk el.

1. Ha a két vonat azonos irányban halad ugyanolyan sebességgel, akkor a közöttük lévő távolság nyilván változatlan marad. Ez esetben a másik vonat sebessége is 80 km/h.

2. A két vonat azonos irányban halad, de a hátrébb lévő gyorsabb, mint az első, tehát idővel megelőzi azt.

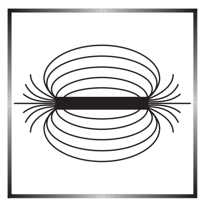
*a*) Ha a 80 km/h sebességű vonat előzi meg a másikat, akkor negyedóra alatt 4,8 km + 200 m + 4,8 km + 200 m = 10 km-rel kell többet megtennie a kezdetben előtte haladónál, azaz 40 km/h-val gyorsabban kell haladnia. Így a másik vonat sebessége 40 km/h.

*b*) Ha a 80 km/h sebességű vonat kezdetben a másik előtt halad, akkor a hátulról induló – gyorsabb – vonatnak kell negyedóra alatt 10 km-rel többet megtennie, azaz 40 km/h-val gyorsabban kell haladnia. Így a másik vonat sebessége 120 km/h.

3. Az is elképzelhető lenne, hogy a két vonat szemben halad egymással. Ebben az esetben a két vonatnak együttesen 10 km-t kell megtenni negyedóra alatt. Mivel az első vonat egymaga 20 km-t tesz meg ezen idő alatt, így – a megadott számadatok mellett – ilyen megoldás nem lehetséges.

*Cseke Balázs* (Budapest, Veres Péter Gimn., 9. évf.)

132 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 39, hiányos (1 pont) 46, hibás 25, nem értékelhető 2 dolgozat.



## Fizika feladatok megoldása

**P. 4918.** *Egy repülőgép $v$ sebességgel, a vízszintessel bezárt $\alpha$ siklószögben közeledik a leszállópályához. Amikor már csak $H$ magasságban van a talajszint felett, az eddigi egyenes vonalú pályáról egy olyan körív alakú pályára tér át, amelyen továbbra is $v$ sebességgel haladva éppen vízszintesen repül, amikor eléri a leszállópályát.*

*a*) *Mekkora a körpálya sugara?*

*b*) *Mennyi ideig repül a gép a köríven?*

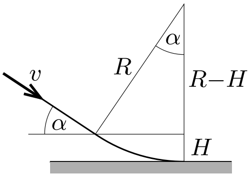
*c*) *Legfeljebb hány százalékkal nő eközben a pilóta súlya?*

Adatok: $v = 70\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\alpha = 3°$, $H = 100$ m.

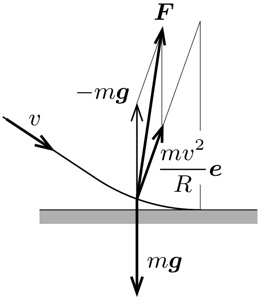
(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

**Megoldás.** *a*) Az *1. ábráról* leolvasható, hogy $\cos\alpha = \frac{R-H}{R}$, ahonnan a körpálya sugara

$$R = \frac{H}{1-\cos\alpha} = 72\,968\ \mathrm{m} \approx 73\ \mathrm{km}.$$




*1. ábra*




*2. ábra*

*b*) A körív hossza:

$$s = 2R\pi\,\frac{\alpha}{360°} \approx 3{,}8\ \mathrm{km},$$

ezt az utat a megadott sebességű repülőgép $t = \frac{s}{v} = 54{,}6$ s $\approx 1$ perc alatt teszi meg.

*c*) A pilótára ható $m\boldsymbol{g}$ nehézségi erő és a ülés által kifejtett $\boldsymbol{F}$ erő eredője biztosítja az egyenletes körmozgáshoz szükséges centripetális erőt:

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F} = \frac{mv^2}{R}\boldsymbol{e},$$

ahol $\boldsymbol{e}$ egy olyan egységvektor, amely a repülőgép pillanatnyi helyétől a körpálya középpontja felé mutat (*2. ábra*).

A pilóta súlya (amit egy – pilóta és az ülése közé helyezett – mérleg mutatna) az $\boldsymbol{F}$ erő ellenerejének nagysága:

$$G = |-\boldsymbol{F}| = \left|m\boldsymbol{g} - \frac{mv^2}{R}\boldsymbol{e}\right|.$$

Ez a súly akkor a legnagyobb, amikor $-m\boldsymbol{g}$ és $\frac{mv^2}{R}\boldsymbol{e}$ azonos irányú vektorok, vagyis $\boldsymbol{e}$ függőlegesen felfelé mutat (hiszen a két vektor nagysága adott, eredőjük nagysága csak az általuk bezárt szögtől függ).

A pilótának tehát a leszállópálya legmélyebb pontjában lesz a legnagyobb a súlya, nevezetesen

$$G_{\max} = mg + \frac{mv^2}{R}.$$

A relatív súlynövekedés

$$\frac{G_{\max} - mg}{mg} = \frac{v^2}{Rg} = 0{,}0068 \approx 0{,}7\%.$$

*Klučka Vivien* (Révkomárom, Selye J. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

56 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 9, hibás 5 dolgozat.

**P. 4927.** *Ismeretlen elektromotoros erejű és belső ellenállású telepet* 10 *ohmos ellenállással terhelve a kapocsfeszültség* 6 V, *a telepben tárolt energia másodpercenként* 7,2 J-*lal csökken.*

*a) Mekkora az áramforrás belső ellenállása?*

*b) Mekkora az elektromotoros erő?*

*c) Mekkora a kapocsfeszültség, ha a terhelés ellenállását 20 ohmra növeljük?*

*(4 pont)* *Példatári feladat nyomán*

**Megoldás.** *a*) és *b*) Ha az $R_\mathrm{k} = 10\ \Omega$-os terhelő-ellenálláson $U_\mathrm{k} = 6$ V kapocsfeszültség mérhető, akkor rajta (és a telepen is)

$$I = \frac{U_\mathrm{k}}{R_\mathrm{k}} = 0{,}6\ \mathrm{A}$$

áram folyik át. Mivel az $U_0$ elektromotoros erejű áramforrás a belső és a külső ellenálláson összesen $U_0 \cdot I = 7{,}2$ W teljesítményt ad le, az elektromotoros erő

$$U_0 = \frac{7{,}2\ \mathrm{W}}{0{,}6\ \mathrm{A}} = 12\ \mathrm{V}.$$

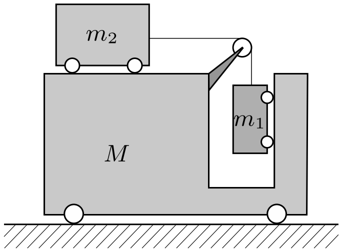
A belső ellenálláson $U_0 - U_\mathrm{k} = 6$ V feszültség esik, miközben 0,6 A áram folyik át rajta. A belső ellenállás nagysága tehát $R_\mathrm{b} = 10\ \Omega$.

*c*) Az áramkör teljes, $R_\mathrm{b} + R_\mathrm{k} = 30\ \Omega$ ellenállásán $U_0 = 12$ V elektromotoros erejű telep 0,4 A áramot hoz létre. Ebben az esetben a kapocsfeszültség

$$U_\mathrm{k} = (0{,}4\ \mathrm{A}) \cdot (20\ \Omega) = 8\ \mathrm{V}.$$

*Schrott Márton* (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

57 dolgozat érkezett. Helyes 49 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (2 pont) 4 dolgozat.

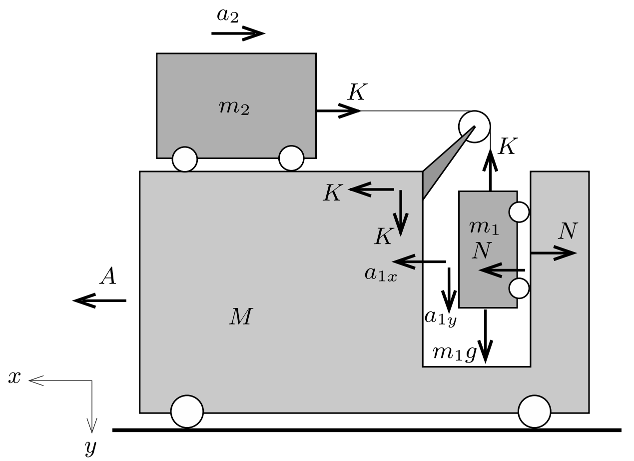



**P. 4928.** *a) Mekkora gyorsulással indulnak meg az* ábrán *látható, könnnyen gördülő kiskocsik, ha a csiga tömege és a légellenállás elhanyagolható?* Adatok: $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $M = 5$ kg.

*b) Milyen határok közé eshet az M tömegű kiskocsi kezdeti gyorsulása más tömegadatok mellett?*

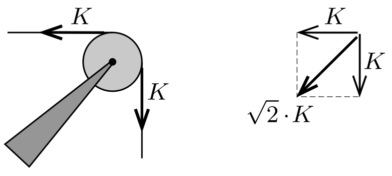
(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

**Megoldás.** *a*) Az $m_1$ és $m_2$ tömegű testekre, valamint a $M$ tömegű kiskocsira ható (számunkra fontos) erőket az *1. ábrán* tüntettük fel. Ezek az $m_1$ tömegű test




*1. ábra*

esetében az $m_1g$ nehézségi erő, a $K$ kötélerő és az $M$ tömegű test által kifejtett $N$ nyomóerő. Az $m_2$ tömegű test függőleges irányban biztosan nem mozdul el, a vízszintes irányú mozgását pedig egyedül a $K$ kötélerő határozza meg. Az $M$ tömegű test függőleges irányban szintén nem mozdul el, így elegendő a rá ható vízszintes erőkkel foglalkoznunk. Két ilyen erő van: az $m_1$ tömegű testre ható $N$ erő ellenereje és a kötél által a csigára gyakorolt $\sqrt{2} \cdot K$ nagyságú erő, amelynek vízszintes irányú komponense éppen $K$ (*2. ábra*).




*2. ábra*

A testekre ható erők számításba vétele után most már felírhatjuk a mozgásegyenleteket $x$ (vízszintes, balra pozitív) és $y$ (függőleges, lefele pozitív) irányokban:

$$(1, x) \qquad N = m_1 a_{1x},$$

$$(1, y) \qquad m_1 g - K = m_1 a_{1y},$$

(2) $$K = m_2 a_2,$$

(3) $$K - N = MA.$$

A mozgásegyenletek mellett még két kényszerfeltételt is megfogalmazhatunk. Az első feltétel abból adódik, hogy az $m_1$ és $M$ tömegű testek vízszintes gyorsulása egyenlő kell hogy legyen, hiszen az $m_1$ tömegű test az $M$ tömegű testen lévő üreg függőleges falán gurul, attól (a mozgás kezdetekor még biztosan) nem válik el. Fennáll tehát:

(4) $$a_{1x} = A.$$

A kötél nyújhatatlansága is ad egy kényszerfeltételt: az $m_1$ tömegű test függőleges gyorsulása és az $m_2$ tömegű testnek a *csigához viszonyított* (jobb felé irányuló) vízszintes gyorsulása egyenlő nagyságú, hiszen a kötél egyik vége ugyanannyit közeledik a csigához, amennyit a másik távolodik attól. Teljesül tehát:

(5) $$a_2 + A = a_{1y}.$$

Az $(1, x)$, $(1, y)$, (2), (3), (4), (5) egyenletrendszer megoldható, belőlük a hat ismeretlen ($a_{1x}$, $a_{1y}$, $a_2$, $A$, $F$ és $N$) kifejezhető:

(6) $$A = a_{1x} = \frac{m_1 m_2}{2m_1 m_2 + m_1^2 + M(m_1 + m_2)}\, g.$$

A megadott tömegadatok esetén

$$A = a_{1x} = \frac{1}{10}\, g = 0{,}98\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$a_2 = \frac{m_1(M + m_1)}{2m_1 m_2 + m_1^2 + M(m_1 + m_2)} g = \frac{3}{10}\, g = 2{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$a_{1y} = \frac{m_1(M + m_1 + m_2)}{2m_1 m_2 + m_1^2 + M(m_1 + m_2)} g = \frac{4}{10}\, g = 3{,}92\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Kiszámíthatjuk még az erőket is: $N \approx 6$ N és $K \approx 1$ N.

Összefoglalva: az $m_1$ tömegű test gyorsulásvektora

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} \approx 4{,}04\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

nagyságú és az iránya a vízszintessel $\mathrm{arctg}\left(\frac{3{,}92}{0{,}98}\right) = 76^\circ$-os szöget zár be (balra lefelé mutat), az $m_2$ tömegű test gyorsulása $2{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ *jobbra*, az $M$ tömegű test pedig $0{,}98\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással *balra* indul el.

*b)* A (6) összefüggésből látható, hogy a kifejezésben szereplő tört mindig pozitív, így az $M$ tömegű kocsi (bármilyen tömegadatok mellett) biztosan *balra* indul el.

$M \gg m_1, m_2$ esetben a kifejezés nevezője sokkal nagyobb a számlálónál, ilyenkor az $M$ tömegű test gyorsulása elhanyagolhatóan kicsi. Az

$$\frac{M}{m_1} \to \infty, \qquad \frac{M}{m_2} \to \infty$$

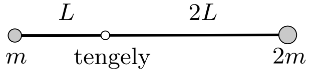
idealizált határesetben $A = 0$, ez tehát a *minimális* gyorsulású eset.

A kifejezés számlálójában láthatóan csak egy tag szerepel ($m_1 m_2$), ugyanezen tag pedig szerepel a nevezőben is, kétszeres szorzóval ($2m_1 m_2$). Mivel a nevező többi tagja mind pozitív, ez azt jelenti, hogy a tört értéke nem lehet nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. Ez a maximális gyorsulású eset pedig akkor valósulhat meg, ha $m_2 \gg m_1 \gg M$, ekkor

$$A = \frac{1}{2 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{M}{m_1}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}\, g \approx \frac{1}{2}\, g \approx 4{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

*Németh Róbert* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

39 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 21, hibás 2 dolgozat.




**P. 4929.** *Az ábrán látható, $3L$ hosszúságú, elhanyagolható tömegű, merev rúd a bal oldali végétől $L$ távolságra lévő, rögzített, vízszintes tengely körül függőleges síkban súrlódásmentesen foroghat. A rúd végeihez $m$, illetve $2m$ tömegű, kis méretű testeket erősítünk, majd egy adott pillanatban a rudat vízszintes helyzetből elengedjük.*

*a) Határozzuk meg a testek sebességét abban a pillanatban, amikor a rúd éppen függőleges!*

*b) Mekkora erővel nyomja ekkor a rúd a tengelyt?*

*c) Mekkora a testek gyorsulása a rúd elengedése utáni pillanatban?*

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

**Megoldás.** *a*) Jelöljük a $2m$ tömeget $M$-mel, és a két testre jellemző fizikai mennyiségeket (sebesség, gyorsulás, erő) különböztessük meg a tömegüknek megfelelő indexszel. Írjuk fel az energiamegmaradás törvényét a rúd vízszintes és függőleges helyzetének megfelelő állapotokra! (A helyzeti energiát a tengely alatt $2L$ mélységben választjuk nullának.)

$$Mg \cdot 2L + mg \cdot 2L = mg \cdot 3L + \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2. \tag{1}$$

A sebességeket kifejezhetjük a rúd szögsebességével:

$$v_m = L\omega, \qquad v_M = 2L\omega,$$

és így (1)-ből a szögsebességet, abból pedig a kerületi sebességeket is kiszámíthatjuk:

$$2mg \cdot 2L + mg \cdot 2L = mg \cdot 3L + \frac{1}{2} m\omega^2 L^2 + \frac{1}{2} 2m\omega^2 (2L)^2,$$

vagyis

$$(2) \qquad \omega=\sqrt{\frac{2g}{3L}}, \qquad v_m=\sqrt{\frac{2Lg}{3}}, \qquad v_M=\sqrt{\frac{8Lg}{3}}.$$

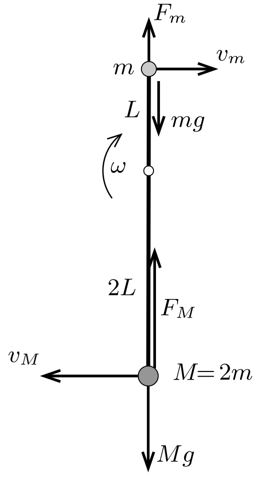
*b*) Jelöljük a függőleges helyzetű rúd által a kis testekre kifejtett erőket $F_m$-mel és $F_M$-mel, a gyorsulásokat pedig $a_m$-mel és $a_M$-mel (lásd az *1. ábrát*). Ezeket a mennyiségeket függőlegesen felfelé mutató irányban fogjuk pozitívnak tekinteni. A mozgásegyenletek:

$$F_m-mg=ma_m, \qquad F_M-Mg=Ma_M.$$

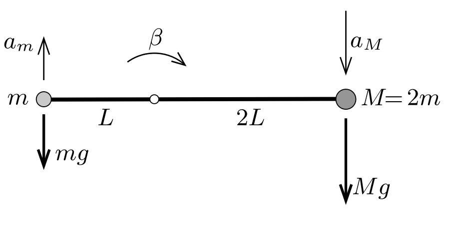
Mivel $a_m=-L\omega^2$ és $a_M=2L\omega^2$, a szögsebesség korábban kiszámított értékének felhasználásával kapjuk, hogy

$$F_m=mg-mL\frac{2g}{3L}=\frac{1}{3}mg, \qquad \text{illetve} \qquad F_M=2mg+2m(2L)\frac{2g}{3L}=\frac{14}{3}mg.$$

A két test összesen $F_m+F_M=5mg$ nagyságú, függőlegesen lefelé mutató erővel hat a rúdra (függőlegesen lefelé), és mivel a rúd tömege elhanyagolható, ugyanekkora erőt fejt ki a rúd a tengelyre.




*1. ábra*




*2. ábra*

*c*) A rúd vízszintes helyzetében (közvetlenül az elengedése után) a nehézségi erők eredő forgatónyomatéka a tengelyre vonatkoztatva (lásd a *2. ábrát*):

$$M_{\text{eredő}}=M_M-M_m=2mg\cdot(2L)-mgL=3mgL.$$

A forgatónyomaték hatására a rúd

$$\beta=\frac{M_{\text{eredő}}}{\Theta}$$

szöggyorsulással kezd elfordulni a tengely körül, ahol

$$\Theta=\Theta_m+\Theta_M=mL^2+M(2L)^2=9mL^2$$

a rendszer teljes tehetetlenségi nyomatéka. Ezek szerint

$$\beta=\frac{g}{3L},\qquad \text{továbbá}\qquad a_m=L\beta=\frac{1}{3}g,\quad a_M=2L\beta=\frac{2}{3}g.$$

*Balaskó Dominik* (Sopron, Széchenyi I. Gimn., 10. évf.)

*Megjegyzés.* A rúd függőleges helyzetében a testek gyorsulása is és a rájuk ható nehézségi erő is függőleges, tehát a rúd által kifejtett erők is függőlegesek (rúdirányúak). Vízszintes helyzetnél viszont a rúd függőleges irányú erőket fejt ki a végeihez rögzített testekre, tehát a rúdban ható erő általában *nem rúdirányú.*

*G. P.*

58 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 1 dolgozat.

**P. 4936.** *Egy szabad, álló neutron bomlásakor mekkora lehet az elektron legnagyobb mozgási energiája?*

(*5 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

**Megoldás.** A neutron bomlásának egyenlete:

$$\mathrm{n}^0\to\mathrm{p}^++\mathrm{e}^-+\bar{\nu},$$

ahol $\mathrm{p}^+$ a keletkező (pozitív töltésű) protont, $\mathrm{e}^-$ a (negatív töltésű) elektront, $\bar{\nu}$ pedig a semleges antineutrínót jelöli.

Az elektronnak akkor lesz a legnagyobb a mozgási energiája, ha az antineutrínó (amelyet nulla nyugalmi tömegű részecskének tekintünk) nem visz el sem energiát, sem impulzust. Az impulzusmegmaradás miatt ekkor a proton és az elektron lendülete egyenlő ($p$) nagyságú és ellentétes irányú lesz.

A relativisztikus energia:

$$E=\sqrt{(m_0c^2)^2+(pc)^2},$$

ahol $m_0$ a megfelelő részecske nyugalmi tömege. A tömegeket érdemes MeV/$c^2$ egységben megadni:

$$m_\mathrm{n}=939{,}565\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2},\quad m_\mathrm{p}=938{,}272\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2},\quad m_\mathrm{e}=0{,}511\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2}.$$

Az energiamegmaradás miatt:

$$m_\mathrm{n}c^2=\sqrt{(m_\mathrm{p}c^2)^2+(pc)^2}+\sqrt{(m_\mathrm{e}c^2)^2+(pc)^2},$$

amit így is felírhatunk:

$$m_\mathrm{n}-\sqrt{(m_\mathrm{e})^2+(p/c)^2}=\sqrt{(m_\mathrm{p})^2+(p/c)^2}.$$

Négyzetre emelve, majd az elektron energiáját kifejezve azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{(m_\mathrm{e})^2+(p/c)^2}=\frac{E_\mathrm{elektron}}{c^2}=\frac{m_\mathrm{n}^2+m_\mathrm{e}^2-m_\mathrm{p}^2}{2m_\mathrm{n}}=1{,}29\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2},$$

vagyis a keletkező elektron *teljes* energiája 1,29 MeV. Ha ebből az energiából levonjuk az elektron 0,51 MeV-os nyugalmi energiáját, megkapjuk, hogy az elektron mozgási energiája legfeljebb 0,78 MeV lehet, ami SI egységekben kb. $1{,}25\cdot 10^{-13}$ J.

*Nagy Botond* (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)

33 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 13, hibás 1 dolgozat.

**P. 4937.** *A jövőben képesek leszünk olyan űrhajókat is építeni, amelyek távoli csillagrendszerekbe repíthetnek minket. Tegyük fel, hogy az egyik ilyen űrhajó a szökési sebességgel hagyja el a Földet, és speciális hajtóművének köszönhetően a mozgási energiáját minden nap megduplázza (a nyugalmi tömege eközben nem változik).*

Becsüljük *meg, mennyit öregszik az űrhajó kapitánya a* 4,3 *fényévnyire lévő Alpha Centaurira történő utazás során!*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

**Megoldás.** Az űrhajó mozgását érdemes három szakaszra osztani:

*i*) A „klasszikus” szakaszra (amikor az űrhajó sebessége sokkal kisebb a fénysebességnél, és így számolhatunk a newtoni fizika képleteivel;

*ii*) a „simán” relativisztikus mozgásra (amikor az űrhajó sebessége megközelíti a fénysebességet);

*iii*) és végül az „ultrarelativisztikus” szakaszra (amely során a fénysebességtől való eltérés elhanyagolhatóan kicsi).

Megmutatjuk, hogy a klasszikus szakasz kb. 26 napig tart, a relativisztikus (a kapitány nézőpontjából) kb. 5 napig, és végül az ultrarelativisztikus szakasz (ismét a kapitány nézőpontjából) mindössze néhány óráig. A kérdéses idő (a kapitány öregedése) tehát összesen 31 nap.

*Megjegyzés.* Érdemes megemlíteni, hogy még a klasszikus szakasz vége előtt, kb. két héttel az indulás után minden ember életét vesztené az űrhajón, mert ekkor az űrhajó gyorsulása már $10\,g$-nél is nagyobb, és a továbbiakban még növekszik. Ilyen körülmények között a szív nem tudja tartósan vérrel ellátni az agyat; ekkora gyorsulásnál még a vadászpilóták is pár perc után elájulnak. Emiatt a kapitány öregedése helyett inkább arra a kérdésre kereshetünk választ, hogy mit mutat az űrhajóban egy óra, esetleg egy gyorsulásálló robotkapitány számítógépének belső órája.

Az $m$ (nyugalmi) tömegű űrhajó a 2. kozmikus sebességgel, $v_0=11{,}2$ km/s kezdősebességgel hagyja el a Földet. Nem tudjuk, hogy az űrhajó milyen ütemben változtatja a sebességét (elképzelhető, hogy folyamatosan, exponenciálisan nő mozgási energiája), de becslésre az is megfelel, ha feltesszük, hogy minden nap egyszer pillanatszerűen kétszeresére növeli a mozgási energiáját, majd 1 napig állandó sebességgel halad.

Ha az űrhajó sebessége a fénysebességhez képest $\beta = v/c$, és a földi megfigyelő számára 1 napig ezzel a sebességgel mozog, akkor kapitány számára ezalatt

$$t' = (1\text{ nap})\sqrt{1-\beta^2} < 1\text{ nap}$$

idő telik el. (Ez az időkülönbség, az ún. idődilatáció jelensége a relativitáselmélet egyik furcsasága.) Az űrhajó összes (mozgási+nyugalmi) energiája ennél a sebességnél:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 \cdot \frac{1\text{ nap}}{t'}. \tag{1}$$

*i*) A klasszikus szakaszban az űrhajó mozgási energiája viszonylag kicsi nyugalmi energiához képest: ekkor az idő még „normálisan” (a földi megfigyelőével kb. megegyező módon) telik a kapitány (és „legénység”, valamint a fedélzeti számítógépek) számára. A klasszikus szakasz felső határát (kicsit önkényesen) pl. a nyugalmi energia $\frac{1}{25}$ részénél húzhatjuk meg, vagyis

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{1}{2}mv^2 < \frac{1}{25}mc^2.$$

A szakasz legnagyobb sebessége $v_1 = 8{,}5 \cdot 10^4$ km/s, aminek eléréséhez szükséges (napokban számolt) időt a

$$v_1^2 = 2^t \cdot v_0^2$$

egyenletből számíthatjuk ki, és $t = 25{,}8$ nap adódik.

*ii*) A relativisztikus szakaszban az űrhajó mozgási energiája összemérhető (azonos nagyságrendű) a nyugalmi energiával, emiatt a relativisztikus képleteket kell használni. Becslésnek megfelel, ha azt mondjuk, hogy a mozgási energia ebben a szakaszban legyen $\frac{1}{25}mc^2$ és $25\,mc^2$ közötti érték. Ez 625-szörös növekedés, aminek 2-es alapú logaritmusa 9,2. Tehát a földi megfigyelő kb. 9 nap alatt „látja” az űrhajó mozgásának klasszikusból ultrarelativisztikusba való átmenetét. Mennyi időt mér ezalatt a hajó belső órája (mennyit öregszik a kapitány)?

A relativisztikus szakasz $i$-edik napján az (1) összefüggés felhasználásával

$$t_i' = (1\text{ nap}) \cdot \sqrt{1-\beta_i^2}\text{ nap} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{25}\right)^i}\text{ nap},$$

a teljes szakaszon pedig

$$T' = t_1' + t_2' + \ldots + t_9' =$$

$$= \frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}08} + \frac{1}{1{,}16} + \frac{1}{1{,}32} + \frac{1}{1{,}64} + \frac{1}{2{,}28} + \frac{1}{3{,}56} + \frac{1}{6{,}12} + \frac{1}{11{,}24} \approx 5{,}1\text{ nap}$$

telik el az űrhajóban.

*iii*) Az ultrarelativisztikus szakaszban az űrhajó mozgási energiája jóval nagyobb a nyugalmi energiájánál: az űrhajó „összes energiáját” gyakorlatilag teljesen az előbbi teszi ki. Mivel a mozgási energia naponta duplázódik, minden nap fele olyan hosszúnak érződik kapitány számára, mint az előző. Ez egy 1/2-es szorzójú, elég („végtelen”) hosszú mértani sor, aminek összege az első elem kétszerese. Mivel az első napon

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = 25\,mc^2,$$

$$t' = \frac{1\ \text{nap}}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{1}{25}\ \text{nap} \approx 1\ \text{óra},$$

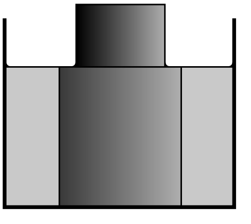
az összes további időtartam összege ennek kétszerese, vagyis kb. 2 óra.

A földi indulástól számítva tehát az Alpha Centauri (vagy bármilyen más, nagyon távoli csillag) eléréséig összesen kb. 31 nap telik el.

*Fajszi Bulcsú* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

15 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (1 pont) 1 dolgozat.

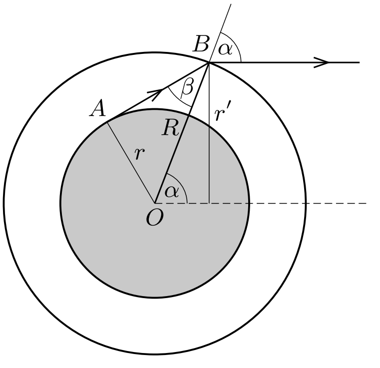
**P. 4943.** *Egy hengeres üvegpohár közepén átlátszatlan fémhenger áll. A henger körül a pohárban átlátszó folyadék van. Messziről nézve, a fénytörés következtében a henger folyadékban álló része vastagabbnak látszik. Milyen mértékben?*



Adatok: *a pohár sugara* 4 cm, *a fémhenger sugara* 2,5 cm, *a folyadék törésmutatója* 1,5.

(*5 pont*) *Vermes Miklós* (1905–1990) feladata

**Megoldás.** Jelöljük a pohár sugarát $R$-rel, a fémhenger sugarát $r$-rel, a folyadék törésmutatóját $n$-nel. A poharat és a fémhengert felülnézetből az *ábra* mutatja.




A henger felületétől kiinduló fénysugarak között található olyan, ami törés után éppen „vízszintesen” jobbra halad. Ennek a fénysugárnak a törésére felírhatjuk a Snellius–Descartes-törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

A fémhenger látszólagos átmérőjét az ábrán $A$-val jelölt pontból kiinduló fénysugár határozza meg. Ez a fénysugár érinti a fémhengert, így

$$\sin\beta = \frac{r}{R}.$$

Legyen a $B$ pont (a fénysugár megtörésének pontja) a körök középpontján átmenő vízszintes egyenestől $r'$ távolságra. Ekkor egyállású szögek miatt fennáll, hogy

$$\sin\alpha = \frac{r'}{R}.$$

A fenti két egyenletet egymással elosztva kapjuk:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r'}{r} = n,$$

vagyis

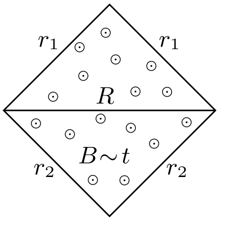
$$r' = nr = 3{,}75 \text{ cm}.$$

A fémhenger tehát másfélszer olyan vastagnak látszik, mint amilyen valójában.

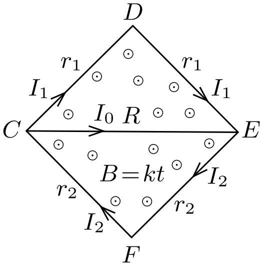
*Csuha Boglárka* (Keszthelyi Vajda János Gimn., 11. évf.)

38 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 5 dolgozat.

**P. 4957.** *Egy négyzet alakú drótkeret oldalélei az* ábrán *látható $r_1$ és $r_2$ ellenállású huzalokból készültek. A keret az ábra síkjára merőleges, homogén, időben egyenletesen növekvő mágneses indukciójú mezőben van. Mekkora $R$ ellenállású vezetéket kapcsoljunk a négyzet átlójára, hogy az a leggyorsabb ütemben melegedjen?*




(*5 pont*) *Izsák Imre Gyula verseny* (Zalaegerszeg) feladata nyomán




**Megoldás.** Jelöljük az egyes vezetékekben folyó áramokat és a drótkeret csúcspontjait az *ábrán* látható módon. Legyen a mágneses indukció növekedési üteme $k =$ állandó, az $R$ ellenállású átló mentén disszipált teljesítmény pedig $P$.

A mágneses indukció változása miatt az ábra síkjából kifelé jövő mágneses fluxus időben egyenletesen növekszik, így – Lenz törvénye szerint – a $CDEC$ hurokban az óramutató járásával megegyező irányban $ka^2/2$ nagyságú körfeszültség indukálódik ($a$ a négyzet oldalélének hossza). Ugyanekkora feszültség indukálódik az $EFCE$ hurokban is.

A Kirchhoff-féle huroktörvény szerint

$$\frac{a^2k}{2} = 2I_1r_1 - I_0R, \tag{1}$$

$$\frac{a^2k}{2} = 2I_2r_2 + I_0R. \tag{2}$$

A $C$ pontra felírhatjuk még Kirchhoff csomóponti törvényét:

$$I_0 = I_2 - I_1. \tag{3}$$

Az (1) és (2) egyenletekből kapjuk:

$$I_1 = \frac{I_0R}{2r_1} + \frac{a^2k}{4r_1}, \tag{4}$$

$$I_2 = \frac{a^2k}{4r_2} - \frac{I_0R}{2r_2}, \tag{5}$$

amiből (3) felhasználásával

$$I_0 = \frac{\frac{a^2k}{4}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}{R\left(\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2}\right) + 1}$$

adódik.

Az $R$ ellenállású vezetéken $P = I_0^2R$ teljesítménnyel fejlődik hő. A leggyorsabb melegedési ütemet a

$$P = \left(\frac{\frac{a^2k}{4}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}{R\left(\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2}\right) + 1}\right)^2 R$$

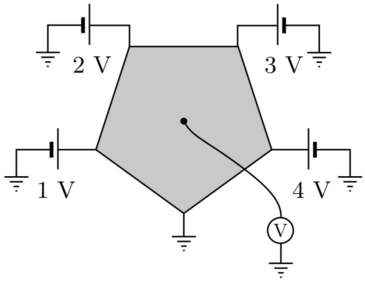
függvény maximuma határozza meg. Ezt a maximumot a derivált eltűnéséből (a $P'(R) = 0$ feltételből), vagy a $P(R)$ függvény reciprokára alkalmazott számtani-mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségből kaphatjuk meg. A szélsőérték akkor áll fenn, ha

$$R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2},$$

vagyis ha $R$ az $r_1$ és $r_2$ ellenállásértékek harmonikus közepe.

*Shirsha Bose* (Kalkutta (India), South Point High School, 12. évf.)
dolgozata alapján

13 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

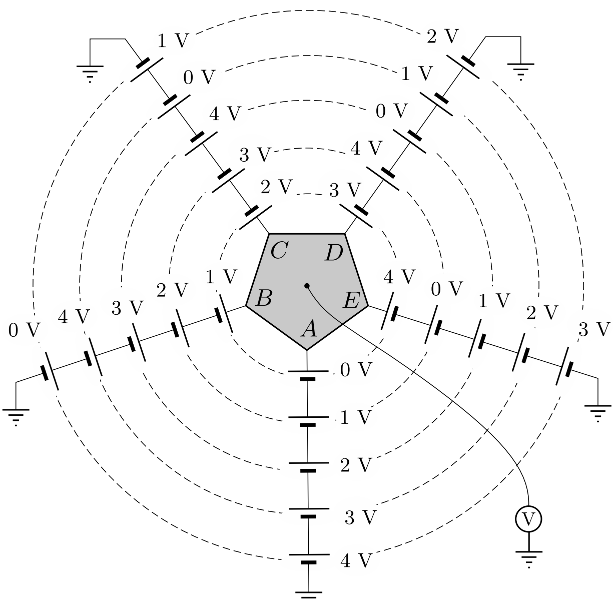



**P. 4959.** *Egy szabályos ötszög alakú, vékony fémlemez egyik csúcsát leföldeljük, a többire az ábrán látható módon kis belső ellenállású feszültségforrásokat kapcsolunk. Mekkora feszültséget mutat a lemez középpontjához kapcsolt voltmérő?*

(*6 pont*) *Példatári feladat nyomán*

**I. megoldás.** Nevezzük el az ötszög csúcsait! A földeléssel összekötött csúcs legyen $A$, az 1 V potenciálú $B$, a 2 V potenciálú $C$, a 3 V potenciálú $D$ és végül az utolsó $E$! A feladatban a földelésnek nincs más szerepe, mint hogy meghatározza a nulla potenciált, így tekinthetünk rá úgy is, mint egy 0 V feszültséget szolgáltató feszültségforrásra. Az ötszög középpontjában kialakuló potenciált jelöljük $U_0$-lal, éppen ennek a nagyságát szeretnénk meghatározni.

Ezek után kössünk az $A$ csúcsra a „0 voltos" feszültségforrás után (a fémlaptól távolodva) egy 1, egy 2, egy 3 és egy 4 voltos feszültségforrást, ebben a sorrendben. Ehhez hasonlóan kössünk a $B$ pontra az 1 voltos feszültségforrás után a sorrendet tartva egy 2, egy 3, egy 4 és egy „0 voltos" feszültségforrást, a $C$ csúcsra csatlakoztassunk egy 3, egy 4, egy „0" és egy 1 voltos tápegységet, a $D$ pontra egy 4, egy „0", egy 1 és egy 2 voltosat, és végül az $E$-re egy „0", egy 1, egy 2 és egy 3 voltosat, ahogy azt az *1. ábra* mutatja.




*1. ábra*

Valamennyi feszültségforrást azonos polaritással sorba kapcsoljuk. Így mindegyik csúcsban a potenciál ugyanakkora lesz, értéke a feszültségek algebrai összegével, azaz 10 volttal egyezik meg. Ebből következően az egész fémlap egy ekvipotenciális felületet alkot, valamennyi pontjának a földhöz viszonyított potenciálja 10 V lesz.

Használjuk ki, hogy – az Ohm-törvény lineáris jellege miatt – a különböző feszültségforrások „hatását" egymástól függetlenül kezelhetjük, az általuk létrehozott potenciálokat összegezhetjük (szuperponálhatjuk). Először vegyük szemügyre azokat a feszültségforrásokat, amelyek közvetlenül a csúcsok mellett (az ábrán a legbelső szaggatott vonalú kör mentén) helyezkednek el, vagyis amelyeket az eredeti elrendezés tartalmazott. Ezek együttesen valamekkora $U_0$ potenciált hoznak létre az ötszög középpontjában, mint ahogyan azt már kikötöttük. Most azokat a feszültségforrásokat vizsgáljuk, amelyek közvetlenül az eredeti tápegységek mellett kaptak helyet. Ezek is egy „gyűrűt" alkotnak az eredeti rendszer körül, mint ahogy az őket követők szintén egy harmadik, egy negyedik és egy ötödik gyűrűt, amelyeket az ábrán további szaggatott vonalú körökkel jelöltük meg.

Vegyük észre, hogy valamennyi ilyen gyűrű megegyezik az eredeti (a legbelső gyűrű) kapcsolásával, a feszültségforrások egymáshoz viszonyítva is azonos elrendezésben találhatók, csupán egymáshoz képest „el vannak forgatva". Emiatt valamennyi gyűrű öt feszültségforrása egyenként szintén $U_0$ potenciált hoz létre az ötszög középpontjában! Az eredeti feszültségforrások és a további négy gyűrű feszültségforrásainak hatását szuperponálva azt kapjuk, hogy a potenciálnak az ötszög középpontjában $5\,U_0$-nak kell lennie. Ezek alapján

$$5\,U_0 = 10\ \text{V}, \qquad \text{vagyis} \qquad U_0 = 2\ \text{V}.$$

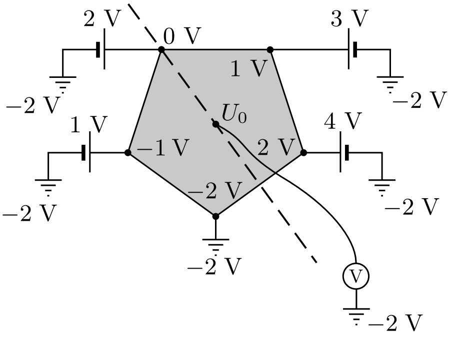
Tehát az eredeti elrendezésben a voltmérő $U_0 = 2$ V feszültséget mutat.

*Megjegyzés.* Az ismertetett gondolatmenettel egy szabályos $n$-szög alakú vezető fémlapot is meg tudunk vizsgálni, függetlenül attól, hogy milyen feszültségforrásokat kapcsolunk annak csúcsaira. Az ekvipotenciális felület potenciálja az eljárás végén a kezdeti potenciálok algebrai összegével egyezik meg. Ez az érték a középpont keresett potenciáljának $n$-szerese, vagyis az eredeti elrendezésben az $n$-szög középpontja és a földelés közti feszültség

$$U_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i.$$

*Kondákor Márk*
(Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

**II. megoldás.** A földelés potenciálját általában nullának választjuk, de ez önkényes, választhatnánk akár $-2$ V-nak is. Ekkor az ötszög csúcsaiban a potenciálok a *2. ábrán* látható értékek lesznek.




*2. ábra*

Amint látszik, a csúcspontok potenciáljai az ábrán szaggatottan jelölt vonalra történő tükrüzéskor előjelet váltanak (erre a vonalra nézve „antiszimmetrikusak”). Mivel a csúcspontok potenciáljai egyértelműen meghatározzák a fémlemez minden pontjának elektromos potenciálját, az egész lemez potenciáleloszlása „örökli” a csúcspontok szimmetriatulajdonságát, vagyis a szaggatott vonalra való tükrözésre nézve a potenciálfüggvény „antiszimmetrikus”. Ezek szerint a szaggatott vonal mentén mindenhol, így a lemez középpontjában is 0 V lesz a potenciál.

A feszültségmérő tehát $U_0 = (0\ \mathrm{V}) - (-2\ \mathrm{V}) = 2\ \mathrm{V}$ értéket mutat.

*Szakály Marcell* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

14 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1 pont) 1, hibás 1 dolgozat.

## Fizikából kitűzött feladatok

**M. 374.** Mérjük meg valamilyen fajta méz optikai törésmutatóját!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

**G. 621.** A levegő nyomása 1 km magasságban 899 hPa és a hőmérséklete 8,6 °C. 10 km magasságban már csak 265 hPa és −37,2 °C. Az 1 km-es magasságban mérhető értékhez képest hány százalékkal kisebb 10 km magasságban

*a*) a levegő sűrűsége;

*b*) a nehézségi gyorsulás értéke?

(*3 pont*)

**G. 622.** Egy gömb alakú gáztartály egy nyári meleg napon reggeltől délig annyira felmelegszik, hogy térfogata 0,6%-kal különbözik a reggeli térfogattól. Hány százalékkal változott a tartály felszíne?

(*3 pont*)

**G. 623.** Egy elhanyagolható tömegű kötél végén lévő 10 kg tömegű vödröt emelve a vödör 2 másodperc alatt, egyenletesen gyorsulva éri el az emelkedési 0,6 m/s sebességet, amellyel még további 8 másodpercig mozog. Milyen magasra emelkedik a vödör, és mekkora munkát végeztünk?

(*3 pont*)

**G. 624.** A Balatonon újonnan létesített vitorláskikötők egy része jégmentes, azaz a bent hagyott hajók körül igen nagy hidegben sem fagy be. Ezt a víz felkeverésével érik el. Miért működik ez a módszer?

(*3 pont*)