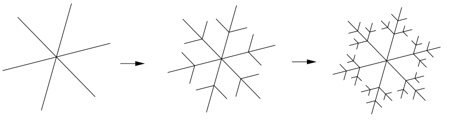
C. 1459. Tükrözzük az $y=x^2$ egyenletű normál parabolát az $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$ pontra. Mekkora szögben metszi egymást a két parabola?

Feladatok 11. évfolyamtól



C. 1460. Egy speciális, forgásszimmetrikus hópehely képződése a következőképpen zajlik: minden másodpercben a hópehely végződéseinek felezőpontjából indulva két, egyenként harmadakkora új végződés keletkezik. (A hópehely kiinduló állapota és a képződés első két lépése az *ábrán* látható.) Hány darab 10 mikrométer hosszúságú végződése lesz a hópehelynek 6 másodperc elteltével, ha a hópehely átmérője 4,32 mm?

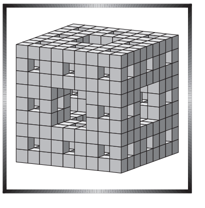
C. 1461. A pozitív egész számok esetén értelmezzük a $\circ$ műveletet, amelyről a következő dolgokat tudjuk: *i*) $1\circ 1=3$; *ii*) $a\circ b=b\circ a$ minden a, b számra; *iii*) $a\circ(b+1)=a\circ b+(a+1)+2b$ minden a, b esetén. Adjuk meg $2017\circ 2018$ értékét.

❄

Beküldési határidő: 2018. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (4921–4929.)



B. 4921. Bizonyítsuk be, hogy ha n és k pozitív egészek, akkor $n+k$ egész szám közül mindig ki lehet választani legalább $(k+1)$-et úgy, hogy az összegük n-nel osztható legyen.

(*5 pont*) Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)

B. 4922. Oldjuk meg az egész számhármasok körében a következő egyenletrendszert:

$$3x-y^2=\frac{z}{2},$$

$$3y+x^2=\frac{3z}{2}.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 4923. Az ABC háromszög A-ból induló belső szögfelezője a BC oldalt E-ben, a B-ből induló belső szögfelezője az AC oldalt F-ben metszi. Jelölje O a háromszög beírt körének középpontját. Mekkora lehet a C-nél levő szög, ha az $OFA\triangle$ és a $OBE\triangle$ területének összege egyenlő az $AOB\triangle$ területével?

(*3 pont*)

B. 4924. Tekintsük egy háromszög hozzáírt köreinek középpontjaiból a hozzájuk tartozó oldalakra bocsátott merőlegeseket. Igazoljuk, hogy ez a három egyenes egy pontban metszi egymást.

(*4 pont*)

B. 4925. Igazoljuk, hogy ha az $a_1; a_2; \ldots; a_{2017}$ nemnegatív valós számok átlaga 1, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a_1}{a_1^{2018}+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}}+\frac{a_2}{a_2^{2018}+a_3+a_3+\ldots+a_{2017}+a_1}+\ldots+$$

$$+\frac{a_{2017}}{a_{2017}^{2018}+a_1+a_2+\ldots+a_{2016}}\leqslant 1.$$

(*4 pont*)

B. 4926. Az ABC hegyesszögű háromszögben a B-ből és C-ből induló magasság talppontja D, illetve E. Az E pont tükörképe az AC és a BC egyenesre S, illetve T. Az O középpontjú CST kör az AC egyenest másodszor az $X \neq C$ pontban metszi. Mutassuk meg, hogy az XO és DE egyenesek merőlegesek egymásra.

(*5 pont*) (*Koreai feladat*)

B. 4927. Legyen A és B vektorok egy-egy véges halmaza, továbbá legyen $A+B=\{\mathbf{v}+\mathbf{w} \mid \mathbf{v}\in A,\ \mathbf{w}\in B\}$. Mutassuk meg, hogy $|A+B|\geqslant |A|+|B|-1$.

(*5 pont*)

B. 4928. Az égig érő fa törzse egy láb magasan kétfelé ágazik. A továbbiakban ágnak két elágazás közti részt tekintünk, amin nincs további elágazás. Az égig érő fa minden ága egyenes és egy lábbal magasabban végződik, mint a talajhoz közelebbi vége. Egy ág gyermekeinek tekintjük az ág magasabban lévő végéből kiinduló ágakat, amiket egyúttal egymás testvéreinek is nevezünk. Az égig érő fa minden ágának van legalább két gyermeke, és ha nem pont két gyermeke van, akkor van olyan testvére, akinek pontosan két gyereke van. A testvéreknek mindig különböző számú gyerekük van. Ha egy ágnak több mint két gyereke van, akkor van olyan testvére, akinek pontosan eggyel kevesebb gyereke van, mint neki. Hány ág indul ki az n láb magasan lévő elágazásokból?

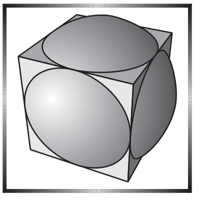
(*6 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

B. 4929. Adott az $\mathcal{E}$ ellipszis és a $\mathcal{H}$ hiperbola a térben úgy, hogy síkjaik merőlegesek egymásra, valamint $\mathcal{E}$ fókuszai $\mathcal{H}$ valós tengelyének végpontjai, $\mathcal{H}$ fókuszai pedig $\mathcal{E}$ nagytengelyének végpontjai. Legyen A és B két rögzített pont a $\mathcal{H}$ hiperbola különböző ágain, továbbá P legyen az ellipszis egy tetszőleges pontja. Mutassuk meg, hogy a $PA+PB$ távolságösszeg nem függ P megválasztásától.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2018. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (713–715.)

A. 713. Azt mondjuk, hogy a valós számokból álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozat *terpeszkedő,* ha minden pozitív egész j-re $i<j$ esetén $|a_i-a_j| \geqslant \frac{1}{j}$. Határozzuk meg az összes olyan C pozitív valós számot, melyre megadható a $[0;C]$ intervallumban egy terpeszkedő sorozat.

Javasolta: *Di Giovanni Márk* (Cambridge)

A. 714. Adottak a páronként diszjunkt $D_1, D_2, \ldots, D_n$ körlemezek az euklideszi síkon ($n \geqslant 2$). Jelölje $k=1,2,\ldots,n$-re f_k a D_k-t határoló körre való inverziót. (Az f_k függvényt D_k középpontjának kivételével a sík minden pontjában értelmezzük.) Hány fixpontja lehet a sík lehető legbővebb részhalmazán értelmezett $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$ transzformációnak?

Javasolta: *Váli Benedek* (Szeged)

A. 715. Legyenek a és b pozitív egész számok. Egy $a \times b$ méretű téglalapot olyan négyzetekkel fedünk le hézagmentesen és átfedések nélkül, melyek oldalhossza 2-hatvány, vagyis a lefedéshez 1×1-es, 2×2-es, 4×4-es, $\ldots$ méretű négyzeteket használhatunk fel. Jelölje M azt, hogy egy ilyen fedéshez minimálisan hány négyzetet kell felhasználnunk. Az a és b számok egyértelműen felírhatók különböző kettőhatványok összegeként: $a=2^{a_1}+\ldots+2^{a_k}$, $b=2^{b_1}+\ldots+2^{b_\ell}$. Mutassuk meg, hogy

$$M=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} 2^{|a_i-b_j|}.$$

Beküldési határidő: 2018. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518