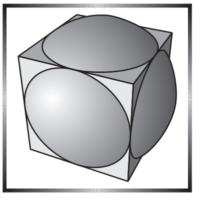
B. 4929. Adott az $\mathcal{E}$ ellipszis és a $\mathcal{H}$ hiperbola a térben úgy, hogy síkjaik merőlegesek egymásra, valamint $\mathcal{E}$ fókuszai $\mathcal{H}$ valós tengelyének végpontjai, $\mathcal{H}$ fókuszai pedig $\mathcal{E}$ nagytengelyének végpontjai. Legyen A és B két rögzített pont a $\mathcal{H}$ hiperbola különböző ágain, továbbá P legyen az ellipszis egy tetszőleges pontja. Mutassuk meg, hogy a $PA+PB$ távolságösszeg nem függ P megválasztásától.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2018. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (713–715.)

A. 713. Azt mondjuk, hogy a valós számokból álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozat *terpeszkedő,* ha minden pozitív egész j-re $i<j$ esetén $|a_i-a_j| \geqslant \frac{1}{j}$. Határozzuk meg az összes olyan C pozitív valós számot, melyre megadható a $[0;C]$ intervallumban egy terpeszkedő sorozat.

Javasolta: *Di Giovanni Márk* (Cambridge)

A. 714. Adottak a páronként diszjunkt $D_1, D_2, \ldots, D_n$ körlemezek az euklideszi síkon ($n \geqslant 2$). Jelölje $k=1,2,\ldots,n$-re f_k a D_k-t határoló körre való inverziót. (Az f_k függvényt D_k középpontjának kivételével a sík minden pontjában értelmezzük.) Hány fixpontja lehet a sík lehető legbővebb részhalmazán értelmezett $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$ transzformációnak?

Javasolta: *Váli Benedek* (Szeged)

A. 715. Legyenek a és b pozitív egész számok. Egy $a \times b$ méretű téglalapot olyan négyzetekkel fedünk le hézagmentesen és átfedések nélkül, melyek oldalhossza 2-hatvány, vagyis a lefedéshez 1×1-es, 2×2-es, 4×4-es, … méretű négyzeteket használhatunk fel. Jelölje M azt, hogy egy ilyen fedéshez minimálisan hány négyzetet kell felhasználnunk. Az a és b számok egyértelműen felírhatók különböző kettőhatványok összegeként: $a=2^{a_1}+\ldots+2^{a_k}$, $b=2^{b_1}+\ldots+2^{b_\ell}$. Mutassuk meg, hogy

$$M=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}2^{|a_i-b_j|}.$$

Beküldési határidő: 2018. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518