b) Határozzuk meg a és b értékét, ha tudjuk, hogy a kapott p valószínűségre minden $n > 1$ egész esetén teljesül, hogy $a < p \leqslant b$, ahol a a lehető legnagyobb, b pedig a lehető legkisebb ilyen szám? (*7 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2017/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *$A \cup B$ halmaznak 192 eleme van. $A \cap B$ elemszáma A elemszámának 20%-a, B elemszámának 15%-a. Hány eleme van az A és a B halmaznak?* (*6 pont*)

b) *Egy város felnőtt lakosságának 30%-a nyugdíjas. A nyugdíjasok 55%-a nő. A férfiaknak 73%-a aktív korú (nem nyugdíjas). Bizonyítsuk be, hogy a városban a felnőtt férfiak és nők száma egyenlő.* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az $A \cap B$ halmaz elemszáma x, ekkor $A \setminus B$ elemszáma $4x$. Jelölje a $B \setminus A$ halmaz elemszámát y. Ekkor

$$\frac{x}{x+y} = \frac{1{,}5}{10}, \quad \text{amiből} \quad y = \frac{17}{3}x.$$

Tehát $192 = \frac{32}{3}x$, amiből $x = 18$, így A elemszáma 90, míg B elemszáma 120.

b) A nyugdíjasoknak 45%-a férfi, ez a 30%-nak a 45%-a, azaz a nyugdíjas férfiak száma a teljes lakosság 13,5%-a. Másfelől a férfiak $100 - 73 = 27$%-a nyugdíjas. Így a férfiak 27%-a annyi, mint a teljes lakosság 13,5%-a. A férfiak számát F-fel, míg a teljes lakosság számát T-vel jelölve $0{,}27 \cdot F = 0{,}135 \cdot T$, ebből $F = 0{,}5 \cdot T$, vagyis a férfiak a teljes lakosság felét teszik ki.

2. *a*) *Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán:* $3^{2+x} + 3^{6-x} = 2190.$ (*7 pont*)

b) *Legyen az a_n sorozat definíciója: $a_n = 8^{n(n+1)}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat első n tagjának szorzata $2^{n(n+1)(n+2)}$.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*)

$$9 \cdot 3^x + \frac{729}{3^x} = 2190.$$

3^x-t z-vel jelölve és az egyenletet rendezve a

$$3z^2 - 730z + 243 = 0$$

egyenlethez jutunk, melynek gyökei $z_1 = 243$ és $z_2 = 1/3$. Ebből $x_1 = 5$ és $x_2 = -1$. Mindkét gyök megfelelő, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.

b) Az első n tag szorzata

$$8^{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)} = 2^{3\cdot(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1))}.$$

Mivel az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, azt kell bizonyítanunk, hogy

$$3 \cdot \big(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)\big) = n(n+1)(n+2).$$

Bizonyítsuk teljes indukcióval:

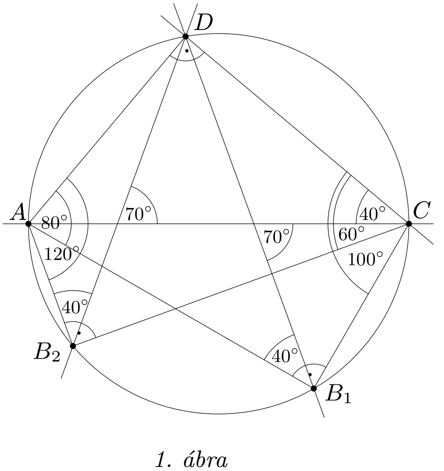
1. $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $3 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.
2. Tegyük fel, hogy valamilyen n-re az állítás igaz. Ekkor $n+1$-re:

$$3 \cdot \big(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) + (n+1)(n+2)\big) =$$
$$= 3 \cdot \big(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)\big) + 3 \cdot (n+1)(n+2) =$$
$$= n(n+1)(n+2) + 3 \cdot (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)(n+3).$$

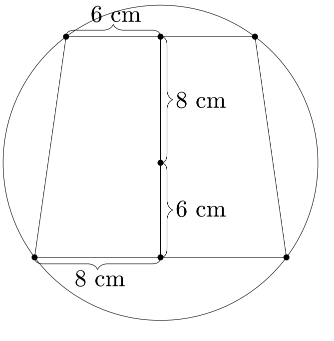
3. *a) Egy* 10 *egység sugarú körbe az $ABCD$ négyszöget írtuk. A négyszög két átlója* 70°*-os szögben metszi egymást. Az AC átló hossza* 20 *egység, és a CD oldallal* 40°*-os szöget zár be. Számítsuk ki a négyszög szögeit.* (*6 pont*)

b) Egy 10 *egység sugarú gömbbe csonkakúpot írunk, melynek alap-, illetve fedőlapja a gömb középpontjától* 6 cm, *illetve* 8 cm *távolságra van. (A gömb középpontja a két sík közé esik.) Számítsuk ki a csonkakúp felszínét.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) AC átmérő, mert kétszerese a kör sugarának. Thalész tétele szerint $ABC\sphericalangle$ és $ADC\sphericalangle$ derékszög. $ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle = 40^\circ$, mert ugyanahhoz a húrhoz tartozó kerületi szögek. Két jó négyszöget kapunk, az *1. ábra* háromszögeinek minden szögét kiszámítva és a megfelelőket összeadva kapjuk, hogy a hiányzó két szög 80° és 100°, illetve 120° és 60°.



1. ábra



2. ábra

b) Nézzük a gömb és a csonkakúp (forgástengelyén átmenő) síkmetszetét. Pitagorasz tételéből a fedőkör sugara $r = 6$ cm, az alapkör sugara $R = 8$ cm (*2. ábra*). Az alkotó: $a^2 = 14^2 + 2^2 = 200$, ebből

$$a = \sqrt{200} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$

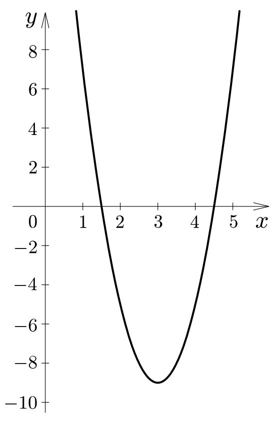
Az adatokat az $A = \pi \cdot \big[R^2 + r^2 + (R+r)a\big]$ képletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy a csonkakúp felszíne 936,2 cm^3.

4. *Elemezzük monotonitás szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^4 - 8x^3 + 13{,}5x^2 + 10$ függvényt, és adjuk meg lokális szélsőértékeit.*

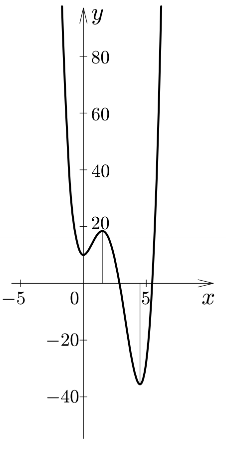
(*12 pont*)

Megoldás. A függvény deriváltja $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 27x = x \cdot \left(4x^2 - 24x + 27\right)$. A zárójelben szereplő másodfokú kifejezés gyökei 1,5 és 4,5, így grafikonja vázlatosan a *3. ábrán* látható.

Előjele a $]-\infty; 1{,}5]$ és a $]4{,}5; \infty;]$ intervallumon pozitív, az $]1{,}5; 4{,}5]$ intervallumon negatív.



3. ábra



4. ábra

Ezt x-szel szorozva kapjuk $f'(x)$-et, ami ezek szerint a 0, 1,5 és 4,5 helyeken vesz fel 0 értéket, továbbá

a $]-\infty; 0[$ intervallumon negatív,
a $]0; 1{,}5[$ intervallumon pozitív,
az $]1{,}5; 4{,}5[$ intervallumon negatív,
a $]4{,}5; \infty[$ intervallumon pozitív.

Fentiek alapján az $f(x)$ függvény

a $]-\infty; 0[$ intervallumon szigorúan monoton csökken,
a $]0; 1{,}5[$ intervallumon szigorúan monoton nő,
az $]1{,}5; 4{,}5[$ intervallumon szigorúan monoton csökken,
a $]4{,}5; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton nő.

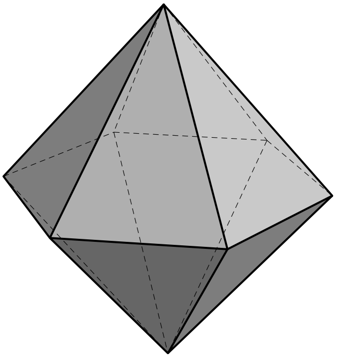
Ezekből következik, hogy 0-ban és 4,5-ben a függvénynek lokális minimuma, 1,5-ben lokális maximuma van. Ezek értéke: $f(0) = 10$; $f(1{,}5) = 18{,}4375$; $f(4{,}5) = -35{,}5625$.

Grafikonja vázlatosan a *4. ábrán* látható.

II. rész

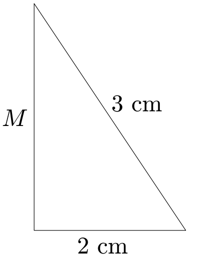
5. *Egy dobókockához hasonlóan használható fajáték alakja két egybevágó, alapjuknál egymáshoz illesztett szabályos hatoldalú gúla, amelyeknek alapéle* 2 cm, *oldaléle* 3 cm.

a) Számítsuk ki a test tömegét (grammban kifejezve), ha anyagának sűrűsége 430 kg/m^3. (*7 pont*) *b) A test lapjai közül négy piros, a többi fekete. A piros dobás jelent szerencsét a társasjátékban. Ha tíz játékos dob egyszerre egy-egy ilyen testtel, mekkora a valószínűsége, hogy a játékosoknak pontosan a fele dob pirosat?* *(3 pont)*



c) A játék során a tíz játékos összesen öt alkalommal dobott egyszerre. Mindegyik alkalommal feljegyezték a piros dobások számát. Mind az öt esetben a játékosok kevesebb, mint fele dobott pirosat, de olyan nem fordult elő, hogy egyiküknek sem volt szerencséje. Mi volt az öt feljegyzett szám, ha átlaguk 1,6 *és szórásuk* 0,8? *(A számok sorrendje nem kérdés.)* *(6 pont)*

Megoldás. *a*) A gúla alapterülete $T = 6 \cdot 2^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2, magassága $M = \sqrt{5}$ cm. Térfogata $2 \cdot \frac{TM}{3} \approx 15{,}49$ cm^3, sűrűsége 0,43 g/cm^3, ebből a tömege $\approx 0{,}66$ g.

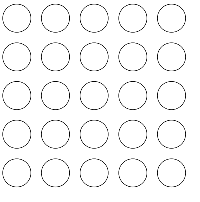


b) A piros dobás valószínűsége $\frac{1}{3}$, így a keresett valószínűség:

$$\binom{10}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 0{,}137.$$

c) Mind az öt szám 1 és 4 között van, és az egyik biztosan 1-es. A másik négy szám összegét x-szel jelölve $\frac{1+x}{5} = 1,6$, amiből $x = 7$. A másik négy szám lehetséges értékei növekvő sorrendben: 1, 1, 1, 4; 1, 1, 2, 3 vagy 1, 2, 2, 2. Ezek közül csak a második esetben lesz a szórás 0,8. Tehát az öt feljegyzett szám az 1, 1, 1, 2, 3 volt.

6. *Az ábrán látható huszonöt kör mindegyikét fehérre vagy feketére színezzük. (Az ábra rögzített, a mozgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük azonosnak.)*



a) Hány olyan színezés lehetséges, amelyben több a fekete kör, mint a fehér? *(3 pont)*

b) Hány olyan színezés lehetséges, amely szimmetrikus az ábra vízszintes vagy függőleges tengelyére? *(6 pont)*

c) Hány olyan színezés lehetséges, amelyben pontosan 7 *kör fekete, és szimmetrikus az ábra függőleges tengelyére?* *(7 pont)*

Megoldás. *a*) A 25 kört összesen 2^{25}-féleképp színezhetjük. Mivel nem lehet egyenlő a fekete és fehér körök száma, és ugyanannyi olyan eset van, amelyben több a fehér, mint amelyben több a fekete, az utóbbi lehetőségek száma az összesnek a fele, azaz 2^{24}.

b) Tekintsük először a függőleges tengelyre szimmetrikus megoldásokat. Szabadon színezhetjük a tengely köreit és a tőle balra eső köröket – a jobboldali körök színét ez már meghatározza. Mivel 15 körről dönthetünk szabadon, a lehetőségek száma 2^{15}.

Ugyanennyi olyan színezés van, ami a vízszintes tengelyre szimmetrikus.

Azok a színezések, amelyek mindkét tengelyre szimmetrikusak, úgy állíthatók elő, hogy szabadon színezzük a valamelyik sarokban lévő 3×3-as részt, majd ebből már következik a többi kör színe – ez tehát 2^9 lehetőség.

Összesítve: a legalább az egyik tengelyre szimmetrikus megoldások száma $2 \cdot 2^{15} - 2^9$.

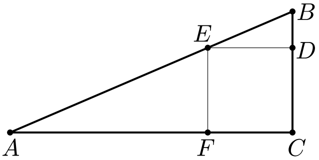
c) A tengelyen kívül eső fekete körök egyenlően oszlanak meg a bal- és a jobboldalon, ezért a tengelyen páratlan számú fekete körnek kell lennie.

Középen 1, baloldalt 3 fekete kör: $5 \cdot \binom{10}{3} = 600$ lehetőség.

Középen 3, baloldalt 2 fekete kör: $\binom{5}{3} \cdot \binom{10}{2} = 450$ lehetőség.

Középen 5, baloldalt 1 fekete kör: $1 \cdot 10 = 10$ lehetőség.

Összesen tehát 1060 ilyen színezés lehetséges.



7. *Az ABC derékszögű háromszög befogói $AC = 7$ egység, $BC = 3$ egység. A háromszögbe az ábrán látható módon négyzetet írtunk.*

a) *Milyen hosszú a négyzet oldala?* (*4 pont*)

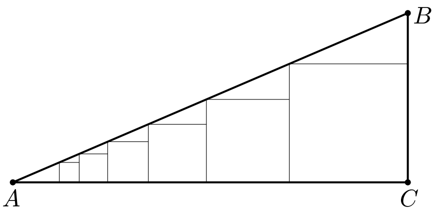
Az AFE derékszögű háromszögbe ugyanilyen módon újabb négyzetet írunk, majd az ekkor keletkezett újabb, A csúccsal rendelkező derékszögű háromszögbe újabb négyzetet stb.

b) *Milyen hosszú a hatodik négyzet oldala?* (*4 pont*)

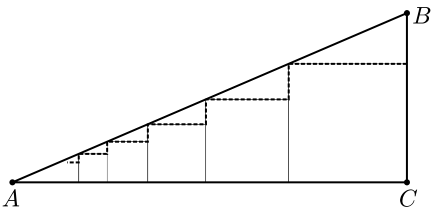
c) *Tovább folytatva az eljárást, összesen hány négyzet oldala lesz nagyobb, mint* 0,0001? (*4 pont*)

d) *Mekkora a négyzetek „fölött" (DBE mintájára) keletkező végtelen sok derékszögű háromszög területének összege?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az *5. ábrán* látható derékszögű háromszögek hasonlóak, mert megfelelő szögeik egyenlők. A négyzet oldalát x-szel jelölve $(3 - x) : x = 3 : 7$, ebből $x = 2{,}1$.



5. ábra



6. ábra

b) Az AFE háromszögbe írható négyzet oldala úgy aránylik EF-hez, mint az első négyzet oldala BC-hez, azaz $2{,}1 : 3 = 0{,}7$. Hasonlóképpen mindegyik négyzet oldala 0,7-szerese az előzőnek. A hatodik négyzet oldala tehát $3 \cdot 0{,}7^6 \approx 0{,}353$.

c) A $3 \cdot 0{,}7^n > 0{,}0001$ egyenlőtlenség megoldása $n < \lg(0{,}0001/3) : \lg 0{,}7 \approx 28{,}9$.

Vagyis 28 négyzet oldala nagyobb 0,0001-nél.

d) A DBE háromszög területe $2{,}1 \cdot 0{,}9 : 2 = 0{,}945$. A háromszögek területe végtelen mértani sort alkot, melynek első tagja 0,945, hányadosa 0,49 (a hasonlóság arányának négyzete, *6. ábra*). A mértani sor összegképletéből az együttes terület $\approx 1{,}85$ egység.

8. *a*) *Egy várfal nyugat-keleti irányú egyenes szakaszán négy kisméretű bástya áll, sorrendben A, B, C és D. Az A és a D bástya az egyenes fal két végén helyezkedik el. Egy, az A bástyától pontosan északi irányban található megfigyelőpontból az AB szakasz*

31°-os, a BC szakasz 17°-os, a CD szakasz pedig 14°-os szögben látszik. A bástyák közötti távolságok közül csak a BC távolságot ismerjük, ez 200 méter. *Mekkora az AB és a CD távolság? Készítsünk ábrát. Az eredményeket* 10 m *pontossággal adjuk meg.* (*7 pont*)

b) Egy egyenlőszárú háromszög szárhoz tartozó súlyvonala az alappal 20°-os szöget zár be. Mekkorák a háromszög szögei? (*9 pont*)

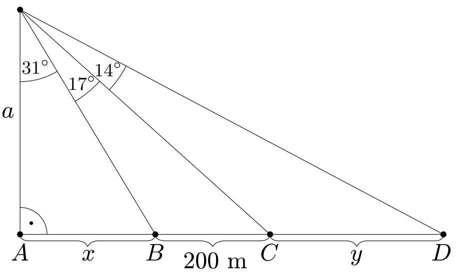
Megoldás. A *7. ábra* jelöléseit használva $x = a \cdot \operatorname{tg} 31^\circ$, $x + 200 = a \cdot \operatorname{tg} 48^\circ$.

Az egyenletrendszert megoldva $a = 392{,}3$ m és $x = 235{,}7$ m adódik.

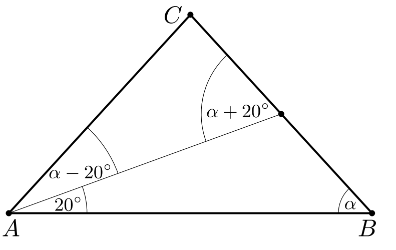
$$235{,}7 + 200 + y = 392{,}3 \operatorname{tg} 62^\circ,$$

ebből $y = 302{,}1$ m.

Tehát $AB \approx 240$ méter, $CD \approx 300$ méter.



7. ábra



8. ábra

b) A *8. ábrára* a szinusztételt felírva:

$$\frac{\sin(\alpha + 20^\circ)}{\sin(\alpha - 20^\circ)} = \frac{2}{1}.$$

Rendezve és addíciós tételeket alkalmazva:

$$\sin\alpha\cos 20^\circ + \cos\alpha\sin 20^\circ = 2(\sin\alpha\cos 20^\circ - \cos\alpha\sin 20^\circ).$$

Rendezve, majd kihasználva, hogy most $\cos\alpha \neq 0$:

$$3\cos\alpha\sin 20^\circ = \sin\alpha\cos 20^\circ,$$

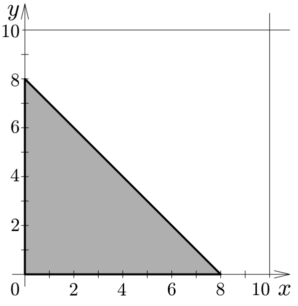
$$3\operatorname{tg} 20^\circ = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ebből $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}092$, $\alpha = 47{,}52^\circ$ és $180^\circ - 2\alpha = 84{,}96^\circ$.

9. *Két, véletlenszám-generátor segítségével előállított* 0 *és* 10 *közötti számot jelöljünk x-szel és y-nal. Adjuk meg, mekkora az alábbi események valószínűsége:*

$$A:\ x + y \leqslant 8; \quad B:\ x^2 + y^2 + 49 \leqslant 10(x + y); \quad C:\ 20y \geqslant x^2.$$ (*16 pont*)

Megoldás. Tekintsük az $(x;y)$ számpárhoz tartozó pontot a derékszögű koordinátarendszerben. Ez a pont a koordinátatengelyek, valamint az $x=10$ és $y=10$ egyenesek által határolt négyzet valamelyik pontja.

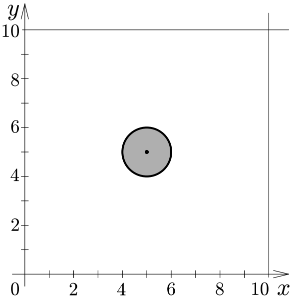


9. ábra

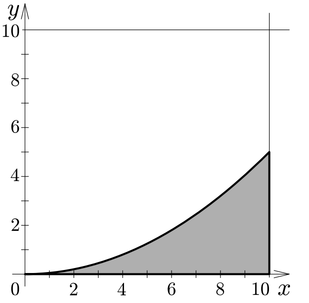
Mindegyik eseménynek megfeleltetjük a hozzá tartozó számpárokkal jelölt pontok halmazát. Az események valószínűsége kiszámítható, mint ezen területtel rendelkező alakzatok és a négyzet területének hányadosa (geometriai valószínűség.) A négyzet területe 100 egység.

Az A esemény akkor teljesül, ha $y \leqslant -x+8$, ez pedig a négyzet pontjai közül a sötétre színezett háromszög pontjaira igaz (*9. ábra*). A háromszög területe 32 egység, ebből az A esemény valószínűsége 0,32.

A B eseményhez tartozó egyenlőtlenséget átrendezve az $(x-5)^2+(y-5)^2 \leqslant 1$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ennek pedig annak a körlemeznek a pontjai tesznek eleget, melynek sugara 1, középpontja az $(5;5)$ pont (*10. ábra*). A kör területe π, a valószínűség $\pi/100 \approx 0{,}0314$.



10. ábra



11. ábra

A C esemény feltétele átrendezve $y \geqslant \frac{x^2}{20}$. C komplementere az $y < \frac{x^2}{20}$ egyenlőtlenségnek megfelelő ponthalmaz, vagyis az $f(x) = \frac{x^2}{20}$ függvény grafikonja alatti terület a $[0;10]$ intervallumon (*11. ábra*). (Ez a síkidom teljes egészében a négyzetben van, mert a függvény maximuma ezen az intervallumon $\frac{10^2}{20} = 5 < 10$.)

A grafikon alatti terület

$$\int_0^{10} \frac{x^2}{20}\,\mathrm{d}x = \frac{50}{3} \approx 16{,}67,$$

így C komplementerének valószínűsége 0,1667. Ebből C valószínűsége 0,8333.

(*Megjegyzés:* „a 0 és 10 közötti szám” kifejezés nem pontos, nem tudjuk, hogy a határok beleértendők-e. Ennek azonban a terület szempontjából nincs jelentősége.)

Deák Anna
Budapest