KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

68. évfolyam 1. szám Budapest, 2018. január

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Császár Ákos

(1924–2017)

Lapzárta után kaptuk a hírt, hogy elhunyt Császár Ákos akadémikus, a MATFUND Alapítvány egyik alapítója, a Bolyai Társulat egykori főtitkára, elnöke, majd tiszteletbeli elnöke, az ELTE professor emeritusa, az általános topológia nemzetközileg elismert szaktekintélye. Nekrológját az MTA honlapján* olvashatjuk.

Szerkesztőség

Rácsok és csoportok 1.

Egy olimpiai versenyfeladat ürügyén

1. Bevezetés

Ez a cikk nem könnyű olvasmány. Meg szeretnénk mutatni, hogy a mélyebb matematikai háttér hogyan segíthet egy probléma elemzésében. Ehhez képet kell adnunk magáról a háttérről, ami nem egyszerű, mert ezek a fogalmak és tételek matematikai érettséget igényelnek, tipikusan az egyetemi tananyagban szerepelnek. Egy olimpiai feladat jó alkalmat kínál az első randevúra, még ha a komolyabb ismerkedés későbbre marad is. A 2017-es Matematikai Diákolimpia hatodik feladata a következő volt.

1.1. feladat. *Egy egész számokból álló (x, y) rendezett párt primitív rácspontnak nevezünk, ha x és y legnagyobb közös osztója 1. Ha adott primitív rácspontok egy véges S halmaza, bizonyítsuk be, hogy van olyan n pozitív egész, és vannak olyan $z_0, z_1, \ldots, z_n$ egészek, hogy minden (x, y) S-beli pontra teljesül*

$$z_0x^n + z_1x^{n-1}y + z_2x^{n-2}y^2 + \ldots + z_{n-1}xy^{n-1} + z_ny^n = 1.$$

A sokféle lehetséges megközelítés egyike a következő. Legyenek az S halmaz elemei az $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$ párok. Tekintsük a következő oszlopvektorokat:

$$\mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} a_1^j b_1^{n-j} \\ \ldots \\ a_k^j b_k^{n-j} \end{bmatrix} \qquad j = 0, \ldots, n.$$

*`http://mta.hu/mta_hirei/elhunyt-csaszar-akos-matematikus-az-mta-rendes-tagja-108334`.

A kérdés az, hogy előáll-e a konstans 1 oszlopvektor a $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok egész együtthatós lineáris kombinációjaként. (Az n számot mi választhatjuk.)

Fölmerülnek további kérdések is. Mely n számok lesznek jók? Miért pont a konstans 1 vektor szerepel a jobb oldalon? Meg tudjuk-e határozni, hogy általában mely vektorok állnak elő ilyen lineáris kombinációként? Előfordulhat-e, hogy az összes egész koordinátájú vektor előáll? Az egész vektorok hány százaléka áll így elő?

Ezek a lineáris kombinációk egy *rácsot* alkotnak. Az alábbiakban algebrai és geometriai módszerekkel is vizsgáljuk majd a hasonló rácsokat, és megválaszoljuk a fenti kérdéseket. Speciálisan a feladat állítását is belátjuk.

A rácsokat rengeteg helyen alkalmazzák a matematikában. A legsűrűbb faültetés feladata háromszögráccsal oldható meg. Minkowski rácsgeometriai tételének egy számelméleti alkalmazását mi is fölidézzük a 6. szakaszban. Ugyancsak rácsokat használ a Lenstra–Lenstra–Lovász algoritmus (lásd [5]) polinomok szorzatra bontására. A sík rácsairól Erdős Pál és Surányi János [1] könyvében olvashatunk bevezetőt.

Köszönetet mondunk *Gróf Andreának* és *Moussong Gábornak* értékes tanácsaikért.

2. Az előismeretek összefoglalása

Számelméletből Freud Róbert és Gyarmati Edit [3] tankönyvét érdemes tanulmányozni. Feltételezzük, hogy az Olvasó tud bánni kongruenciákkal, ismeri a mod m számolás fogalmát, az Euler–Fermat-tételt, és azt a tényt, hogy egész számok legnagyobb közös osztója fölírható e számok egész együtthatós lineáris kombinációjaként.

2.1. Lineáris algebra. Ismertnek tételezzük föl Freud Róbert [2] tankönyvének első fejezetei alapján a valós számok fölötti vektorok, mátrixok és determinánsok alaptulajdonságait (lineáris függetlenség, rang, bázis, előjeles aldeterminánsok, kifejtés és ferde kifejtés, mátrixműveletek, az inverz mátrix képlete, Vandermonde-determináns). A determinánsokra vonatkozó eredmények akkor is érvényesek, ha a determináns elemei nem számok, hanem például polinomok, hiszen minden számolás ugyanaz, és polinomokból törteket is képezhetünk. Ha p prímszám, akkor mod p számolva is érvényben maradnak a determinánsról tanult állítások.

Most determinánsok Laplace-kifejtését, és a Cauchy–Binet formulákat idézzük föl. A bizonyítások elolvashatók Kiss Emil honlapján*. (Ugyanebben a dokumentumban mátrixok invertálására is található egy gyors, eliminációs eljárás.) Legyen M egy $k \times n$-es mátrix. Az M egy $r \times r$-es aldeterminánsán azt értjük, hogy kiválasztunk r sort és oszlopot, és vesszük az ezek metszéspontjaiban álló elemek alkotta mátrix determinánsát. Ha a sorok, illetve oszlopok indexei $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ és $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$, akkor a kapott aldetermináns jele $M_{I,J}$, a hozzá tartozó előjel $\operatorname{sg}(I, J) = (-1)^{i_1+\ldots+i_r+j_1+\ldots+j_r}$.

* `ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/wp-content/uploads/2014/11/inv_CB_Laplace.pdf`.

2.1. tétel. *Legyen M egy $k \times k$-as mátrix. Rögzítsük az r elemű $I \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ halmazt tetszőlegesen, és jelölje I' az I komplementumát az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmazra nézve. Ekkor az M determinánsának* Laplace-féle kifejtése *(ahol az összegzés az oszlopok r elemű J részhalmazaira terjed ki, tehát $\binom{k}{r}$ tag van):*

$$\det(M) = \sum_J \operatorname{sg}(I, J) M_{I,J} M_{I',J'}.$$

2.2. tétel. *Legyen az M mátrix $m \times k$-as, az N pedig $k \times n$-es (hogy összeszorozhatóak legyenek) és $K = MN$. Rögzítsük az r elemű $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ és $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ részhalmazokat. Ekkor a* Cauchy–Binet-formula *a következő* ($|S|$ *az S elemszáma*) :

$$K_{I,J} = \sum_{S \subseteq \{1,2,\ldots,k\},\ |S|=r} M_{I,S} N_{S,J}.$$

2.2. Mátrix normálalakja. A [4] könyv 7.4.5. lemmáját ismertetjük. Legyen M egész elemű mátrix, melynek k sora és n oszlopa van, azaz $M \in \mathbb{Z}^{k \times n}$. A következő lépéseket engedjük meg.

(1) Egy oszlopból egy másik oszlop egész számszorosának levonása.

(2) Két oszlop cseréje.

(3) Egy sorból egy másik sor egész számszorosának levonása.

(4) Két sor cseréje.

2.3. tétel. *A fenti négyféle átalakítás alkalmas sorozatával M a következő* normálalakra *hozható. A mátrix főátlójában álló $s_1, s_2, \ldots, s_k$ számok sorban egymás osztói (lehetséges, hogy egy idő után mindegyik nulla), és a mátrix többi eleme nulla. Az s_i számok előjel erejéig egyértelműen meg vannak határozva, és fölthető, hogy $s_i \geqslant 0$.*

Ha $n < k$, akkor legyen $s_{n+1} = \ldots = s_k = 0$, azaz a főátlót kiegészítjük nulla elemekkel. A bizonyítás ki is található, maradékos osztással kell kombinálni a Gauss-eliminációt, és arra törekedni, hogy a mátrix bal fölső sarkába kerülő szám az összes többinek osztója legyen. Az egyértelműségi állítást most bebizonyítjuk.

2.4. definíció. Az M mátrix m-edik *determinánsosztója* az $m \times m$ méretű aldeterminánsainak a legnagyobb (nemnegatív) közös osztója, jele Δ_m. Legyen $\Delta_0 = 1$. (Nyilván M (determináns)rangja a legnagyobb olyan r, melyre $\Delta_r \neq 0$.)

2.5. lemma. *Ha $m \leqslant \ell$, akkor $\Delta_m \mid \Delta_\ell$.*

Bizonyítás. A Laplace-kifejtés (2.1. tétel) miatt mindegyik $\ell \times \ell$ méretű aldetermináns előáll $m \times m$-es aldeterminánsok egész együtthatós lineáris kombinációjaként. $\square$

2.6. lemma. *A* 2.3. *tételbeli átalakítások a determinánsosztókon nem változtatnak.*

Bizonyítás. A cserére vonatkozó állítás nyilvánvaló. Adjuk az i-edik sor t-szeresét a j-edik sorhoz, az így módosított mátrixot jelölje M'. Csak azok az $m \times m$-es aldeterminánsok változhatnak meg, amelyeken a j-edik sor áthalad, de az i-edik sor nem. Legyen N ilyen aldeterminánsa M-nek, N' a módosított M' mátrix megfelelő aldeterminánsa, K pedig az a determináns, amit N-ből úgy kapunk, hogy a j-edik sorába beírjuk az M mátrix i-edik sorának a megfelelő oszlopokba eső részét.

A K sorait átrendezhetjük úgy, hogy M egy $m \times m$-es aldeterminánsát kapjuk. Ez maximum előjelváltással jár, tehát ha Δ jelöli az M mátrix m-edik determinánsosztóját, akkor $\Delta \mid \det(N), \det(K)$. Ezért $\Delta \mid \det(N') = \det(N) + t\det(K)$. Beláttuk tehát, hogy az M' mátrix m-edik Δ' determinánsosztója többese Δ-nak. Mivel az átalakítást visszafelé végezve ugyanolyan típusú átalakítást kapunk (a j-edik sorhoz az i-edik sor $-t$-szeresét kell adni ahhoz, hogy M'-ből M-et kapjuk), ezért $\Delta = \Delta'$. □

Egy normálalakú mátrix m-edik determinánsosztója nyilvánvalóan $s_1 s_2 \dots s_m$. Így $s_m = \Delta_m / \Delta_{m-1}$, ahol Δ_m az eredeti M mátrix m-edik determinánsosztója. Ez a képlet működik, amíg $\Delta_{m-1} \neq 0$. Ha r a legnagyobb, melyre $\Delta_r \neq 0$ (azaz M rangja r), akkor a képlet szerint $s_{r+1} = 0$, és így $i > r$ esetén is $s_i = 0$, hiszen $s_{r+1} \mid s_i$.

3. Rácsok bázisa és indexe

3.1. Két példa. A kockás papíron látható „rács” az egész koordinátájú pontok A halmaza a síkon. Az origóból a rácspontokba mutató vektorok *csoportot* alkotnak. Ez azt jelenti, hogy bármely két rácsvektor összege és különbsége is benne van a rácsban. A rács *diszkrét* is: korlátos területre csak véges sok rácspont esik. A $\mathbf{b}_1 = (0,1)$ és $\mathbf{b}_2 = (1,0)$ vektorok *bázist* alkotnak: mindegyik rácsvektor egyértelműen előáll $z_1\mathbf{b}_1 + z_2\mathbf{b}_2$ alakban, ahol z_i egész számok (azaz a bázisvektorok egész együtthatós *lineáris kombinációjaként*). Bázist alkotnak a $\mathbf{c}_1 = (1,1)$ és $\mathbf{c}_2 = (0,1)$ vektorok is.

Forgassuk el az A rácsot az origó körül 45 fokkal, és nyújtsuk $\sqrt{2}$-szörösére. Ez is egy egész pontokból álló B rács (azaz B *részrácsa* A-nak), azokból a pontokból áll, melyeknek vagy mindkét koordinátája páros, vagy mindkét koordinátája páratlan. B is zárt az összeadásra és a kivonásra, azaz *részcsoport* A-ban. Ha B minden eleméhez hozzáadjuk a $\mathbf{v} = (0,1)$ vektort (az így eltolt halmazt jelölje $\mathbf{v} + B$, ez egy *mellékosztály* A-ban B szerint), akkor az A-ra vett komplementer halmazt kapjuk, azokat a pontokat, melyeknek egyik koordinátája páros, a másik páratlan. Ha $\mathbf{w} \in B$, akkor $\mathbf{w} + B = B$, tehát B maga is mellékosztály. Az A rács tehát két B szerinti mellékosztály diszjunkt uniója. Azt fogjuk mondani, hogy B *indexe* A-ban 2. A B rácsban bázist alkot $\mathbf{d}_1 = (1,1)$ és $\mathbf{d}_2 = (1,-1)$, de $\mathbf{e}_1 = (1,1)$ és $\mathbf{e}_2 = (0,2)$ is.

Vizsgáljuk meg, hogy e két rácsból hány rácspont esik egy adott területre, mondjuk a $(0,0)$, $(0,n)$, $(n,0)$, (n,n) csúcsú négyzetbe. E négyzetet azon (α_1, α_2) pontok halmazának képzeljük, melyekre $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 < n$ (azaz a négy csúcsból pontosan egyet tartalmaz). Az ide eső rácspontok száma tehát n^2, ami pontosan a négyzet területe. Ez nem is meglepő, hiszen a nagy négyzetet kiparkettázhatjuk n^2 egységnégyzettel (ezeket is úgy képzeljük, hogy a határuknak csak a bal és az alsó része tartozik hozzájuk). Minden ilyen kis négyzetben pontosan egy rácspont van.

A parkettázást elvégezhetjük a $\mathbf{c}_1$ és $\mathbf{c}_2$ vektorok által kifeszített P paralelogramma eltoltjaival is. Ennek a csúcsai $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ és $(1,2)$. Ismét úgy tekintjük, hogy P az $\alpha_1\mathbf{c}_1 + \alpha_2\mathbf{c}_2$ pontok halmaza, ahol $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 < 1$. A P eltoltjai is hézagmentesen lefedik a síkot, és mindegyik eltolt pontosan egy rácspontot tartalmaz. A nagy négyzetből néhol kilógnak azok az eltoltak, amik a határhoz közel vannak, de könnyű látni, hogy a kilógó kis paralelogrammák száma elhanyagolható a többiéhez képest. Azoknak az eltoltaknak a száma, amelyek teljesen a nagy négyzetbe esnek, n^2-tel osztva 1-hez tart, ha n tart a végtelenhez. Ebből következik, hogy a kis paralelogramma területe 1 (ami persze nyilvánvaló, hiszen alapja és magassága is 1).

Ha a B ráccsal végezzük el ezt a számolást, akkor azt kapjuk, hogy a nagy négyzetben közel $n^2/2$ rácspont van, annak megfelelően, hogy a $(0,0)$, $(1,1)$ $(1,-1)$, $(2,0)$ négyzetnek és a $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(1,3)$ paralelogrammának is 2 a területe. Mindkét paralelogrammába mindkét B szerinti mellékosztálynak egy-egy pontja esik. A két „alap”-paralelogramma területének hányadosa B indexe A-ban.

3.2. Alap-parallelotóp. Az eddigi példákat általánosítjuk. Az $\mathbb{R}^k$ tér P pontjait azonosítjuk az origóból a P-be vezető helyvektorral, azaz $\mathbb{R}^k$ oszlopvektoraival.

Az $\mathbb{R}^k$ összeadásra és kivonásra zárt, nem üres A részhalmazait *csoportnak* hívjuk (a csoport algebrai fogalma ennél általánosabb). Ha A minden elemének minden valós számszorosát is tartalmazza, akkor neve (valós) *altér.* Ilyen például egy origón átmenő egyenes vagy sík a térben. Az A *diszkrét,* ha $\mathbb{R}^k$ minden gömbje A-nak csak véges sok pontját tartalmazza. Az $\mathbb{R}^k$ *rácsának* az olyan diszkrét csoportokat nevezzük, melyekben van k lineárisan független vektor.

Altérre úgy kaphatunk példát, hogy veszünk $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorokat, és tekintjük az összes $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n$ alakú lineáris kombinációk halmazát, ahol λ_i tetszőleges valós számok; ez a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ által *generált* altér. Ha mindegyik λ_i egész szám, akkor az általuk generált csoportot kapjuk. *Ha tehát generált altérről beszélünk, akkor valós együtthatós lineáris kombinációkra gondolunk, ha generált csoportról vagy rácsról, akkor az együtthatók egészek.* Ha vektoraink függetlenek is (ekkor szükségképpen $n \leqslant k$), akkor a kombinációk együtthatói egyértelműen meghatározottak, és az altér, illetve a csoport *bázisát* kapjuk. A bázis elemszáma az altér *dimenziója,* illetve a csoport *rangja.* Belátjuk majd, hogy minden rácsnak van bázisa.

3.1. definíció. Legyenek $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ függetlenek. Az általuk *kifeszített P parallelotóp* az $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k$ alakú pontok halmaza, ahol $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén $0 \leqslant \alpha_i < 1$. Ez a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ által generált B rács (egyik) *alap-parallelotópja.* Tehát az alap-parallelotópokat B egy-egy bázisának vektorai feszítik ki.

Magasabb dimenzióban a térfogat fogalmát intuitív módon használjuk. A parallelotópok térfogata alapszor magasság, ahol az alap „területe” az eggyel alacsonyabb dimenziós térfogatot jelenti. A k-dimenziós térfogat fogalmának fölépítése történhet determinánsok segítségével, lásd [2], 9.8. szakasz. Mindenképpen igaz a következő.

3.2. tétel. *A* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^k$ *vektorok által kifeszített parallelotóp térfogata egyenlő a* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$ *mátrix determinánsának abszolút értékével. (E determináns előjele a* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *rendszer úgynevezett irányítását adja meg.)*

Legyen P a B rács egyik alap-parallelotópja. A P-nek a $\mathbf{v} \in B$ vektorokkal vett $\mathbf{v} + P$ eltoltjai hézagmentesen kitöltik az $\mathbb{R}^k$ teret. Minden ilyen $\mathbf{v} + P$ eltoltban pontosan egy eleme van B-nek: maga a $\mathbf{v}$ vektor. Ezért az előző szakaszban, a konkrét példák esetében látott gondolatmenet általában azt adja, hogy ha veszünk egy R sugarú G gömböt, akkor a G térfogata elosztva a G-be eső B-beli pontok számával a P parallelotóp térfogatához tart, midőn R tart a végtelenhez.

Legyen most A tetszőleges olyan rács, amely B-t tartalmazza. Bármely $\mathbf{v} \in B$ esetén a $\mathbf{v}$ vektorral való eltolás az A és B rácsokat önmagukba viszi. Ezért ha a P parallelotópba az A rácsnak d pontja esik (a d véges szám, hiszen A diszkrét), akkor ugyanez igaz mindegyik $\mathbf{v} + P$ eltoltra is. Emiatt ha a fenti G gömb térfogatát a G-be eső A-beli rácspontok számával osztjuk, akkor ez a hányados a P parallelotóp térfogatának $1/d$-szereséhez tart, midőn R tart a végtelenhez.

3.3. állítás. *Ha* $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in A$*, akkor a* $\mathbf{w} + B$ *halmazt (az egyik)* B *szerinti* mellékosztálynak *hívjuk. Az* $\mathbf{u} + B$ *és* $\mathbf{w} + B$ *mellékosztályok vagy egyenlők, vagy diszjunktak; akkor egyenlők, ha* $\mathbf{u} - \mathbf{w} \in B$*. Ezért* A *a* B *szerinti mellékosztályok (diszjunkt) uniója. A mellékosztályok száma a* B *részcsoport* A*-beli* indexe, *jele* $|A : B|$.

A könnyű bizonyítást az Olvasóra hagyjuk. Az általános, csoportokra vonatkozó eset bizonyítása megtalálható a [4] könyv 4.4. szakaszában.

A 3.1. definíció jelöléseit használva

$$\mathbf{u} = \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_k \mathbf{v}_k \quad \text{és} \quad \mathbf{w} = \delta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \delta_k \mathbf{v}_k$$

akkor esnek ugyanabba a B szerinti mellékosztályba, ha $\gamma_i - \delta_i$ egészek. Ezért $\mathbf{u} + B$-nek egyetlen $\mathbf{w}$ vektora esik P-be: amikor δ_i a γ_i törtrésze. Azaz P minden B szerinti mellékosztályból pontosan egy vektort tartalmaz, és így $|A : B| = d$.

Ha A-nak is van bázisa, és így egy Q alap-parallelotópja is, akkor persze G térfogata elosztva a G-be eső A-beli pontok számával Q térfogatához tart. Ezért beláttuk az alábbi tétel második állítását azzal a föltevéssel, hogy A-ban és B-ben is van bázis.

3.4. tétel. *Minden rácsnak van bázisa. Ha* B *részrácsa* A*-nak, akkor* B *indexe* A*-ban a* B *és* A *alap-parallelotópjai térfogatának hányadosa (a kisebbik rácsban nagyobb ez a térfogat). Speciálisan* A *bármely két alap-parallelotópjának a térfogata egyenlő.*

Bizonyítás. A tétel első állításának bizonyításához legyen A rács és $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ független vektorok A-ban. Essen d darab A-beli pont a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ által kifeszített P parallelotópba. Ha van ezek között egy $0 \neq \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k$, akkor válasszunk egy olyan i indexet, amelyre $\alpha_i \neq 0$. A $\mathbf{v}_i$ helyére $\mathbf{v}$-t téve a kapott parallelotóp térfogata kisebb lesz, mint az eredetié volt, annak α_i-szeresére változik. Ezt érdemes a síkon vagy a térben elképzelni (a magasság α_i-szeresére csökken), de algebrailag is könnyű megmutatni determinánsok segítségével. Az eljárást folytatva egy olyan vektorrendszert találunk A-ban, amelyre már $d = 1$, vagyis a P-be eső egyetlen A-beli pont az origó. De akkor a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ generálta B rács maga A. Valóban, A minden $\mathbf{u}$ eleme beleesik valamelyik $\mathbf{v} + P$ eltoltba, ahol $\mathbf{v} \in B$. Ebben az eltoltban az egyetlen A-beli pont az $\mathbf{u}$, ezért $\mathbf{u} = \mathbf{v} \in B$. $\square$

3.5. feladat. *Legyen $d = |A : B|$. Igazoljuk, hogy minden $\mathbf{u} \in A$-ra $d\mathbf{u} \in B$.*

Útmutatás. Vegyünk ki mindegyik B szerinti mellékosztályból egy-egy $\mathbf{u}_i$ vektort. Ekkor $\mathbf{u} + \mathbf{u}_i$ is csupa különböző mellékosztályban van, tehát mindegyik mellékosztályba egy ilyen vektor esik. Ezért $\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_d$ és $(\mathbf{u}+\mathbf{u}_1) + \ldots + (\mathbf{u}+\mathbf{u}_d)$ ugyanabban a mellékosztályban vannak. Különbségük $d\mathbf{u}$. $\square$

3.6. feladat. *Legyenek $B \subseteq A$ részrácsai $\mathbb{Z}^k$-nak. Mutassuk meg, hogy a $|\mathbb{Z}^k : A|$ index osztja a $|\mathbb{Z}^k : B|$ indexet.*

Útmutatás. B alap-parallelotópjának mindegyik eltoltjába A-nak $|A : B|$ darab pontja esik. Ezért minden elég nagy gömbben A-nak körülbelül $|A : B|$-szer annyi pontja van, mint B-nek. Ugyanez A és $\mathbb{Z}^k$, valamint B és $\mathbb{Z}^k$ viszonylatában is elmondható. $\square$

Ha az Olvasó e két feladat mélyebb algebrai hátterére kíváncsi, lapozza föl a [4] könyv negyedik fejezetében Lagrange tételét és a faktorcsoport fogalmát.

3.3. Részrács bázisa. A 3.1. szakaszban vizsgált mindkét példában kétféle alap-paralelogrammát láttunk. Választhatunk úgy, hogy a B rács alap-paralelogrammája kiparkettázható legyen az A rács alap-paralelogrammájának eltoltjaival: vegyük B-ben a $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(1,3)$ csúcsú paralelogrammát, A-ban pedig ennek az „alsó felét”, a $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$ csúcsút. Vagyis A-ban a $\mathbf{c}_1 = (1,1)$ és $\mathbf{c}_2 = (0,1)$ bázist, B-ben a $\mathbf{c}_1$ és $2\mathbf{c}_2$ bázist tekintjük. Ebből is azonnal látszik, hogy az $|A : B|$ index 2. Igen erős tétel, a későbbiek alapja, hogy ezt általában is meg lehet tenni.

3.7. tétel. *Ha B részrácsa A-nak, akkor választhatunk olyan P és Q alap-parallelotópot A-ban, illetve B-ben, hogy P eltoltjaival Q kiparkettázható. Azaz van olyan $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ bázisa A-nak, hogy alkalmas $s_1, s_2, \ldots, s_k$ pozitív egészekre $s_1\mathbf{c}_1, \ldots, s_k\mathbf{c}_k$ bázis B-ben. Ekkor $|A : B| = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$. A két bázis úgy is választható, hogy az $s_1 \mid s_2 \mid \ldots \mid s_k$ oszthatóság is teljesüljön.*

Geometriailag világos, hogy $|A : B| = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$. Az algebrai bizonyításhoz vegyük észre, hogy $x_1\mathbf{c}_1 + \ldots + x_k\mathbf{c}_k$ és $y_1\mathbf{c}_1 + \ldots + y_k\mathbf{c}_k$ akkor vannak ugyanabban a mellékosztályban B szerint, ha $x_j \equiv y_j \ (s_j)$ minden j-re. Ezért mindegyik mellékosztály pontosan egyet tartalmaz azon $z_1\mathbf{c}_1 + \ldots + z_k\mathbf{c}_k$ vektorok közül, melyekre $0 \leqslant z_j < s_j$.

A $\mathbf{c}_i$ bázis létezését általánosabban bizonyítjuk. Láttuk, hogy B-nek van bázisa, azaz k vektorral generálható. Az általánosítás az, hogy több generátort is megengedünk, és azt sem tesszük föl, hogy van közöttük k független.

Ha A-nak vesszük egy bázisát, akkor B elemeit eleve ezek lineáris kombinációiként írhatjuk föl. Ezért nem veszítünk az általánosságból, ha az $A = \mathbb{Z}^k$ esetet tekintjük.

3.8. tétel. *Legyen $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{Z}^k$ és B az általuk generált csoport. Hozzuk normálalakra az $M = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ mátrixot a 2.3. tétel értelmében, és jelölje $s_1 \mid s_2 \mid \ldots \mid s_k$ a főátlóban szereplő számokat. Tudjuk, hogy az M mátrix r-edik determinánsosztója $s_1 \cdot \ldots \cdot s_r$. Ha M rangja r, akkor a következők teljesülnek.*

(1) *Van $\mathbb{Z}^k$-nak olyan $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ bázisa, hogy $s_1\mathbf{c}_1, \ldots, s_r\mathbf{c}_r$ bázis B-ben.*

(2) *Ha $r = k$, akkor B rács és $|\mathbb{Z}^k : B| = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$.*

Bizonyítás. Kiindulunk a B csoport $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n$ generátorrendszeréből és $\mathbb{Z}^k$-nak a „szokásos" $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$ bázisából, amelyben az $\mathbf{e}_i$ vektor i-edik koordinátája 1, a többi nulla. Az M-et normálalakra hozó négyféle lépés során változtatjuk majd a $\mathbf{w}_j$ generátorrendszert és a $\mathbf{b}_i$ bázist is, úgy, hogy B ne változzon.

Egy közbülső állapotban jelölje a mátrix i-edik sorának j-edik elemét n_{ij}. A kinduló állapotban nyilván $\mathbf{w}_j = n_{1j}\mathbf{b}_1 + \ldots + n_{kj}\mathbf{b}_k$. Minden lépés végrehajtása után ezzel a képlettel fogjuk definiálni az új $\mathbf{w}_j$ generátorrendszert.

Ha kicseréljük a j-edik és a j'-edik oszlopot, akkor $\mathbf{w}_j$ és $\mathbf{w}_{j'}$ helyet cserél, de B nem változik. Ha az i-edik és i'-edik sort cseréljük, de kicseréljük a $\mathbf{b}_i$ és $\mathbf{b}_{i'}$ bázisvektorokat is, akkor egyik $\mathbf{w}_j$ sem változik, és így B sem.

Ha a j'-edik oszlop t-szeresét adjuk a j-edik oszlophoz, akkor $\mathbf{w}_j$ helyén $\mathbf{w}_j + t\mathbf{w}_{j'}$ fog állni. Mivel $\mathbf{w}_j + t\mathbf{w}_{j'} \in B$, az új vektorok B-nek egy részét generálják. De ez az átalakítás megfordítható (az új j-edik oszlopból kell kivonni a j'-edik oszlop t-szeresét), ezért B most sem változik.

Végül adjuk az i'-edik sor t-szeresét az i-edik sorhoz. Az egyszerűbb tipográfia érdekében legyen $i = 1$ és $i' = 2$. Ekkor

$$\mathbf{w}_j = n_{1j}\mathbf{b}_1 + n_{2j}\mathbf{b}_2 + \ldots + n_{kj}\mathbf{b}_k = (n_{1j} + tn_{2j})\mathbf{b}_1 + n_{2j}(\mathbf{b}_2 - t\mathbf{b}_1) + \ldots + n_{kj}\mathbf{b}_k.$$

Ezért ha $\mathbf{b}_2$-t $(\mathbf{b}_2 - t\mathbf{b}_1)$-re változtatjuk, akkor $\mathbf{w}_j$ nem változik. Az Olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy az így kapott új rendszer is bázis $\mathbb{Z}^k$-ban (azaz független, és egész együtthatókkal fölírható vele $\mathbb{Z}^k$ minden vektora).

A végső állapotban, amikor M normálalakú, legyen $\mathbf{c}_i = \mathbf{b}_i$. Ekkor $\mathbf{w}_j = s_j\mathbf{c}_j$ ha $j \leqslant k$ és $\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$, ha $j > k$, és így az $s_j\mathbf{c}_j$ vektorok generálják B-t. A 2.6. lemma szerint menet közben nem változnak meg a determinánsosztók, és így a rang sem. Tehát az s_i számok közül az első r lesz nem nulla, és így $s_1\mathbf{c}_1, \ldots, s_r\mathbf{c}_r$ függetlenek is. □

3.9. következmény. *Legyenek $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r \in \mathbb{Z}^k$ lineárisan független vektorok $(r \geqslant 1)$ és B az általuk generált csoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(1) *$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ kiegészíthető $\mathbb{Z}^k$ egy bázisává.*

(2) *Ha $m \neq 0$ egész, $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^k$ és $m\mathbf{v} \in B$, akkor $\mathbf{v} \in B$.*

(3) *A $[\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r]$ mátrix r-edik determinánsosztója 1.*

(4) *A* $[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r]$ *mátrix alaptételbeli alakjában a főátló mindegyik eleme* 1.

Speciálisan $\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^k$ *pontosan akkor van benne* $\mathbb{Z}^k$ *egy bázisában, ha* primitív, *azaz a komponenseinek a legnagyobb közös osztója* 1.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy létezik az (1)-ben megkövetelt $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k$ bázis. Ha $\mathbf{v}=z_1\mathbf{b}_1+\ldots+z_k\mathbf{b}_k$, akkor $m\mathbf{v}$ pontosan akkor van B-ben, ha $z_j=0$ minden $j>r$ indexre. De akkor $\mathbf{v}=z_1\mathbf{b}_1+\ldots+z_r\mathbf{b}_r\in B$. Ezért (2) teljesül.

Alkalmazzuk $M=[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r]$-re az előző tételt. Ha a (2) pontban megadott feltétel teljesül, akkor $s_i\mathbf{c}_i\in B$-ből $\mathbf{c}_i\in B$, azaz $s_i=1$ következik. Az r-edik determinánsosztó $s_1\cdot\ldots\cdot s_r$, ami pontosan akkor 1, ha mindegyik $s_i=1$.

Végül, ha $i\leqslant r$ esetén $s_i=1$, akkor nemcsak $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r$, hanem $\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_r$ is bázisa B-nek. Tehát $\mathbb{Z}^k$ minden eleme $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r,\mathbf{c}_{r+1},\ldots,\mathbf{c}_k$ egész együtthatós lineáris kombinációjaként is fölírható. Ez k vektor, és ezért bázis $\mathbb{Z}^k$-ban. □

3.10. feladat. *Igazoljuk a* 3.8. *tétel segítségével, hogy ha a* $B\subseteq\mathbb{Z}^k$ *rácsban nincs primitív vektor, akkor van olyan* $m>1$ *egész, amellyel* B *minden eleme osztható.*

3.11. feladat. *Mutassuk meg a normálalak fölhasználása nélkül, hogy ha* $M\in\mathbb{Z}^{k\times n}$ *rangja* k*, akkor az* M *oszlopai által generált rács indexe* $\mathbb{Z}^k$*-ban az* M *mátrix* k*-adik determinánsosztója.*

Útmutatás. Legyen B az M oszlopai által generált rács és $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k$ bázis B-ben. Minden $\mathbf{v}\in B$ fölírható $z_1\mathbf{b}_1+\ldots+z_k\mathbf{b}_k$ alakban. Jelölje $f(\mathbf{v})$ azt az (oszlop)vektort, melynek a z_i számok a komponensei. (Az f egy úgynevezett lineáris leképezés, ami átkoordinátázza B elemeit az új bázis szerint). Nyilván $\mathbf{v}=[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k]f(\mathbf{v})$.

Az M oszlopaira f-et alkalmazva egy K mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy az M mátrix k-adik Δ determinánsosztója a K mátrix k-adik D determinánsosztójának $|d|$-szerese, ahol d a $[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k]$ mátrix determinánsa (vagyis $|d|=|\mathbb{Z}^k:B|$).

K oszlopai a teljes $\mathbb{Z}^k$ rácsot generálják, mert ha $\mathbf{w}=[z_1,\ldots,z_k]^T\in\mathbb{Z}^k$, akkor $\mathbf{v}=z_1\mathbf{b}_1+\ldots+z_k\mathbf{b}_k\in B$ fölírható M oszlopai segítségével. Ugyanez mod p is igaz minden p prímre, és ezért K-t mod p véve rangja szükségképpen k. Így van olyan $k\times k$-as aldeterminánsa, ami nem osztható p-vel, azaz $p\nmid D$. Tehát $D=1$. □

A cikk második részében az olimpiai feladat rácsát elemezzük, bemutatjuk Peter McMullen egy tételét ortogonális rácsokról, végül feladatok segítségével lehetőséget kínálunk az Olvasónak arra, hogy néhány eddigi állításra geometriai bizonyítást adjon.

Hivatkozások

[1] Erdős Pál, Surányi János: *Válogatott fejezetek a számelméletből.* Polygon Kiadó, 1996.

[2] Freud Róbert: *Lineáris Algebra.* ELTE Eötvös Kiadó, 2014.
`www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_527_LinearisAlgebra`

[3] Freud Róbert, Gyarmati Edit: *Számelmélet.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.
www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_519_Szamelmelet

[4] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába.* TypoTEX Kiadó, 2007.
www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil

[5] Radnai András: *Rácselmélet alkalmazása a számelméletben,* Szakdolgozat, ELTE, 2010.
web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mat/2010/radnai_andras.pdf

Kiss Emil és **Simányi Nándor**
e-mail: ewkiss@cs.elte.hu, simanyi@uab.edu

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

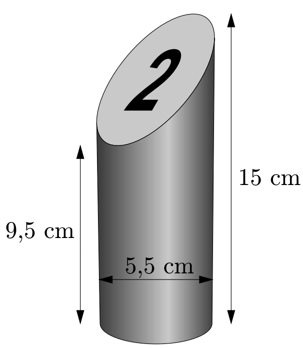
1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2^x + 5^y &= 2, \\ 8 \cdot 2^x + 3 \cdot 5^y &= 5. \end{aligned} \qquad (5\ pont)$$

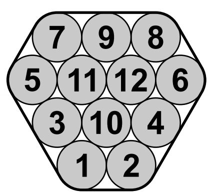
b) Oldjuk meg a $[\pi; 2\pi]$ intervallumon az alábbi egyenletet:

$$3 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x - 3 = 0. \qquad (5\ pont)$$

2. A *Mölkky* egy finn ügyességi játék, amit tizenkét darab fabábuval játszanak. A bábukat 5,5 cm átmérőjű, 15 cm magas egyenes körhenger alakú fából készítik úgy, hogy a henger tetejét az *1. ábrán* látható módon 45°-os szögben levágják, majd a bábuk tetejére 1–12-ig sorszámokat rajzolnak.



1. ábra



2. ábra

a) Mekkora egy, a játékhoz használt fabábu térfogata? (*4 pont*)

A játék kezdetén a bábukat a *2. ábrán* látható elrendezésben egy keret segítségével szorosan egymás mellé illesztik, hogy azok érintsék egymást.

b) Mekkora a keret kerülete? (*4 pont*)

A játék elején a játékosok egy dobófával (*Mölkky*-vel) próbálják feldönteni a keretben elhelyezkedő tizenkét számozott fabábut. A keretet a dobás előtt leveszik a bábukról. Az egymásra vagy a dobófára támaszkodó bábuk nem számítanak feldőltnek, a szabályosan feldőlt bábunak párhuzamosnak kell lennie a talajjal. Ennek következtében bármilyen kombinációban fel lehet dönteni a bábukat.

c) Hányféleképpen lehet egy dobásból három bábut feldönteni úgy, hogy a feldöntött bábukon szereplő számok szorzata négyzetszám legyen? (*5 pont*)

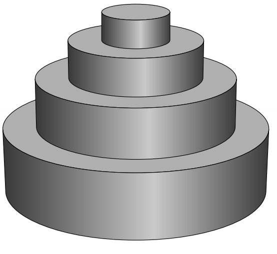
3. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben két pont: $A(1;-2)$ és $B(3;12)$.

a) Határozzuk meg az x tengely azon P pontjának koordinátáit, melyre az ABP háromszög egyenlő szárú. (*7 pont*)

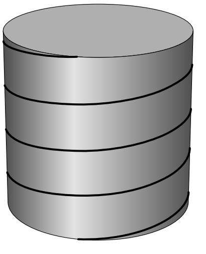
b) Számítsuk ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz. (*7 pont*)

4. A *3. ábrán* egy négyemeletes, 60 cm magas esküvői torta látható, melynek szintjei különböző magasságú és sugarú egyenes hengerek. Az egyes szintek magasságainak hosszai mértani sorozatot alkotnak.

a) Milyen magasak az egyes emeletek, ha a legfelső szint 4 cm magas, és a többi szint magasságának mérőszáma is egész szám? (*9 pont*)



3. ábra



4. ábra

Az esküvői torta 16 cm átmérőjű, 4 cm magas legfelső szintjét a *4. ábrán* látható módon díszítéssel látják el.

b) Milyen hosszú a legfelső szintre tekert díszítőcsík, ha a szélességétől eltekintünk? (*5 pont*)

II. rész

5. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = 5 - 2x \quad \text{és} \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

a) Adjuk meg a $g \circ f$ függvény zérushelyeit. (*4 pont*) *b*) Számítsuk ki a $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{1} \big(g(x)+1\big)\,\mathrm{d}x$ határozott integrált. (*4 pont*)

c) Írjuk fel a g függvény f függvényre merőleges érintőjének egyenletét. (*8 pont*)

6. *a*) Egy 6 pontú fagráfban a csúcsok fokszámainak terjedelme 2, módusza 1. Hány ilyen különböző 6 pontú fagráf létezik, ha csúcsaikat nem különböztetjük meg egymástól? (*8 pont*)

b) Hány csúcsa van annak a fagráfnak, amelyben az össze nem kötött pontpárok száma kétszerese az élek számának? (*8 pont*)

7. Egy iskolai büfé italautomatájában hétféle rostos üdítő, kétféle ásványvíz és háromféle szénsavas frissítő kapható, mindegyikből pontosan 8 db.

a) Hányféle sorrendben vehet ki Emese mindegyik rostos üdítőből pontosan egyet? (*2 pont*)

b) Hányféleképpen választhat ki Emese 3 db innivalót tetszőleges összeállításban, ha az automatában lévő összes üdítőt különbözőnek tekintjük? (*5 pont*)

Az italautomaták elég gyakran elromlanak. Egy italautomatákat szervizelő cégnél 0,05 annak a valószínűsége, hogy egy adott napon nincs javítanivaló; 0,2, hogy pontosan egy; 0,6, hogy pontosan két javítanivaló automata van.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy öt egymást követő munkanapon nincs javítanivaló? (*3 pont*)

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy három nap alatt összesen két gépet kell megjavítaniuk? (*6 pont*)

8. Egy egyetem gólyatáborában két csoport szkanderbajnokságot játszik egymással. Azért, hogy felmérjék az erőviszonyokat, először a két csoporton belül mindenki mindenkivel egyszer játszik, majd ezt követően a csoportok tagjai megmérkőznek a másik csoport tagjaival. A játék során a csoportokban összesen 144, míg a csoportok között 156 megmérettetésre kerül sor.

a) Hányan vannak az egyik, és hányan a másik csoportban? (*9 pont*)

A bajnokság megkezdése előtt minden versenyző kap egy sorszámot.

b) Botond azt állítja, hogy az egyjegyű sorszámot kapott versenyzők közül ki lehet választani hatot úgy, hogy bárhogy párosítjuk őket, a párokban szereplő versenyzők sorszámainak összege három különböző szám lesz. Igaza van-e? (*7 pont*)

9. Egy szabályos háromszög alakú céltábla oldalait n ($n>1$, $n \in \mathbb{N}$) egyenlő részre osztottuk. Ezután az osztópontokon át a háromszög oldalaival párhuzamosan szakaszokat húztunk, melynek végpontjai a megfelelő osztópontok. Az így keletkező egybevágó szabályos kisháromszögeket balról jobbra, egyesével, felváltva feketére és fehérre színezzük úgy, hogy minden sorban az első kisháromszög fekete.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a céltáblára egyetlen lövést leadva, az fekete mezőt talál el, feltéve, hogy a lövés eltalálja a céltáblát? (*9 pont*)

b) Határozzuk meg a és b értékét, ha tudjuk, hogy a kapott p valószínűségre minden $n>1$ egész esetén teljesül, hogy $a<p\leqslant b$, ahol a a lehető legnagyobb, b pedig a lehető legkisebb ilyen szám? (*7 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2017/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *$A\cup B$ halmaznak 192 eleme van. $A\cap B$ elemszáma A elemszámának 20%-a, B elemszámának 15%-a. Hány eleme van az A és a B halmaznak?* (*6 pont*)

b) *Egy város felnőtt lakosságának 30%-a nyugdíjas. A nyugdíjasok 55%-a nő. A férfiaknak 73%-a aktív korú (nem nyugdíjas). Bizonyítsuk be, hogy a városban a felnőtt férfiak és nők száma egyenlő.* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az $A\cap B$ halmaz elemszáma x, ekkor $A\setminus B$ elemszáma $4x$. Jelölje a $B\setminus A$ halmaz elemszámát y. Ekkor

$$\frac{x}{x+y}=\frac{1{,}5}{10},\quad \text{amiből}\quad y=\frac{17}{3}x.$$

Tehát $192=\frac{32}{3}x$, amiből $x=18$, így A elemszáma 90, míg B elemszáma 120.

b) A nyugdíjasoknak 45%-a férfi, ez a 30%-nak a 45%-a, azaz a nyugdíjas férfiak száma a teljes lakosság 13,5%-a. Másfelől a férfiak $100-73=27$%-a nyugdíjas. Így a férfiak 27%-a annyi, mint a teljes lakosság 13,5%-a. A férfiak számát F-fel, míg a teljes lakosság számát T-vel jelölve $0{,}27\cdot F=0{,}135\cdot T$, ebből $F=0{,}5\cdot T$, vagyis a férfiak a teljes lakosság felét teszik ki.

2. *a*) *Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán:* $3^{2+x}+3^{6-x}=2190$. (*7 pont*)

b) *Legyen az a_n sorozat definíciója: $a_n=8^{n(n+1)}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat első n tagjának szorzata $2^{n(n+1)(n+2)}$.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*)

$$9\cdot 3^x+\frac{729}{3^x}=2190.$$

3^x-t z-vel jelölve és az egyenletet rendezve a

$$3z^2-730z+243=0$$

egyenlethez jutunk, melynek gyökei $z_1=243$ és $z_2=1/3$. Ebből $x_1=5$ és $x_2=-1$. Mindkét gyök megfelelő, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.

b) Az első n tag szorzata

$$8^{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)}=2^{3\cdot(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1))}.$$

Mivel az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, azt kell bizonyítanunk, hogy

$$3 \cdot \big(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)\big) = n(n+1)(n+2).$$

Bizonyítsuk teljes indukcióval:

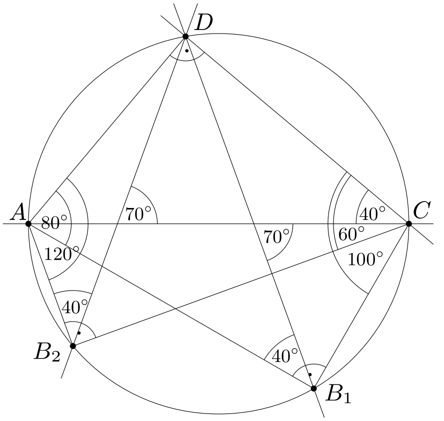
1. $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $3 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.
2. Tegyük fel, hogy valamilyen n-re az állítás igaz. Ekkor $n+1$-re:

$$3 \cdot \big(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) + (n+1)(n+2)\big) =$$
$$= 3 \cdot \big(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)\big) + 3 \cdot (n+1)(n+2) =$$
$$= n(n+1)(n+2) + 3 \cdot (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)(n+3).$$

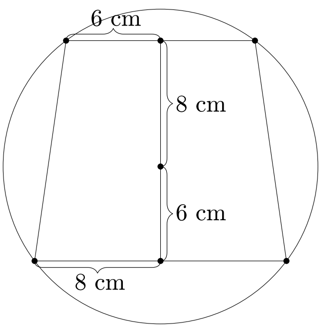
3. *a) Egy* 10 *egység sugarú körbe az $ABCD$ négyszöget írtuk. A négyszög két átlója* $70°$*-os szögben metszi egymást. Az AC átló hossza* 20 *egység, és a CD oldallal* $40°$*-os szöget zár be. Számítsuk ki a négyszög szögeit.* (*6 pont*)

b) Egy 10 *egység sugarú gömbbe csonkakúpot írunk, melynek alap-, illetve fedőlapja a gömb középpontjától* 6 cm, *illetve* 8 cm *távolságra van. (A gömb középpontja a két sík közé esik.) Számítsuk ki a csonkakúp felszínét.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) AC átmérő, mert kétszerese a kör sugarának. Thalész tétele szerint $ABC\sphericalangle$ és $ADC\sphericalangle$ derékszög. $ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle = 40°$, mert ugyanahhoz a húrhoz tartozó kerületi szögek. Két jó négyszöget kapunk, az *1. ábra* háromszögeinek minden szögét kiszámítva és a megfelelőket összeadva kapjuk, hogy a hiányzó két szög $80°$ és $100°$, illetve $120°$ és $60°$.



1. ábra



2. ábra

b) Nézzük a gömb és a csonkakúp (forgástengelyén átmenő) síkmetszetét. Pitagorasz tételéből a fedőkör sugara $r = 6$ cm, az alapkör sugara $R = 8$ cm (*2. ábra*). Az alkotó: $a^2 = 14^2 + 2^2 = 200$, ebből

$$a = \sqrt{200} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$

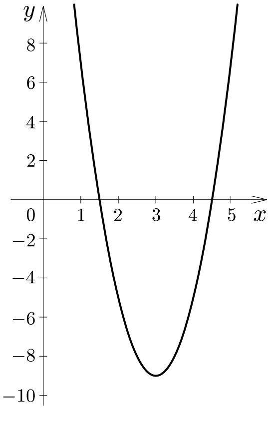
Az adatokat az $A = \pi \cdot \big[R^2 + r^2 + (R+r)a\big]$ képletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy a csonkakúp felszíne $936{,}2\ \mathrm{cm}^3$.

4. *Elemezzük monotonitás szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=x^4-8x^3+13{,}5x^2+10$ függvényt, és adjuk meg lokális szélsőértékeit.*

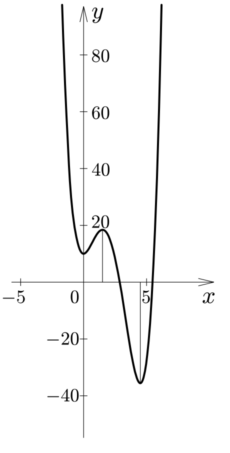
(*12 pont*)

Megoldás. A függvény deriváltja $f'(x)=4x^3-24x^2+27x=x\cdot\left(4x^2-24x+27\right)$. A zárójelben szereplő másodfokú kifejezés gyökei 1,5 és 4,5, így grafikonja vázlatosan a *3. ábrán* látható.

Előjele a $]-\infty;1{,}5]$ és a $]4{,}5;\infty;]$ intervallumon pozitív, az $]1{,}5;4{,}5]$ intervallumon negatív.



3. ábra



4. ábra

Ezt x-szel szorozva kapjuk $f'(x)$-et, ami ezek szerint a 0, 1,5 és 4,5 helyeken vesz fel 0 értéket, továbbá

a $]-\infty;0[$ intervallumon negatív,
a $]0;1{,}5[$ intervallumon pozitív,
az $]1{,}5;4{,}5[$ intervallumon negatív,
a $]4{,}5;\infty[$ intervallumon pozitív.

Fentiek alapján az $f(x)$ függvény

a $]-\infty;0[$ intervallumon szigorúan monoton csökken,
a $]0;1{,}5[$ intervallumon szigorúan monoton nő,
az $]1{,}5;4{,}5[$ intervallumon szigorúan monoton csökken,
a $]4{,}5;\infty[$ intervallumon szigorúan monoton nő.

Ezekből következik, hogy 0-ban és 4,5-ben a függvénynek lokális minimuma, 1,5-ben lokális maximuma van. Ezek értéke: $f(0)=10$; $f(1{,}5)=18{,}4375$; $f(4{,}5)=-35{,}5625$.

Grafikonja vázlatosan a *4. ábrán* látható.

II. rész

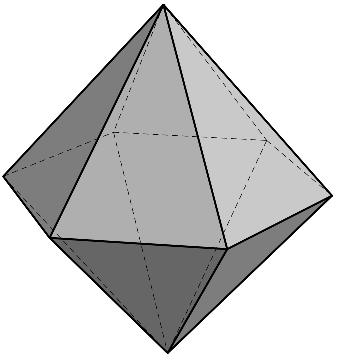
5. *Egy dobókockához hasonlóan használható fajáték alakja két egybevágó, alapjuknál egymáshoz illesztett szabályos hatoldalú gúla, amelyeknek alapéle* 2 cm, *oldaléle* 3 cm.

a) Számítsuk ki a test tömegét (grammban kifejezve), ha anyagának sűrűsége 430 kg/m^3.

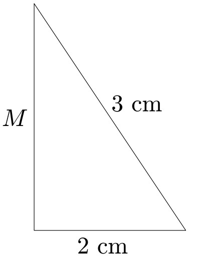
(*7 pont*)

b) A test lapjai közül négy piros, a többi fekete. A piros dobás jelent szerencsét a társasjátékban. Ha tíz játékos dob egyszerre egy-egy ilyen testtel, mekkora a valószínűsége, hogy a játékosoknak pontosan a fele dob pirosat? *(3 pont)*

c) A játék során a tíz játékos összesen öt alkalommal dobott egyszerre. Mindegyik alkalommal feljegyezték a piros dobások számát. Mind az öt esetben a játékosok kevesebb, mint fele dobott pirosat, de olyan nem fordult elő, hogy egyiküknek sem volt szerencséje. Mi volt az öt feljegyzett szám, ha átlaguk 1,6 *és szórásuk* 0,8*? (A számok sorrendje nem kérdés.)* *(6 pont)*



Megoldás. *a*) A gúla alapterülete $T = 6 \cdot 2^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2, magassága $M = \sqrt{5}$ cm. Térfogata $2 \cdot \frac{TM}{3} \approx 15{,}49$ cm^3, sűrűsége 0,43 g/cm^3, ebből a tömege $\approx 0{,}66$ g.

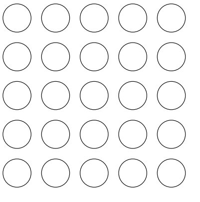


b) A piros dobás valószínűsége $\frac{1}{3}$, így a keresett valószínűség:

$$\binom{10}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 0{,}137.$$

c) Mind az öt szám 1 és 4 között van, és az egyik biztosan 1-es. A másik négy szám összegét x-szel jelölve $\frac{1+x}{5} = 1,6$, amiből $x = 7$. A másik négy szám lehetséges értékei növekvő sorrendben: 1, 1, 1, 4; 1, 1, 2, 3 vagy 1, 2, 2, 2. Ezek közül csak a második esetben lesz a szórás 0,8. Tehát az öt feljegyzett szám az 1, 1, 1, 2, 3 volt.

6. *Az ábrán látható huszonöt kör mindegyikét fehérre vagy feketére színezzük. (Az ábra rögzített, a mozgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük azonosnak.)*



a) Hány olyan színezés lehetséges, amelyben több a fekete kör, mint a fehér? *(3 pont)*

b) Hány olyan színezés lehetséges, amely szimmetrikus az ábra vízszintes vagy függőleges tengelyére? *(6 pont)*

c) Hány olyan színezés lehetséges, amelyben pontosan 7 *kör fekete, és szimmetrikus az ábra függőleges tengelyére?* *(7 pont)*

Megoldás. *a*) A 25 kört összesen 2^{25}-féleképp színezhetjük. Mivel nem lehet egyenlő a fekete és fehér körök száma, és ugyanannyi olyan eset van, amelyben több a fehér, mint amelyben több a fekete, az utóbbi lehetőségek száma az összesnek a fele, azaz 2^{24}.

b) Tekintsük először a függőleges tengelyre szimmetrikus megoldásokat. Szabadon színezhetjük a tengely köreit és a tőle balra eső köröket – a jobboldali körök színét ez már meghatározza. Mivel 15 körről dönthetünk szabadon, a lehetőségek száma 2^{15}.

Ugyanennyi olyan színezés van, ami a vízszintes tengelyre szimmetrikus.

Azok a színezések, amelyek mindkét tengelyre szimmetrikusak, úgy állíthatók elő, hogy szabadon színezzük a valamelyik sarokban lévő 3×3-as részt, majd ebből már következik a többi kör színe – ez tehát 2^9 lehetőség.

Összesítve: a legalább az egyik tengelyre szimmetrikus megoldások száma $2 \cdot 2^{15} - 2^9$.

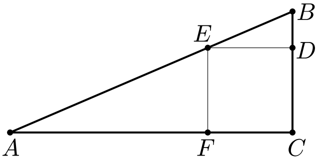
c) A tengelyen kívül eső fekete körök egyenlően oszlanak meg a bal- és a jobboldalon, ezért a tengelyen páratlan számú fekete körnek kell lennie.

Középen 1, baloldalt 3 fekete kör: $5 \cdot \binom{10}{3} = 600$ lehetőség.

Középen 3, baloldalt 2 fekete kör: $\binom{5}{3} \cdot \binom{10}{2} = 450$ lehetőség.

Középen 5, baloldalt 1 fekete kör: $1 \cdot 10 = 10$ lehetőség.

Összesen tehát 1060 ilyen színezés lehetséges.



7. *Az ABC derékszögű háromszög befogói $AC = 7$ egység, $BC = 3$ egység. A háromszögbe az ábrán látható módon négyzetet írtunk.*

a) *Milyen hosszú a négyzet oldala?* (*4 pont*)

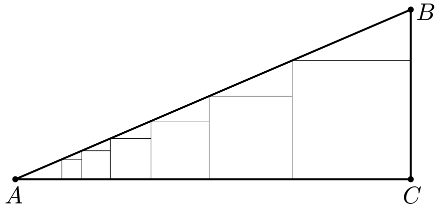
Az AFE derékszögű háromszögbe ugyanilyen módon újabb négyzetet írunk, majd az ekkor keletkezett újabb, A csúccsal rendelkező derékszögű háromszögbe újabb négyzetet stb.

b) *Milyen hosszú a hatodik négyzet oldala?* (*4 pont*)

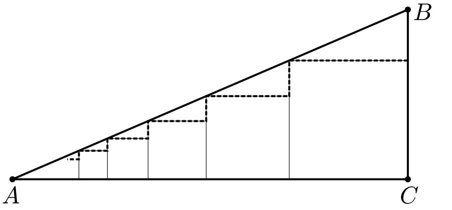
c) *Tovább folytatva az eljárást, összesen hány négyzet oldala lesz nagyobb, mint* 0,0001? (*4 pont*)

d) *Mekkora a négyzetek „fölött" (DBE mintájára) keletkező végtelen sok derékszögű háromszög területének összege?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az *5. ábrán* látható derékszögű háromszögek hasonlóak, mert megfelelő szögeik egyenlők. A négyzet oldalát x-szel jelölve $(3 - x) : x = 3 : 7$, ebből $x = 2{,}1$.



5. ábra



6. ábra

b) Az AFE háromszögbe írható négyzet oldala úgy aránylik EF-hez, mint az első négyzet oldala BC-hez, azaz $2{,}1 : 3 = 0{,}7$. Hasonlóképpen mindegyik négyzet oldala 0,7-szerese az előzőnek. A hatodik négyzet oldala tehát $3 \cdot 0{,}7^6 \approx 0{,}353$.

c) A $3 \cdot 0{,}7^n > 0{,}0001$ egyenlőtlenség megoldása $n < \lg(0{,}0001/3) : \lg 0{,}7 \approx 28{,}9$.

Vagyis 28 négyzet oldala nagyobb 0,0001-nél.

d) A DBE háromszög területe $2{,}1 \cdot 0{,}9 : 2 = 0{,}945$. A háromszögek területe végtelen mértani sort alkot, melynek első tagja 0,945, hányadosa 0,49 (a hasonlóság arányának négyzete, *6. ábra*). A mértani sor összegképletéből az együttes terület $\approx 1,85$ egység.

8. *a*) *Egy várfal nyugat-keleti irányú egyenes szakaszán négy kisméretű bástya áll, sorrendben A, B, C és D. Az A és a D bástya az egyenes fal két végén helyezkedik el. Egy, az A bástyától pontosan északi irányban található megfigyelőpontból az AB szakasz*

31°-os, a BC szakasz 17°-os, a CD szakasz pedig 14°-os szögben látszik. A bástyák közötti távolságok közül csak a BC távolságot ismerjük, ez 200 méter. *Mekkora az AB és a CD távolság? Készítsünk ábrát. Az eredményeket* 10 m *pontossággal adjuk meg.* (*7 pont*)

b) Egy egyenlőszárú háromszög szárhoz tartozó súlyvonala az alappal 20°-os szöget zár be. Mekkorák a háromszög szögei? (*9 pont*)

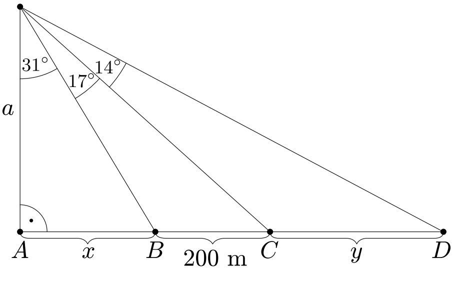
Megoldás. A *7. ábra* jelöléseit használva $x = a \cdot \operatorname{tg} 31^\circ$, $x + 200 = a \cdot \operatorname{tg} 48^\circ$.

Az egyenletrendszert megoldva $a = 392{,}3$ m és $x = 235{,}7$ m adódik.

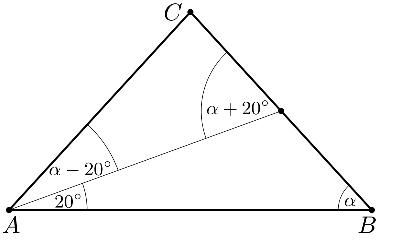
$$235{,}7 + 200 + y = 392{,}3 \operatorname{tg} 62^\circ,$$

ebből $y = 302{,}1$ m.

Tehát $AB \approx 240$ méter, $CD \approx 300$ méter.



7. ábra



8. ábra

b) A *8. ábrára* a szinusztételt felírva:

$$\frac{\sin(\alpha + 20^\circ)}{\sin(\alpha - 20^\circ)} = \frac{2}{1}.$$

Rendezve és addíciós tételeket alkalmazva:

$$\sin\alpha\cos 20^\circ + \cos\alpha\sin 20^\circ = 2(\sin\alpha\cos 20^\circ - \cos\alpha\sin 20^\circ).$$

Rendezve, majd kihasználva, hogy most $\cos\alpha \neq 0$:

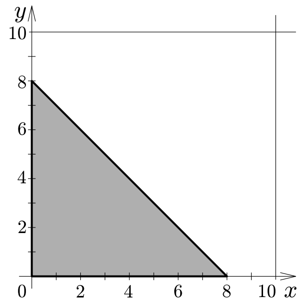
$$3\cos\alpha\sin 20^\circ = \sin\alpha\cos 20^\circ,$$

$$3\operatorname{tg} 20^\circ = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ebből $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}092$, $\alpha = 47{,}52^\circ$ és $180^\circ - 2\alpha = 84{,}96^\circ$.

9. *Két, véletlenszám-generátor segítségével előállított* 0 *és* 10 *közötti számot jelöljünk x-szel és y-nal. Adjuk meg, mekkora az alábbi események valószínűsége:*

$$A:\ x + y \leqslant 8; \quad B:\ x^2 + y^2 + 49 \leqslant 10(x + y); \quad C:\ 20y \geqslant x^2.$$ (*16 pont*)



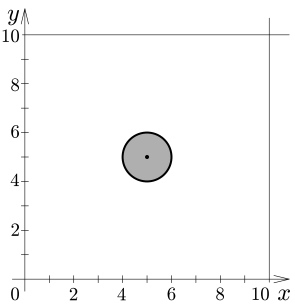
9. ábra

Megoldás. Tekintsük az $(x; y)$ számpárhoz tartozó pontot a derékszögű koordinátarendszerben. Ez a pont a koordinátatengelyek, valamint az $x = 10$ és $y = 10$ egyenesek által határolt négyzet valamelyik pontja.

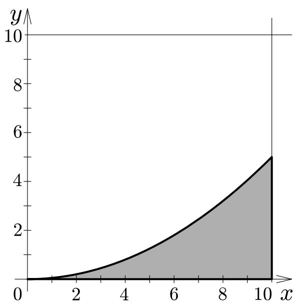
Mindegyik eseménynek megfeleltetjük a hozzá tartozó számpárokkal jelölt pontok halmazát. Az események valószínűsége kiszámítható, mint ezen területtel rendelkező alakzatok és a négyzet területének hányadosa (geometriai valószínűség.) A négyzet területe 100 egység.

Az A esemény akkor teljesül, ha $y \leqslant -x + 8$, ez pedig a négyzet pontjai közül a sötétre színezett háromszög pontjaira igaz (*9. ábra*). A háromszög területe 32 egység, ebből az A esemény valószínűsége 0,32.

A B eseményhez tartozó egyenlőtlenséget átrendezve az $(x-5)^2 + (y-5)^2 \leqslant 1$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ennek pedig annak a körlemeznek a pontjai tesznek eleget, melynek sugara 1, középpontja az $(5; 5)$ pont (*10. ábra*). A kör területe π, a valószínűség $\pi/100 \approx 0{,}0314$.



10. ábra



11. ábra

A C esemény feltétele átrendezve $y \geqslant \frac{x^2}{20}$. C komplementere az $y < \frac{x^2}{20}$ egyenlőtlenségnek megfelelő ponthalmaz, vagyis az $f(x) = \frac{x^2}{20}$ függvény grafikonja alatti terület a $[0; 10]$ intervallumon (*11. ábra*). (Ez a síkidom teljes egészében a négyzetben van, mert a függvény maximuma ezen az intervallumon $\frac{10^2}{20} = 5 < 10$.)

A grafikon alatti terület

$$\int_0^{10} \frac{x^2}{20}\,\mathrm{d}x = \frac{50}{3} \approx 16{,}67,$$

így C komplementerének valószínűsége 0,1667. Ebből C valószínűsége 0,8333.

(*Megjegyzés:* „a 0 és 10 közötti szám” kifejezés nem pontos, nem tudjuk, hogy a határok beleértendők-e. Ennek azonban a terület szempontjából nincs jelentősége.)

Deák Anna
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 4832. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c pozitív egész számokhoz találhatók olyan egymáshoz relatív prím r, s pozitív számok, hogy $ar+bs$ osztható c-vel.*

(*5 pont*)

Megoldás. Jelölje d az a és b legnagyobb közös osztóját: $d=(a;b)$. Legyen $r_1=\frac{b}{d}$ és $s_1=\frac{a}{d}$. Ekkor nyilván $(r_1,s_1)=1$ és $ar_1=bs_1=\frac{ab}{d}$, tehát ar_1+ $+b\cdot(-s_1)=0$, ami osztható c-vel.

De egyelőre $s=-s_1<0$. Keressünk olyan, c-vel osztható k pozitív egész számot, melyre $s_2=k-s_1>0$ és $(r_1,s_2)=\left(\frac{b}{d};k-\frac{a}{d}\right)=1$ továbbra is teljesül. Mivel $c\mid k$, ezért $c\mid bk=(ar_1-bs_1)+bk=ar_1+b(k-s_1)=ar_1+bs_2$.

Legyen $k=k'c\cdot\frac{b}{d}$, ahol k' elég nagy ahhoz, hogy $k'c\cdot\frac{b}{d}-\frac{a}{d}>0$ fennáljon.

Azt állítjuk, hogy $(r_1,s_2)=1$ is igaz. Ha ugyanis

$$1<m=(r_1,s_2)=\left(\frac{b}{d},k'c\frac{b}{d}-\frac{a}{d}\right)$$

valamely m pozitív egészre, akkor $m\mid\frac{b}{d}$ miatt $m\mid k'c\frac{b}{d}$ is igaz, amiből $m\mid s_2$ miatt $m\mid\frac{a}{d}$ következik, de ekkor $m\mid\frac{a}{d}$ és $m\mid\frac{b}{d}$, ami ellentmond annak, hogy $\frac{a}{d}$ és $\frac{b}{d}$ relatív prímek. Tehát valóban $(r_1,s_2)=1$.

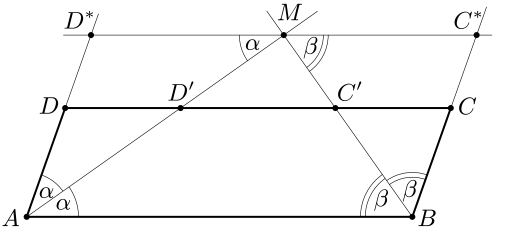
Tehát $r=\frac{b}{d}$ és $s=k'c\cdot\frac{b}{d}$, ahol k' megfelelően nagy, jó választás.

55 dolgozat érkezett. 5 pontos 38, 4 pontos 6, 3 pontos 2, 2 pontos 4, 1 pontos 4 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4836. *Az $ABCD$ paralelogrammában $BC=\lambda AB$. Az A-ból és B-ből induló belső szögfelezők metszéspontja M. Az $ABCD$ paralelogramma hányadrészét fedi le az $ABM\triangle$?*

(*5 pont*) Javasolta: *Kozma József* (Szeged)

Megoldás. Húzzunk párhuzamost az M ponton keresztül az AB oldallal, ez az egyenes messe a BC és AD egyeneseket rendre a C^* és D^* pontokban. Legyen $MAD^*\sphericalangle=MAB\sphericalangle=\alpha$ és $MBA\sphericalangle=MBC^*\sphericalangle=\beta$. Vegyük észre, hogy $AMD^*=MAB\sphericalangle=\alpha$, hiszen váltószögek, és hasonlóan $BMC^*\sphericalangle=MBA\sphericalangle=\beta$. Így az $AMD^*\triangle$ és az $MBC^*\triangle$ egyenlő szárú, amiből $MD^*=D^*A=C^*B=$ $=MC^*=AB/2$ adódik, ahol a második egyenlőségnél kihasználtuk, hogy ABC^*D^* paralelogramma, az utolsó egyenlőségnél pedig, hogy $MD^*+MC^*=$ $=D^*C^*=AB$.



Feltehetjük, hogy $T_{ABC^*D^*}=2$. Mivel az ABC^*D^* paralelogramma és az $ABM\triangle$ AB oldala és ehhez tartozó magassága közös, a jól ismert területképletek alapján $T_{ABM}=1$. Továbbá a feltétel szerint $AD=\lambda AB=2\lambda AD^*$, így ismét a paralelogramma ismert területképlete szerint

$$T_{ABCD}=AB\cdot AD\cdot\sin 2\alpha=2\lambda(AB\cdot AD^*\cdot\sin 2\alpha)=2\lambda T_{ABC^*D^*}=4\lambda.$$

Az eddigiekből az is következik, hogy az M pont pontosan akkor van benne az $ABCD$ paralelogrammában, ha $\lambda\geqslant 1/2$. Ilyenkor a keresett területarány a fentiekből azonnal adódik:

$$\frac{T_{ABM}}{T_{ABCD}}=\frac{1}{4\lambda}.$$

Ha $\lambda<1/2$, akkor az M pont $ABCD$-n kívül esik. Messe AM és BM a CD oldalt rendre a D' és C' pontokban. Ekkor a $D^*AM\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{AD'}{AM}=\frac{AD}{AD^*}=2\lambda.$$

Világos, hogy $MD'C'\triangle\sim MAB\triangle$, hiszen szögeik páronként megegyeznek, és hasonlóságuk aránya $MD'/MA=1-DA'/MA=1-2\lambda$. Ebből következik, hogy $T_{MD'C'}=(1-2\lambda)^2T_{MAB}=(1-2\lambda)^2$. Végül az $ABM\triangle$ által lefedett területre

$$T_{ABC'D'}=T_{ABM}-T_{MC'D'}=1-(1-2\lambda)^2=4\lambda-4\lambda^2.$$

Innen pedig

$$\frac{T_{ABC'D'}}{T_{ABCD}}=\frac{4\lambda-4\lambda^2}{4\lambda}=1-\lambda.$$

Tehát a keresett arány $1/4\lambda$, ha $\lambda\geqslant 1/2$; és $1-\lambda$, ha $\lambda<1/2$.

109 dolgozat érkezett. 5 pontos 55, 4 pontos 3, 3 pontos 47, 2 pontos 3, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4866. *Xavér és Yvett felváltva mondanak*
a) valós számokat;
b) komplex számokat.

Xavér kezd, és a játék a 100. *szám kimondása után ér véget. Yvett célja az, hogy a kimondott* $a_1,\ldots,a_{100}$ *számokból képzett összesen* $\binom{100}{2}$ *darab kettős szorzat* $a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{99}a_{100}$ *összege* 0 *legyen, Xavér ezt szeretné megakadályozni. Kinek van nyerő stratégiája?*

(*6 pont*)

Megoldás. Nyilván

$$\begin{aligned} S_{100} &= a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{99}a_{100} = \\ &= a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{98}a_{99} + a_{100}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}), \end{aligned}$$

és ebből Yvett a 100. lépésben már csak az $a_{100}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{99})$ részt tudja befolyásolni, ezért hogy $S_{100} = 0$ legyen,

$$a_{100} = -\frac{a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{98}a_{99}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}}$$

kimondása lehet részéről az észszerű lépés.

Ha $a_1 + a_2 + \ldots + a_{99} \neq 0$, akkor ezt meg is teheti; ezért aztán Xavérnak csak az lehet a célja, hogy ezt megakadályozza azzal, hogy a 99. lépésben az $a_{99} = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_{98})$ számot mondja. De Yvett még ekkor is nyerhet, ha eléri, hogy ebben az esetben

$$S_{99} = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{98}a_{99} = 0$$

legyen, vagyis

$$\begin{aligned} a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} + a_{99}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{98}) &= 0, \\ a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} + a_{99}(-a_{99}) &= 0, \\ a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{98})^2 &= 0, \\ -\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98}\big) &= 0. \end{aligned}$$

Itt válik el egymástól az *a*) és *b*) rész.

a) Valós számok esetén

$$\begin{aligned} &2\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98}\big) = \\ &= \big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2\big) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{98})^2 \end{aligned}$$

(nemnegatív, és) csak $a_1 = a_2 = \ldots = a_{98} = 0$ esetén nulla.

Ekkor Yvett nem érheti el a célját, ha Xavér már valahol az elején mondott egy nemnulla számot, amit bőven megtehetett – ezért Xavérnak van nyerő stratégiája.

b) Komplex számok esetén viszont

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} = 0,$$

azaz

$$\begin{aligned} 2\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98}\big) &= 0, \\ 2a_{98}^2 + 2a_{98}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97}) &+ \\ + 2\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{97}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{96}a_{97}\big) &= 0, \\ 2a_{98}^2 + 2a_{98}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97}) &+ \\ + \big((a_1 + a_2 + \ldots + a_{97})^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{97}^2\big) &= 0 \end{aligned}$$

másodfokú egyenlet a_{98}-ra, aminek komplex gyökei

$$a_{98_{1,2}} =$$

$$= \frac{-(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97}) \pm \sqrt{-(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97})^2 - 2\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{97}^2\big)}}{2}.$$

Ha e gyökök bármelyikét mondja Yvett a 98. lépésben, akkor ő fog nyerni, ezért ekkor Yvettnek van nyerő stratégiája.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)

44 dolgozat érkezett. 6 pontos 33, 5 pontos 2, 4 pontos 1, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4869. *Legyen A a valós számok egy véges halmaza. Azt mondjuk, hogy A elemeinek legalább két csoportba osztása egy* parkettázás, *ha az így kapott (páronként diszjunkt) részhalmazok legalább két eleműek és egymás eltoltjai. Bizonyítsuk be, hogy A-nak páros sok parkettázása van.*

(5 pont)

Megoldás. Az állítást úgy bizonyítjuk, hogy párokba soroljuk az A parkettázásait. A következő jelölést használjuk: ha X és Y számhalmazok, akkor legyen

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ és } y \in Y\}.$$

Nyilván $X + Y = Y + X$, és az X halmaz s-sel való eltoltja ekkor $X + \{s\}$.

Legyen

$$A = \big(B + \{c_1\}\big) \cup \big(B + \{c_2\}\big) \cup \big(B + \{c_3\}\big) \cup \ldots \cup \big(B + \{c_k\}\big)$$

az A halmaz parkettázása. Ekkor $A = B + C$, ahol $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$; legyen továbbá $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Így

$$A = C + B = \big(C + \{b_1\}\big) \cup \big(C + \{b_2\}\big) \cup \big(C + \{b_3\}\big) \cup \ldots \cup \big(C + \{b_n\}\big).$$

Megmutatjuk, hogy ez is parkettázása A-nak, és különbözik az előbbitől.

A $\big(C + \{b_i\}\big)$ halmazok egymás eltoltjai, közös elemszámuk k, ami az első parkettázásban szereplő részhalmazok számaként legalább kettő. E halmazok száma, n pedig az első parkettázásban szereplő halmazok közös elemszáma, így szintén legalább kettő. A diszjunktság igazolásához indirekten tegyük fel, hogy például $\big(C + \{b_1\}\big)$-nek és $\big(C + \{b_2\}\big)$-nek közös eleme $c_i + b_1 = c_j + b_2$. Ekkor azonban ez a szám $(B + c_i)$-nek és $(B + c_j)$-nek is közös eleme; mivel e két halmaz az első parkettázásban szerepel, ez csak úgy lehetséges, hogy $(B + c_i) = (B + c_j)$, azaz $i = j$, így $c_i = c_j$, akkor viszont $b_1 = b_2$, ami ellentmondás. Nyilvánvaló, hogy miképpen e második parkettázást kaptuk az elsőből, ugyanazzal a megfeleltetéssel a másodikból visszakapjuk az elsőt.

Ahhoz, hogy a parkettázások párosításáról beszélhessünk, végül be kell látnunk, hogy a párban álló parkettázások különböznek egymástól. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét; ekkor $n = k$, és a B elemeinek átszámozásával elérhető, hogy

$(B+c_v)=(C+b_v)$ teljesül $v=1,2,\ldots,n$-re. Tekintsük például $(B+c_1)= =(C+b_1)$-et: $c_2+b_1\in(C+b_1)$ miatt ekkor van olyan b_i eleme B-nek, amelyre $b_i+c_1=c_2+b_1$. Ez a szám viszont közös eleme $(B+c_1)$-nek és $(B+c_2)$-nek, ami ellentmondás.

44 dolgozat érkezett. 5 pontos 30, 4 pontos 12, 3 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4880. *Az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitív egész számokból álló sorozatra teljesül, hogy $a_n\cdot a_{n+1}=a_{n+2}\cdot a_{n+3}$ minden pozitív egész n-re. Mutassuk meg, hogy a sorozat valamelyik elemétől kezdve periodikus.*

(*4 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

Megoldás. Az $a_n\cdot a_{n+1}=a_{n+2}\cdot a_{n+3}$ összefüggés szerint

$$a_{n+3}=\frac{a_n\cdot a_{n+1}}{a_{n+2}}$$

minden pozitív egész n-re. Ezért a_n, a_{n+1} és a_{n+2} egyértelműen meghatározza a_{n+3} értékét. A feladat állításának igazolásához így elég belátni, hogy létezik olyan n és k pozitív egész, amelyekre $a_{n+k}=a_n$, $a_{n+1+k}=a_{n+1}$ és $a_{n+2+k}=a_{n+2}$ egyszerre teljesül, hiszen akkor

$$a_{n+3+k}=\frac{a_{n+k}\cdot a_{n+1+k}}{a_{n+2+k}}=\frac{a_n\cdot a_{n+1}}{a_{n+2}}=a_{n+3}$$

stb. Az előbbi igazolásához legyen $M=a_1\cdot a_2$; ekkor $M=a_3\cdot a_4=a_5\cdot a_6=a_7\cdot a_8$, és így tovább, ezért a sorozat minden elemére $1\leqslant a_v\leqslant M$. Ebből következik, hogy az a_n, a_{n+1}, a_{n+2} rendezett számhármasok csak véges sokfélék lehetnek (legfeljebb M^3-féle számhármas állhat elő ezen a módon). Így az $\{a_1,a_2,a_3\}$, $\{a_4,a_5,a_6\}$, $\{a_7,a_8,a_9\}$, $\ldots$ (rendezett) számhármasok között biztosan lesz két egyező.

66 dolgozat érkezett. 4 pontos 47, 3 pontos 15, 2 pontos 3, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4888. *Sebestyén a harmadiktól kezdve minden születésnapjára olyan háromszög alapú hasáb alakú tortát kap, amelynek a felső három csúcsában van egy-egy gyertya, és a tetején még annyi, hogy az életkorával megegyező számú gyertya legyen összesen a tortán úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesbe. Sebestyén olyan, háromszög alakú szeletekre szeretné vágni a tortát, melyeknek a csúcsait a gyertyák helye adja (a háromszögek belseje nem tartalmazhat gyertyát). Hány szeletre oszthatja a tortát a k-adik születésnapján?*

(*4 pont*)

Megoldás. Pontosan $2k-5$ szeletre lehet felosztani. Bizonyítsunk teljes indukcióval. Kiindulásnak vehetjük a $k=3$ esetet, ekkor magától értetődő, hogy pontosan egy szeletre lehet osztani a tortát. A $k=4$ esetben is azonnal látható, hogy 3 szeletre lehet felosztani.

Tegyük fel, hogy beláttuk, hogy k-ig minden évben pontosan $2k-5$ szeletre lehet felosztani tortát. Igazoljuk, hogy ekkor a $(k+1)$. születésnapon pontosan $2(k+1)-5$ szeletre osztható a torta.

Vegyünk egy tetszőleges $k+1$ gyertyás háromszög alakú tortát. Tekintsük ennek egy tetszőleges helyes szeletelését, majd válasszuk ki bármelyik belső gyertyát (vagyis bármelyiket, ami nem a torta csúcsában van). Legyen az ebből kiinduló háromszög-oldalak száma (vagyis a vágások száma) n. Az n legalább 3, hiszen semelyik három gyertya sincs egy egyenesen és fel van darabolva háromszögekre a torta lapja. Vagyis van pontosan egy darab n-szög, amelyet a szeletelés határoz meg és csak a kiválasztott gyertyát tartalmazza. A kiválasztott gyertyából kiinduló vágások végén lévő gyertyák közül a szomszédosak össze vannak kötve egymással, különben vagy nem lenne háromszögekre szeletelve a torta, vagy lenne egy vágás, ami a kiválasztott gyertyából indul és kihagytuk.

A szomszédos n darab gyertya egy n-szöget határoz meg, amelynek belsejében csak a kiválasztott gyertya van. Ez a gyertya minden csúccsal össze van kötve, így az n-szög n darab háromszögre van felosztva. Most távolítsuk el a kiválasztott gyertyát. Ekkor egy k gyertyás torta marad, amiről az indukciós feltevés alapján tudjuk, hogy pontosan $2k-5$ szeletre lehet felbontani. Az n-szögön kívüli szeletelésen ne változtassunk. Az n-szögben válasszuk ki az egyik csúcsot, majd kössük össze a többi vele nem szomszédos csúccsal. Így $n-2$ háromszögre bontottuk fel. Ettől különböző számú háromszögre nem is lehet az n-szöget bontani, hiszen minden ilyen felbontásában mindegyik háromszög valamennyi szöge része az n-szög valamelyik szögének, így a t darab háromszög 180 fokos szögösszegének $180t$ fokos összege az n-szög belső szögeinek $180(n-2)$ fokos összegét adja, amiből $t=n-2$ egyértelműen meghatározott.

Tehát, amikor $k+1$ gyertya volt, akkor 2-vel több szeletre lehetett bontani a tortát, összesen $2k-5+2=2(k+1)-5$ szeletre.

Ezzel bizonyítottuk, hogy Sebestyén a k-adik születésnapján csak $2k-5$ szeletre oszthatja a tortát.

Dobák Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 202 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 121, 3 pontot 63 versenyző. 2 pontot szerzett 7, 1 pontot 5 tanuló. 0 pontos 6 tanuló dolgozata.

B. 4890. *Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:*

$$x-y-\frac{x}{y}-\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^4}{y^4}=2017.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti)

Megoldás. Írjuk fel az $\frac{x}{y}$ pozitív racionális számot egymáshoz relatív prím a és b pozitív egész számok hányadosaként: $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$. Az egyenlet átrendezésével azt kapjuk, hogy

$$x-y-2017=\frac{x}{y}+\frac{x^3}{y^3}-\frac{x^4}{y^4}$$

egész szám, vagyis

$$\frac{x}{y}+\frac{x^3}{y^3}-\frac{x^4}{y^4}=\frac{a}{b}+\frac{a^3}{b^3}-\frac{a^4}{b^4}=\frac{ab^3+a^3b-a^4}{b^4}$$

szintén egész szám. A számláló tehát osztható b^4-nel, így b-vel is. A számláló első két tagja b-nek többszöröse, tehát a^4-nek is oszthatónak kell lennie b-vel. Az a és b relatív prímek, emiatt innen már csak $b=1$ lehetséges. Ezzel beláttuk, hogy az $\frac{a}{b}$ tört egész szám. Legyen most $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}=z$ pozitív egész. Ekkor $x=yz$, ahol x, y, z mind pozitív egészek. Ezzel a jelöléssel az eredeti egyenlet könnyebben kezelhető formában írható:

$$yz-y-z-z^3+z^4=2017.$$

Innen a megoldás befejezésére két lehetőséget is megmutatunk.

I.) Adjunk mindkét oldalhoz egyet, majd alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát:

$$\begin{aligned} yz-y-z+1-z^3+z^4&=2018,\\ (y-1)(z-1)+z^3(z-1)&=2018,\\ (z-1)(y-1+z^3)&=2018. \end{aligned}$$

Az 1009 prímszám, a 2018 tehát csak kétféleképpen bomlik pozitív egészek szorzatára: $2018=1\cdot 2018=2\cdot 1009$. A bal oldalon mindkét tényező pozitív kell legyen, hiszen $z^3+y-1\geqslant 1+1-1=1$. Továbbá az is biztos, hogy

$$z^3+y-1\geqslant z+y-1>z-1,$$

így csak $z^3+y-1=1009$ és $z-1=2$, illetve $z^3+y-1=2018$ és $z-1=1$ lehetséges.

Az elsőből $z=3$, $y=1009+1-27=983$, $x=2949$, a másodikból pedig $z=2$, $y=2018+1-8=2011$, $x=4022$ adódik. Ellenőrzéssel látható, hogy mindkét gyökpár kielégíti az egyenletet.

II.) Először megmutatjuk, hogy $z\geqslant 7$ esetén nincs megoldása az egyenletnek. Ha $z\geqslant 7$, akkor

$$\begin{aligned} yz-y-z-z^3+z^4\geqslant 7y-y-z-z^3+z^4>z^4-z^3-z=z(z^3-z^2-1)\geqslant\\ \geqslant 7(z^3-z^2-1)=7z^2(z-1)-7\geqslant 7\cdot 49\cdot 6-7=2051. \end{aligned}$$

Az is azonnal adódik, hogy $z=1$ esetén $yz-y-z-z^3+z^4=-1$, így elegendő a továbbiakban $z=2,3,4,5,6$ vizsgálata. Az egyenletből kifejezzük y-t és sorra megvizsgáljuk, hogy melyik z esetén kapunk egész értéket y-ra:

$$y=\frac{2017-z^4+z^3+z}{z-1}.$$

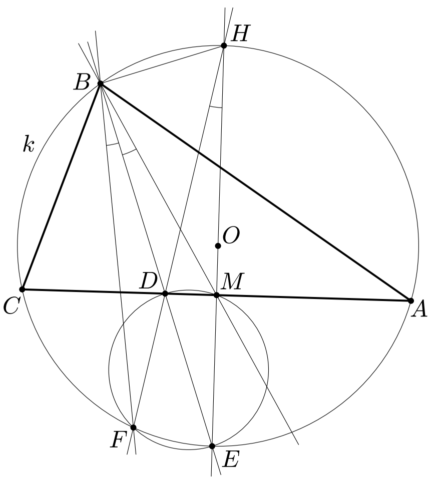
A $z=6$ esetén a tört $\frac{943}{5}$, a $z=5$-re a tört $\frac{1522}{4}$, végül $z=4$-re a tört $\frac{1829}{3}$, egyik sem egész. Marad a $z=3$, ahol $y=983$, továbbá $z=2$, ahol pedig $y=2011$. Az elsőre $x=2949$, a másodikra $x=4022$.

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 127 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 26, 4 pontot 33 tanuló. 3 pontos, illetve 2 pontos egyaránt 23-23 tanuló dolgozata. 1 pontot kapott továbbá 9, 0 pontot 13 versenyző.

B. 4893. *Az ABC háromszögben $AB \neq BC$. A B pontból induló szögfelező a háromszög AC oldalát a D pontban, körülírt körét pedig (a B ponton kívül) az E pontban metszi. A DE szakasz, mint átmérő fölé emelt kör a körülírt kört az E, majd másodszor az E-től különböző F pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a BF egyenest a BD tengelyre tükrözve az ABC háromszög súlyvonalát kapjuk.*

(*6 pont*)



Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit.

Legyen az A, B, C pontokon átmenő k kör középpontja O. Ismert, hogy $AB \neq BC$ esetén az $ABC\sphericalangle$ szögfelezőjének és az AC oldalfelező merőlegesének pontosan egy közös pontja van, és ez a közös pont rajta van az ABC háromszög köré írt körén. Ez a közös pont az E pont, azaz E rajta van az AC oldalfelező merőlegesén.

Jelöljük a OE oldalfelező merőlegesnek és az AC oldalnak a metszéspontját (vagyis AC felezőpontját) M-mel. Mivel $EMD\sphericalangle = 90°$, azért Thalész tétele alapján M rajta van a DFE háromszög körülírt körén. Az EO egyenes messe másodszor a k kört H-ban. Mivel $DFE\sphericalangle = 90°$ és $HFE\sphericalangle = 90°$ (Thalész tétele alapján), a DF egyenes átmegy H-n.

Thalész tétele alapján $HBE\sphericalangle = 90°$, mivel HE átmérő. Vagyis, mivel $HBD\sphericalangle + DMH\sphericalangle = 90° + 90° = 180°$, a $HBDM$ négyszög húrnégyszög. Így a kerületi és középponti szögek tétele alapján $MHD\sphericalangle = MBD\sphericalangle$.

Mivel $HBFE$ is húrnégyszög, ismét a kerületi és középponti szögek tétele alapján $EHF\sphericalangle = EBF\sphericalangle$.

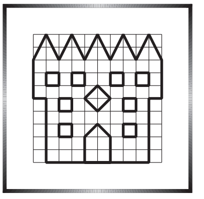
Tehát $DBF\sphericalangle = MBD\sphericalangle$, így BF tükörképe BD-re BM, azaz BF tükörképe valóban a súlyvonal.

Több dolgozat alapján

Többen megjegyezték, hogy a feladat állítása ekvivalens azzal, miszerint a BF egyenes az ABC háromszög egy *szimmediánja.* A szimmediánról bővebben olvashatunk Surányi László: *A háromszög kevésbé ismert nevezetes pontjairól II. rész* (KöMaL – 1984/november) cikkében*.

Összesen 54 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 41, 5 pontot 4 versenyző. 4 pontos 1, 3 pontos 1, 1 pontos 3 tanuló dolgozata. 0 pontot kapott 2 versenyző, további 2 tanuló dolgozata nem versenyszerű.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (571–576.)



K. 571. Egy iskola vezetése elrendelte, hogy a tanulók nadrágszárának hossza nem lehet kisebb, mint testmagasságuk egyötöde. Samu nadrágszára hosszának ügyében vizsgálat indult, és az etikai bizottság megállapította, hogy ez éppen a megengedett minimum hossznál annak $\frac{2}{7}$ részével kisebb. Sőt, azt is megállapították, hogy ha 3 cm-rel hosszabb lenne az a nadrágszár, akkor még mindig 20%-kal kisebb lenne, mint a minimális megengedett hossz. Milyen magas Samu?

K. 572. Tom Sawyer és Huckleberry Finn együtt festették a kerítést. Tom egyedül 3 óra alatt, Huck egyedül 4 óra alatt festené le a kerítést. Délben kezdték a munkát, de egy idő után Huck elunta, és elindult pecázni. Tom 10 percig győzködte (ez idő alatt egyikük sem festett), de nem tudta rávenni, hogy tovább dolgozzon, így hozzávágott egy döglött patkányt, és egyedül fejezte be a munkát. 2 óra 34 perckor készen lett, és elment ebédelni. Amikor Huck és Tom együtt dolgoznak, akkor munkatempójuk 20%-kal csökken, mert folyton ugratják egymást. Mikor hagyta abba Huckleberry Finn a festést?

K. 573. Kati, Sanyi és Pisti elmentek az édességboltba. Kati vett 9 egyforma bonbont karácsonyi ajándéknak, de csak 11 000 Ft volt nála, ezért kölcsönkérte Sanyi összes aprópénzét, így pont ki tudta fizetni a bonbonok árát. Közben Sanyinak is megtetszett ez a bonbonfajta, ezért ő is vett 13 dobozzal ajándékozásra, de mivel neki csak kereken 15 000 Ft-ja maradt, ezért kölcsönkérte Pisti összes aprópénzét, és így éppen ki tudta fizetni a bonbonok árát. Tudjuk, hogy egy doboz bonbon ára 0-ra végződik, és a Sanyi, illetve a Kati által kölcsönkért pénzösszeg 1000 Ft alatt volt. Mennyivel tartozik Kati Sanyinak, illetve Sanyi Pistinek?

K. 574. Egy pozitív N számjegyeinek összege ugyanannyi, mint a szám kétszeresében a számjegyek összege.

a) Keressünk egy-egy ilyen kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű számot.

b) Mutassuk meg, hogy N osztható 9-cel.

---

*`http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=198412`.

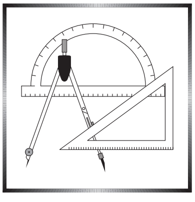
K. 575. Egy összejövetelen hat ember vesz részt. Bármely három résztvevő között van kettő, aki nem ismeri egymást. Bizonyítsuk be, hogy van három olyan résztvevő közöttük, akik között nincsen ismeretség. (Az ismeretség kölcsönös.)

K. 576. Egy dobozban piros és kék golyók vannak. Tudjuk, hogy $\frac{2}{5}$ annak a valószínűsége, hogy a dobozból egy golyót véletlenszerűen húzva kék színű akad a kezünkbe. Ha kiveszünk a dobozból egy kék golyót, akkor $\frac{5}{8}$ lesz annak a valószínűsége, hogy a dobozból egy golyót véletlenszerűen kiválasztva pirosat kapunk. Hány golyó van a dobozban?

❄

Beküldési határidő: 2018. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1455–1461.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1455. Egy szigeten különös pénzérmék vannak forgalomban: a pénznem alapegységei három egymástól különböző egyjegyű szám, és ezeken túl létezik az ő tízszeresük, százszorosuk, ezerszeresük. Tudjuk továbbá, hogy egy kiló kókuszdió árát ki lehet fizetni két egyforma és egy tőlük különböző harmadik pénzérme segítségével, a kétszer annyiba kerülő maracujához viszont a harmadik pénzérme helyett annak tízszeresét kell a másik kettőhöz hozzátenni. Határozzuk meg, hogy milyen értékű érmék vannak forgalomban, ha tudjuk, hogy nincsen 1-es, és a legértékesebb érme a 7000-es.

C. 1456. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan négyzetszám, amely felírható $3^a + 9^b + 1$ alakban (a, b pozitív egész számok).

Feladatok mindenkinek

C. 1457. Az egységsugarú körbe írt egyenlőszárú, derékszögű háromszöget a kör középpontja körül 45 fokkal elforgattuk. Határozzuk meg a két háromszög közös részének kerületét és területét.

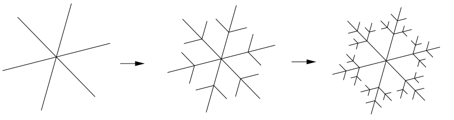
C. 1458. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x+11} + \sqrt{x^2+11x} - \sqrt{x} - x = 4.$$

C. 1459. Tükrözzük az $y=x^2$ egyenletű normál parabolát az $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ pontra. Mekkora szögben metszi egymást a két parabola?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1460. Egy speciális, forgásszimmetrikus hópehely képződése a következőképpen zajlik: minden másodpercben a hópehely végződéseinek felezőpontjából indulva két, egyenként harmadakkora új végződés keletkezik. (A hópehely kiinduló állapota és a képződés első két lépése az *ábrán* látható.) Hány darab 10 mikrométer hosszúságú végződése lesz a hópehelynek 6 másodperc elteltével, ha a hópehely átmérője 4,32 mm?



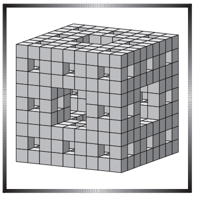
C. 1461. A pozitív egész számok esetén értelmezzük a $\circ$ műveletet, amelyről a következő dolgokat tudjuk: *i*) $1\circ 1=3$; *ii*) $a\circ b=b\circ a$ minden a, b számra; *iii*) $a\circ(b+1)=a\circ b+(a+1)+2b$ minden a, b esetén. Adjuk meg $2017\circ 2018$ értékét.

❄

Beküldési határidő: 2018. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (4921–4929.)



B. 4921. Bizonyítsuk be, hogy ha n és k pozitív egészek, akkor $n+k$ egész szám közül mindig ki lehet választani legalább $(k+1)$-et úgy, hogy az összegük n-nel osztható legyen.

(*5 pont*) Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)

B. 4922. Oldjuk meg az egész számhármasok körében a következő egyenletrendszert:

$$3x-y^2=\frac{z}{2},$$

$$3y+x^2=\frac{3z}{2}.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 4923. Az ABC háromszög A-ból induló belső szögfelezője a BC oldalt E-ben, a B-ből induló belső szögfelezője az AC oldalt F-ben metszi. Jelölje O a háromszög beírt körének középpontját. Mekkora lehet a C-nél levő szög, ha az $OFA\triangle$ és a $OBE\triangle$ területének összege egyenlő az $AOB\triangle$ területével?

(*3 pont*)

B. 4924. Tekintsük egy háromszög hozzáírt köreinek középpontjaiból a hozzájuk tartozó oldalakra bocsátott merőlegeseket. Igazoljuk, hogy ez a három egyenes egy pontban metszi egymást.

(*4 pont*)

B. 4925. Igazoljuk, hogy ha az $a_1; a_2; \ldots; a_{2017}$ nemnegatív valós számok átlaga 1, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a_1}{a_1^{2018}+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}}+\frac{a_2}{a_2^{2018}+a_3+a_3+\ldots+a_{2017}+a_1}+\ldots+$$

$$+\frac{a_{2017}}{a_{2017}^{2018}+a_1+a_2+\ldots+a_{2016}}\leqslant 1.$$

(*4 pont*)

B. 4926. Az ABC hegyesszögű háromszögben a B-ből és C-ből induló magasság talppontja D, illetve E. Az E pont tükörképe az AC és a BC egyenesre S, illetve T. Az O középpontjú CST kör az AC egyenest másodszor az $X\neq C$ pontban metszi. Mutassuk meg, hogy az XO és DE egyenesek merőlegesek egymásra.

(*5 pont*) (*Koreai feladat*)

B. 4927. Legyen A és B vektorok egy-egy véges halmaza, továbbá legyen $A+B=\{\mathbf{v}+\mathbf{w}\mid \mathbf{v}\in A,\ \mathbf{w}\in B\}$. Mutassuk meg, hogy $|A+B|\geqslant |A|+|B|-1$.

(*5 pont*)

B. 4928. Az égig érő fa törzse egy láb magasan kétfelé ágazik. A továbbiakban ágnak két elágazás közti részt tekintünk, amin nincs további elágazás. Az égig érő fa minden ága egyenes és egy lábbal magasabban végződik, mint a talajhoz közelebbi vége. Egy ág gyermekeinek tekintjük az ág magasabban lévő végéből kiinduló ágakat, amiket egyúttal egymás testvéreinek is nevezünk. Az égig érő fa minden ágának van legalább két gyermeke, és ha nem pont két gyermeke van, akkor van olyan testvére, akinek pontosan két gyereke van. A testvéreknek mindig különböző számú gyerekük van. Ha egy ágnak több mint két gyereke van, akkor van olyan testvére, akinek pontosan eggyel kevesebb gyereke van, mint neki. Hány ág indul ki az n láb magasan lévő elágazásokból?

(*6 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

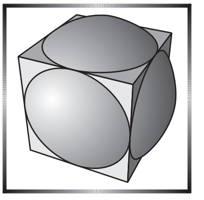
B. 4929. Adott az $\mathcal{E}$ ellipszis és a $\mathcal{H}$ hiperbola a térben úgy, hogy síkjaik merőlegesek egymásra, valamint $\mathcal{E}$ fókuszai $\mathcal{H}$ valós tengelyének végpontjai, $\mathcal{H}$ fókuszai pedig $\mathcal{E}$ nagytengelyének végpontjai. Legyen A és B két rögzített pont a $\mathcal{H}$ hiperbola különböző ágain, továbbá P legyen az ellipszis egy tetszőleges pontja. Mutassuk meg, hogy a $PA+PB$ távolságösszeg nem függ P megválasztásától.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2018. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (713–715.)



A. 713. Azt mondjuk, hogy a valós számokból álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozat *terpeszkedő,* ha minden pozitív egész j-re $i<j$ esetén $|a_i - a_j| \geqslant \frac{1}{j}$. Határozzuk meg az összes olyan C pozitív valós számot, melyre megadható a $[0;C]$ intervallumban egy terpeszkedő sorozat.

Javasolta: *Di Giovanni Márk* (Cambridge)

A. 714. Adottak a páronként diszjunkt $D_1, D_2, \ldots, D_n$ körlemezek az euklideszi síkon ($n \geqslant 2$). Jelölje $k=1,2,\ldots,n$-re f_k a D_k-t határoló körre való inverziót. (Az f_k függvényt D_k középpontjának kivételével a sík minden pontjában értelmezzük.) Hány fixpontja lehet a sík lehető legbővebb részhalmazán értelmezett $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$ transzformációnak?

Javasolta: *Váli Benedek* (Szeged)

A. 715. Legyenek a és b pozitív egész számok. Egy $a \times b$ méretű téglalapot olyan négyzetekkel fedünk le hézagmentesen és átfedések nélkül, melyek oldalhossza 2-hatvány, vagyis a lefedéshez 1×1-es, 2×2-es, 4×4-es, $\ldots$ méretű négyzeteket használhatunk fel. Jelölje M azt, hogy egy ilyen fedéshez minimálisan hány négyzetet kell felhasználnunk. Az a és b számok egyértelműen felírhatók különböző kettőhatványok összegeként: $a=2^{a_1}+\ldots+2^{a_k}$, $b=2^{b_1}+\ldots+2^{b_\ell}$. Mutassuk meg, hogy

$$M=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} 2^{|a_i-b_j|}.$$

Beküldési határidő: 2018. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

MŰEGYETEM 1782

BME TTK MATEMATIKA

Matematika BSc **BSc**

Alapozás után, a harmadik félévtől:
- elméleti és alkalmazott specializáció;
- adattudomány, mérnöki matematika, operációkutatás és sztochasztika sáv.

Alkalmazott matematikus MSc **MSc**

A specializációk és képzési nyelvük:
- alkalmazott analízis, magyar;
- operációkutatás, magyar;
- pénzügy-matematika, angol;
- sztochasztika, angol.

Matematikus MSc **MSc**

Többféle tanulmányi rend:
- analízis vagy optimalizálás specializáció,
- személyre szabott egyéni tanulmányi rend.

Felkészítés a tudományos karrierre.

Matematikus PhD **PhD**

Matematika- és
Számítástudományok
Doktori Iskola

Diákjaink
sikeresen szerepelnek

a nemzetközi
matematika-
versenyeken és

az Országos
Tudományos Diákköri
Konferenciákon

BME egy lehetőség
a mérnöki és
gazdasági
alkalmazások
kipróbálására és
a szakmai tapasztalat
megszerzésére

Elhelyezkedési
lehetőségek
széles választéka

http://felvi.math.bme.hu

Matematikai képzések az ELTE TTK-n

Kedves leendő Egyetemista! Feltételezzük, hogy a *KöMaL* olvasójaként szívesen foglalkozol matematikával, és felmerülhetett már Benned az a gondolat, hogy életpályádul ennek a szép tudománynak a művelését választod, illetve szeretnél megismerkedni alkalmazásaival a műszaki, gazdasági és pénzügyi élet különböző területein. Egy amerikai felmérés évről-évre a legjobb foglalkozások között tartja számon a matematikust, és a szintén matematikai előképzettséget igénylő aktuáriust és statisztikust (`http://www.careercast.com/jobs-rated/best-jobs-2016`). Esetleg még nem döntöttél, de leginkább matematikából folytatnál felsőfokú tanulmányokat?

Minderre kitűnő lehetőség nyílik az ország egyik legnagyobb múltú egyetemén, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, ahol világhírű professzoroktól tanulhatsz, a többi között *Laczkovich Miklóstól,* a Tarski-féle kör négyszögesítési probléma megoldójától és a Wolf-, Bolyai- és Kyoto-díjas *Lovász Lászlótól,* a Magyar Tudományos Akadémia elnökétől. Pezsgő diákélet vár rád az ELTE korszerű számítógépparkkal felszerelt, a KöMaL szerkesztőségének is otthont adó modern lágymányosi épületegyüttesében.

A bolognai képzési rendszerbe illeszkedik BSc képesítést nyújtó hároméves matematikai alapképzésünk. Itt az első évben többféle lehetőség közül választhatsz, hogy előismereteidnek, képességeidnek vagy tanulási sebességednek megfelelően milyen szinten, milyen részletességgel, milyen mélységben sajátítod el az első év kötelező törzsanyagát. Az első év végén pedig arról dönthetsz, hogy az alábbi három szakirány melyikén kívánsz továbbhaladni.

A **matematikus szakirány** programja sokat megőriz méltán világhírű hagyományainkból, ugyanakkor szilárd alapokat nyújt a modern matematika műveléséhez, jól felkészítve hallgatóinkat a leendő kutatói munkára.

Az **alkalmazott matematika** ma már az élet szinte minden területén nélkülözhetetlen, és az ilyen képzettségű munkaerő iránt egyre növekszik az igény. Ezt a szakirányt tehát azoknak ajánljuk, akiket elsősorban a matematika alkalmazásai érdeklik.

Az előzőkhöz képest viszonylag új, **matematikai elemző** szakirányt azon jelentkezők számára indítjuk, akik ismereteiket később inkább a matematikán kívül szeretnék majd gyümölcsöztetni. Itt szerzett tudásukat hasznosíthatják például gazdasági területen, médiában, a matematika népszerűsítésében, a közművelődésben.

A szakirányokról és a képzés egyéb vonatkozásairól további részletek a `http://www.math.elte.hu/` honlapon a Képzések menüpont alatt találhatók.

A legkiemelkedőbb hallgatók az egyetemi oktatómunkába is bekapcsolódhatnak, és világszerte jó eséllyel pályázhatnak ösztöndíjakra, külföldi részképzésre (pl. az Erasmus program keretében).

Az alapképzést további kétéves szakasz követ(het)i (mesterképzés vagy röviden MSc), egyetemünkön a Matematikai Intézet gondozásában matematikus, alkalmazott matematikus, valamint biztosítási és pénzügyi matematika mesterszakok indulnak. BSc-t végzett hallgatóink természetesen más (bel- és külföldi) oktatási intézmény programjain is folytathatják tanulmányaikat. A mesterszakot végzettek közül a legkiválóbbak számára biztosítjuk az egyetemen a doktori fokozat megszerzésének lehetőségét (PhD-képzés).

Felhívjuk a figyelmet, hogy 2013-tól a matematika tanár képzés újfent osztatlan rendszerben történik (l. az erre vonatkozó külön tájékoztatónkat).

Egyetemünkön gondosan ápolt hagyomány, hogy a rátermett, tehetséges diákok neves professzorok vezetésével bekapcsolódnak a tudományos kutatásba. A legkiválóbb hallgatók matematikai versenyeken is sikerrel szerepelnek, például az Egyetemi Hallgatók Nemzetközi Matematikaversenyén az elmúlt tíz évben kétszer is az ELTE csapata végzett az élen több, mint 70 egyetem csapatának versenyében – olyan nagyhírű egyetemeket is megelőzve, mint a Yale, a Princeton vagy a Moszkvai Állami Egyetem.

Matematika tanárképzés az ELTE TTK-n

Az ELTE Természettudományi Karán sok évtizedes múltra tekint vissza a matematika szakos tanárképzés. Az általános és középiskolák részéről mindig jelentős igény mutatkozott a nálunk végzett matematika tanárok iránt, akik közül sokan külföldön is sikeres oktatói pályát futottak be.

A matematika szakos tanári pályát elsősorban azoknak a középiskolás diákoknak ajánljuk, akiknek öröm érdekes matematikai feladatokon gondolkodni és jó érzést okoz a megoldásokra másokat is rávezetni, másokkal is megosztani azt az élvezetet, amit a matematika megismerése jelent.

A 2013/2014-es tanévtől kezdődően a tanárképzés osztatlan formában zajlik. Tanári szakképzettséget kétszakos formában lehet szerezni $4+1$ vagy $5+1$ éves képzés keretében, amelyben a plusz egy év szakmai gyakorlat teljesítésére szolgál. Ily módon a tanárképzésre való jelentkezés során a leendő hallgatóknak egy szakpárt kell megjelölni. Az ELTE-n a matematika szak mellé természettudományos szakokon és az informatikán kívül választani lehet a bölcsész szakok (például a magyar, a történelem vagy a nyelvszakok) közül is. A tanárképzés első három évében szakpáronként egységes képzésben részesülnek hallgatóink. A matematika szakterületi tárgyaknál az oktatás szemléletében már az első három évben is nagy hangsúlyt kap az iskolai matematikatanítással való kapcsolat. A harmadik év végén a hallgatónak kell eldönteni, hogy általános iskolai vagy középiskolai tanári végzettséget kíván szerezni a két szakjából. Ezen döntéstől függően vagy egy 2 féléves vagy pedig egy 4 féléves képzési programot kell elvégezni. Ekkor kerül sor a szaktárgyi tanítási gyakorlatok teljesítésére, melyekre az ELTE hallgatóinak a legjobb budapesti iskolákban, kiváló vezetőtanárok irányítása mellett nyílik lehetőségük. A szakterületi záróvizsgák letétele után a hallgatóknak még egy egyéves szakmai gyakorlatot kell elvégezniük egy iskolában, melynek során módjuk lesz begyakorolni a tanári munka mesterfogásait.

Informatikából kitűzött feladatok

I. 445. A matematikában a π nemcsak fontos természeti állandó, hanem a tudásterület egyik jelentős szimbóluma is. Minél pontosabb meghatározása ezért régóta foglalkoztatja nemcsak a matematikusokat, hanem a matematika iránt érdeklődő laikusokat is. Az évszázadok során sokféle közelítő eljárást dolgoztak ki a π meghatározására. Ezek közül Machin sorozata egy gyorsan konvergáló, tehát viszonylag kevés számú tag kiszámításával is kellően sok jegyre pontos eredményt adó megoldás. Machin a

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

összefüggés sorbafejtésével a

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \cdots\right] - \\ - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \ldots\right]$$

képletet kapta.

Készítsünk programot, amely a fenti sorozat alkalmazásával meghatározza π értékét legalább 1000 tizedesjegy pontossággal. A nagy pontosságú aritmetikai műveleteket (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) nekünk kell megvalósítanunk. A megoldás elkészítése során legfeljebb 32 bit pontosságú egész számokat használjunk, és a ne alkalmazzuk a programozási nyelv vagy fejlesztői környezet által biztosított, 32 bitnél több jeggyel dolgozó aritmetikai műveleteket támogató modulokat sem.

A kapott eredmény ellenőrzésére a

`http://www.geom.uiuc.edu/~huberty/math5337/groupe/digits.html`

címen található adatokat javasoljuk.

Beküldendő egy `i445.zip` tömörített állományban a megoldás forráskódja, a megoldás által készített, a π első 1000 tizedesjegyét tartalmazó szöveges állomány, továbbá a megoldás során használt eljárások rövid dokumentációja.

I. 446 (É). A Rubicon egy történelmi ismeretterjesztő lap, melynek első lapszáma 1990. február 1-jén jelent meg. 2017. szeptemberéig összesen 311 számot adtak ki. Az eddig az időpontig megjelent lapszámok legfontosabb adataiból készítsünk adatbázist. Forrásként a kiadvany.txt és ajanlo.txt állományok állnak rendelkezésünkre, melyek UTF-8 kódolású szövegfájlok, az első sorok a mezőneveket tartalmazzák. Néhány számot dupla számként adtak ki, így többször szerepel két külön megjelenési hónapnál, azonos szám és különböző „azonosító” számok alatt.

1. Készítsünk új adatbázist rubicon néven. A mellékelt adatállományokat importáljuk az adatbázisba a fájlnévvel azonos nevű táblákba. Beolvasáskor állítsuk be a megfelelő típusokat és kulcsokat.

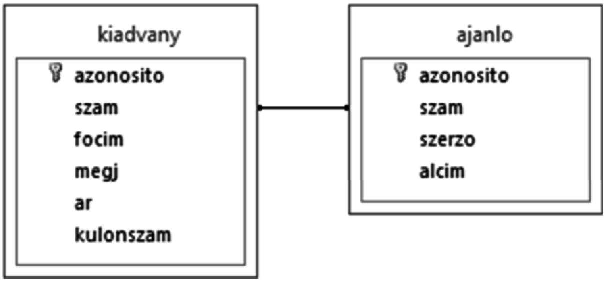
   Táblák:

kiadvany (azonosito, szam, focim, megj, ar, kulonszam)

azonosito	az adott példány megjelenés azonosítója (szám), ez a kulcs;
szam	az adott kiadvány azonosítója (szám);
focim	az adott szám címe (szöveg);
megj	kiadás éve, hónapja és napja (dátum);
ar	az adott szám ára (szám);
kulonszam	az adott számot különszámként adták-e ki (logikai).

ajanlo (azonosito, szam_azon, alcimek)

azonosito	az adott cikk azonosítója (szám), ez a kulcs;
szam	az adott szám azonosítója (szám);
szerzo	az alcímhez tartozó szerző (szöveg);
alcim	az adott számhoz tartozó alcím (szöveg).



Készítsük el a következő feladatok megoldásait. Az egyes lekérdezéseknél ügyeljünk arra, hogy mindig csak a kért értékek jelenjenek meg és más adatok viszont ne. A megoldásainkat a zárójelben lévő néven mentsük el.

2. Lekérdezés segítségével adjuk meg, hogy egy számnak hány alcíme van feltüntetve az adatbázisban. Minden szám egyszer jelenjen meg, és mellette legyen látható az alcímek száma. (2alcimek)
3. Lekérdezés segítségével adjuk meg azon számok főcímét, amelyek nevében van arab szám. (3szamok)
4. Lekérdezés segítségével írassuk ki azon számok főcímét, amik különszámok voltak. (4kulonszam)
5. Mennyibe kerülne megrendelni az összes 2015-ben kiadott lapot, 2 példányban? (5ossz2015)
6. Határozzuk meg, hogy van-e, és ha igen, melyik vagy melyek azok az évek, amikor az összes hónap lapszámát lehet utánrendelni. A különszámokat ne vizsgáljuk. (6mind)
7. Számoljuk össze, hány lapszám főcímében szerepel a *szent* szó. (7szent)

8. Van-e olyan szám, amihez nem tartozik alcím az adatbázisban? Ha igen, írassuk ki a számok főcímét és kiadásának dátumát. (8nincsalcim)
9. Az alcímek között néhány helyen meg van adva a cikk szerzője. Írassuk ki azoknak a nevét, akik többször is írtak cikket. (9tobbcikk)
10. Készítsünk jelentést, amely év szerint csoportosítva, a lapszám főcíme szerinti ábécérendben jeleníti meg az adott szám árát. Dupla szám esetében két hónapnál is megjelenhet az adott szám. Az ár mögött jelenjen meg a „Ft" mértékegység. (10jelent)

Beküldendő egy tömörített `i446.zip` állományban az adatbázis, valamint egy rövid dokumentáció, amely megadja az alkalmazott adatbázis-kezelő nevét és verziószámát.

A feladat forrása:

`http://www.rubicon.hu/megrendelheto/termekek/folyoirat/`

(utolsó letöltés: 2017. 10. 01.).

I. 447. A most megjelenő **C. 1460.** feladatban leírt hópehely grafikus megvalósításával készítsünk hóesés szimulációt. A havazás egy percig tartson úgy, hogy kezdetben kevés, majd egyre több, végül ismét kevés hópehely jelenjen meg a képtér felső részén. A hópelyhek mérete változatos legyen, de a legnagyobb és legkisebb átmérőjének aránya ne érje el a kettőt. A hópelyhek a képtér tetején vegyesen, a képződés első vagy második lépése utáni állapotban hulljanak lefelé. A hópelyhek esési sebességét a méretükkel egyenesen arányosra állítsuk: a legkisebbek essenek a legnagyobb sebességgel. A képtér alján a hópelyhek tűnjenek el.

A feladat megoldásához a versenykiírásban szereplő programozási nyelvek mellett HTML/CSS/Javascript segítségével készült megoldásokat is elfogadunk. A versenykiírás szerinti programozási nyelveken készült megoldások legyenek fordíthatók és futtathatók kiegészítő grafikus könyvtárak nélkül, tehát csak a fejlesztői környezetben megtalálható, beépített grafikai modulok fölhasználásával. A böngészőben futó megoldásoknak offline is működniük kell, azaz nem tartalmazhatnak külső hivatkozásokat. Javasoljuk például a HTML5 Canvas használatát.

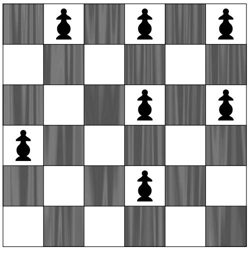
Beküldendő egy `i447.zip` tömörített állományban a program forráskódja, továbbá egy rövid dokumentáció, amely tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 23. Egy $N \times N$-es „sakktábla" világos színű mezőin S számú sötét gyalogot helyezünk el. Feladatunk az, hogy egy világos futó segítségével közülük minél többet leüssünk. A futó a szokásos módon mozoghat a táblán, de irányt váltani csak akkor tud, ha olyan mezőre lép, amelyen éppen leüt egy gyalogot. A futó kezdeti helye nincs rögzítve, azt mi választhatjuk meg.

Készítsünk programot, amely megadja, hogy adott állások esetén legföljebb hány gyalogot lehet a tábláról levenni.

A program standard bemenete az N és S egészek, valamint a következő S sor mindegyikében egy egész számpár. A számpárok a sötét gyalogok helyzetét adják meg: a bal felső (sötét) mezőtől indulva az egyes gyalogok sorát és oszlopát. A program standard kimenete legyen a levehető gyalogok maximális száma.

Példa bemenet (az újsor karaktereket / jelöli)	Kimenet
`6 7 / 1 2 / 1 4 / 1 6 / 4 1 / 3 4 / 5 4 / 3 6 /`	`4`



Magyarázat: a `4 1`, `1 4`, `3 6` és `5 4` mezőkön lévő gyalogok leütése pl. ebben a sorrendben lehetséges, ha a futó a `4 1` mezőről indul, de sajnos a többi gyaloghoz a futó nem tud eljutni.

Korlátok: $4 \leqslant N \leqslant 100$, $4 \leqslant S \leqslant 2 \cdot N$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb N értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `is23.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

(*Az októberi számunkban megjelent* **K. 513.** *feladat alapján*)

S. 122. Legyen A az első P prímszám halmaza, és B egy N elemű, pozitív egészeket tartalmazó halmaz. Készítsünk 1-től kiindulva egy sorozatot, amelyben a sorozat következő tagja az előzőnek egy A-beli prímmel vett szorzata. Feladatunk az, hogy úgy képezzük a sorozat tagjait, hogy abban a lehető legtöbb B-beli szám forduljon elő.

Készítsünk programot, amely megadja, hogy adott A és B halmaz esetén mennyi a legtöbb olyan B-beli szám, amely egy szorzással keletkező sorozat tagjaként a fenti módon előállítható. A program standard bemenete P és N, valamint a következő N sor mindegyikében egy pozitív egész szám a B halmazból. A program standard kimenete a képzett sorozatban előforduló B-beli számok maximális száma.

Példa bemenet (az újsor karaktereket / jelöli)	Kimenet
`3 10 / 5 / 6 / 8 / 10 / 9 / 12 / 21 / 16 / 18 / 24 /`	`3`

Korlátok: $2 \leqslant P \leqslant 100$, $2 \leqslant N \leqslant 10^6$, a B halmaz minden eleme $\leqslant 10^9$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb P és N érték esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `s122.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2018. február 10.

Megoldásvázlatok
a 2017/9. szám emelt szintű fizika gyakorló feladatsorához

Tesztfeladatok

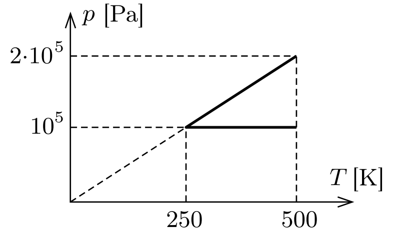
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	B	B	C	A	A	C	C	B	A	C	D	B	C	C

Számolásos feladatok

1. *a*)

	p [Pa]	V [m^3]	T [K]
1. állapot	$2 \cdot 10^5$	0,1	500
2. állapot	10^5	0,1	250
3. állapot	10^5	0,2	500

b)



c) Az első részfolyamatban nincs térfogatváltozás, ezért a munka nulla, a másodikban $p\Delta V = 10$ kJ nagyságú munkát végez a gáz.

d) Mivel a kezdeti és a végső hőmérséklet azonos, a folyamat során a belső energia változása zérus. Az I. főtétel értelmében amennyi a gáz munkavégzése, annyi hőt kell felvegyen, vagyis 10 kJ-t.

2. *a*) A voltmérőn és az ellenálláson ugyanaz az áram folyik, ezért az ellenálláson tizedakkora feszültség esik, mint a voltmérőn. Összesen a kettőn ezért $U_0 = 1{,}1 \cdot 91\ \mathrm{V} \approx 100$ V, ekkora volt a beállított egyenfeszültség.

b) Az áramkör ohmos ellenállása (a párhuzamosan kapcsolt 1 kΩ-os és 10 kΩ-os ellenállás eredője) $R_{\text{eredő}} = 909\ \Omega$. A kondenzátor kapacitása az *a*) kérdésben megadott töltés és feszültség hányadosa:

$$C = \frac{320\ \mu\mathrm{C}}{91\ \mathrm{V}} = 3{,}5\ \mu\mathrm{F}.$$

Ennek megfelelően a kapacitív ellenállás

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \approx 910\ \Omega.$$

Az áramkörben folyó áram effektív értéke

$$I=\frac{U_0}{Z}=\frac{U_0}{\sqrt{R_{\text{eredő}}^2+X_C^2}}=\frac{230\ \text{V}}{1286\ \Omega}=0{,}18\ \text{A},$$

ahonnan az ellenállásra jutó (keresett) feszültség

$$U=IR_{\text{eredő}}=163\ \text{V}.$$

3. A szögemeltyű egy kétoldalú emelőként működik, tehát ahhoz, hogy a gumitömítés 14 N erővel nyomja a szelepet, az emeltyű végét $F=2$ N erővel kell fölfelé nyomja az úszó. Az úszó egyensúlyban van, a rá ható három erő eredője zérus.

$$mg+F-V_{\text{bemerülő}}\cdot\varrho_{\text{víz}}g=0,$$

ahol F az az erő, amivel az emeltyű vége nyomja le az úszót (ami ugyanakkora, mint amivel az úszó nyomja fölfelé az emeltyű végét). Az adatokat behelyettesítve és az egyenletet rendezve, a bemerülő térfogatrészre $2{,}25\cdot10^{-4}$ m^3 adódik. Ez az úszó térfogatának háromnegyed része.

4. *a*) $\omega_0=2\pi\,n_0\approx10{,}5\ \frac{1}{\text{s}}$.

b) Mivel a fékezés egyenletes, az átlagos fordulatszám a kezdeti (maximális) fordulatszám fele, így a fékezés alatti fordulatok száma

$$N=\frac{1}{2}n_0\,\Delta t=2{,}5.$$

c) A kereket a csúszási súrlódási erő forgatónyomatéka fékezi le. A

$$\mu F_{\text{nyomó}}\,r=\Theta\frac{\omega_0}{\Delta t}$$

mozgásegyenletből a nyomóerőre 7 N-t kapunk.

d) A kerék szélső pontja egyenletesen változó körmozgást végez, ezért a sebességének nagysága is és iránya is változik. A gyorsulásvektor két összetevője az érintőirányú

$$a_1=r\beta=r\frac{\omega_0}{\Delta t}\approx1{,}24\ \frac{1}{\text{s}^2}$$

és a sugárirányú $a_2=r\omega^2$, ez utóbbihoz meg kell határozni a szögsebességet a megállás előtt 0,6 s-mal. Ez ugyanannyi, mint amit nulla szögsebességről indulva ugyanekkora szöggyorsulással 0,6 s alatt elérne, vagyis

$$\omega=\beta t=2{,}1\ \frac{1}{\text{s}}.$$

Ezt felhasználva a centripetális gyorsulás: $a_2=1{,}56$ m/s^2. A két gyorsuláskomponensből a Pitagorasz-tétel segítségével megkapjuk a keresett gyorsulást: $a\approx2$ m/s^2.

Varga Balázs
Göd

Fizika gyakorlat megoldása

G. 605. *Két, egymással párhuzamosan futó sínpáron két vonat halad. Az egyik sebessége* 80 km/h. *A köztük levő távolság* 4,8 km, *negyedóra múlva a távolság ugyanennyi. Mekkora a másik vonat sebessége, ha mindkét vonat hossza* 200 m?

(*3 pont*)

Megoldás. Többféle esetet képzelhetünk el.

1. Ha a két vonat azonos irányban halad ugyanolyan sebességgel, akkor a közöttük lévő távolság nyilván változatlan marad. Ez esetben a másik vonat sebessége is 80 km/h.

2. A két vonat azonos irányban halad, de a hátrébb lévő gyorsabb, mint az első, tehát idővel megelőzi azt.

a) Ha a 80 km/h sebességű vonat előzi meg a másikat, akkor negyedóra alatt 4,8 km + 200 m + 4,8 km + 200 m = 10 km-rel kell többet megtennie a kezdetben előtte haladónál, azaz 40 km/h-val gyorsabban kell haladnia. Így a másik vonat sebessége 40 km/h.

b) Ha a 80 km/h sebességű vonat kezdetben a másik előtt halad, akkor a hátulról induló – gyorsabb – vonatnak kell negyedóra alatt 10 km-rel többet megtennie, azaz 40 km/h-val gyorsabban kell haladnia. Így a másik vonat sebessége 120 km/h.

3. Az is elképzelhető lenne, hogy a két vonat szemben halad egymással. Ebben az esetben a két vonatnak együttesen 10 km-t kell megtenni negyedóra alatt. Mivel az első vonat egymaga 20 km-t tesz meg ezen idő alatt, így – a megadott számadatok mellett – ilyen megoldás nem lehetséges.

Cseke Balázs (Budapest, Veres Péter Gimn., 9. évf.)

132 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 39, hiányos (1 pont) 46, hibás 25, nem értékelhető 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

P. 4918. *Egy repülőgép v sebességgel, a vízszintessel bezárt α siklószögben közeledik a leszállópályához. Amikor már csak H magasságban van a talajszint felett, az eddigi egyenes vonalú pályáról egy olyan körív alakú pályára tér át, amelyen továbbra is v sebességgel haladva éppen vízszintesen repül, amikor eléri a leszállópályát.*

a) *Mekkora a körpálya sugara?*

b) *Mennyi ideig repül a gép a köríven?*

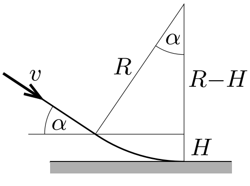
c) *Legfeljebb hány százalékkal nő eközben a pilóta súlya?*

Adatok: $v = 70\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\alpha = 3^\circ$, $H = 100$ m.

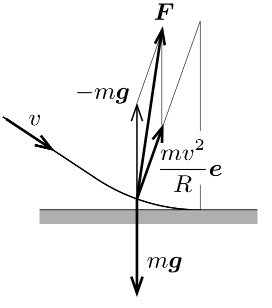
(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. *a*) Az *1. ábráról* leolvasható, hogy $\cos\alpha = \frac{R-H}{R}$, ahonnan a körpálya sugara

$$R = \frac{H}{1-\cos\alpha} = 72\,968\ \mathrm{m} \approx 73\ \mathrm{km}.$$



1. ábra



2. ábra

b) A körív hossza:

$$s = 2R\pi\,\frac{\alpha}{360^\circ} \approx 3{,}8\ \mathrm{km},$$

ezt az utat a megadott sebességű repülőgép $t = \frac{s}{v} = 54{,}6\ \mathrm{s} \approx 1$ perc alatt teszi meg.

c) A pilótára ható $m\boldsymbol{g}$ nehézségi erő és a ülés által kifejtett $\boldsymbol{F}$ erő eredője biztosítja az egyenletes körmozgáshoz szükséges centripetális erőt:

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F} = \frac{mv^2}{R}\boldsymbol{e},$$

ahol $\boldsymbol{e}$ egy olyan egységvektor, amely a repülőgép pillanatnyi helyétől a körpálya középpontja felé mutat (*2. ábra*).

A pilóta súlya (amit egy – pilóta és az ülése közé helyezett – mérleg mutatna) az $\boldsymbol{F}$ erő ellenerejének nagysága:

$$G = |-\boldsymbol{F}| = \left| m\boldsymbol{g} - \frac{mv^2}{R}\boldsymbol{e} \right|.$$

Ez a súly akkor a legnagyobb, amikor $-m\boldsymbol{g}$ és $\frac{mv^2}{R}\boldsymbol{e}$ azonos irányú vektorok, vagyis $\boldsymbol{e}$ függőlegesen felfelé mutat (hiszen a két vektor nagysága adott, eredőjük nagysága csak az általuk bezárt szögtől függ).

A pilótának tehát a leszállópálya legmélyebb pontjában lesz a legnagyobb a súlya, nevezetesen

$$G_{\max} = mg + \frac{mv^2}{R}.$$

A relatív súlynövekedés

$$\frac{G_{\max} - mg}{mg} = \frac{v^2}{Rg} = 0{,}0068 \approx 0{,}7\%.$$

Klučka Vivien (Révkomárom, Selye J. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

56 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 9, hibás 5 dolgozat.

P. 4927. *Ismeretlen elektromotoros erejű és belső ellenállású telepet* 10 *ohmos ellenállással terhelve a kapocsfeszültség* 6 V, *a telepben tárolt energia másodpercenként* 7,2 J-*lal csökken.*

a) Mekkora az áramforrás belső ellenállása?

b) Mekkora az elektromotoros erő?

c) Mekkora a kapocsfeszültség, ha a terhelés ellenállását 20 ohmra növeljük?

(4 pont) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. *a*) és *b*) Ha az $R_\mathrm{k} = 10\ \Omega$-os terhelő-ellenálláson $U_\mathrm{k} = 6$ V kapocsfeszültség mérhető, akkor rajta (és a telepen is)

$$I = \frac{U_\mathrm{k}}{R_\mathrm{k}} = 0{,}6\ \mathrm{A}$$

áram folyik át. Mivel az U_0 elektromotoros erejű áramforrás a belső és a külső ellenálláson összesen $U_0 \cdot I = 7{,}2$ W teljesítményt ad le, az elektromotoros erő

$$U_0 = \frac{7{,}2\ \mathrm{W}}{0{,}6\ \mathrm{A}} = 12\ \mathrm{V}.$$

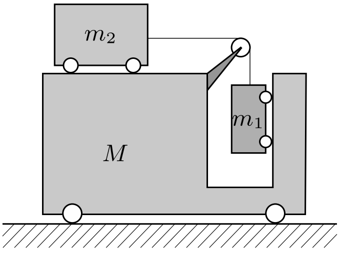
A belső ellenálláson $U_0 - U_\mathrm{k} = 6$ V feszültség esik, miközben 0,6 A áram folyik át rajta. A belső ellenállás nagysága tehát $R_\mathrm{b} = 10\ \Omega$.

c) Az áramkör teljes, $R_\mathrm{b} + R_\mathrm{k} = 30\ \Omega$ ellenállásán $U_0 = 12$ V elektromotoros erejű telep 0,4 A áramot hoz létre. Ebben az esetben a kapocsfeszültség

$$U_\mathrm{k} = (0{,}4\ \mathrm{A}) \cdot (20\ \Omega) = 8\ \mathrm{V}.$$

Schrott Márton (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

57 dolgozat érkezett. Helyes 49 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (2 pont) 4 dolgozat.

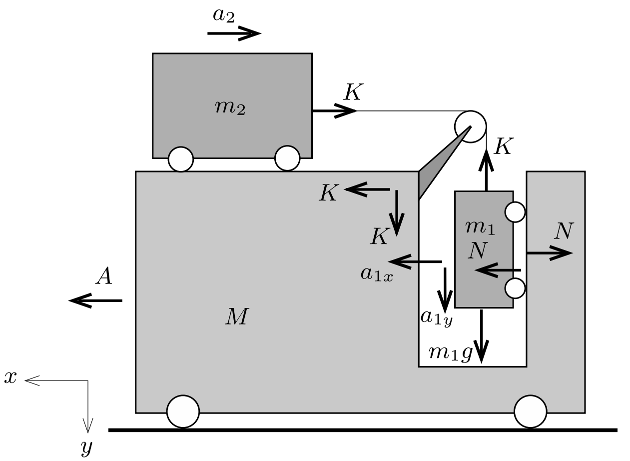


P. 4928. *a) Mekkora gyorsulással indulnak meg az* ábrán *látható, könnnyen gördülő kiskocsik, ha a csiga tömege és a légellenállás elhanyagolható?* Adatok: $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $M = 5$ kg.

b) Milyen határok közé eshet az M tömegű kiskocsi kezdeti gyorsulása más tömegadatok mellett?

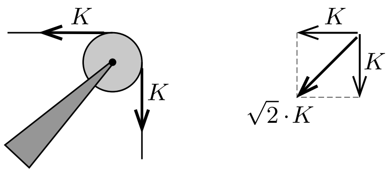
(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

Megoldás. *a*) Az m_1 és m_2 tömegű testekre, valamint a M tömegű kiskocsira ható (számunkra fontos) erőket az *1. ábrán* tüntettük fel. Ezek az m_1 tömegű test



1. ábra

esetében az $m_1 g$ nehézségi erő, a K kötélerő és az M tömegű test által kifejtett N nyomóerő. Az m_2 tömegű test függőleges irányban biztosan nem mozdul el, a vízszintes irányú mozgását pedig egyedül a K kötélerő határozza meg. Az M tömegű test függőleges irányban szintén nem mozdul el, így elegendő a rá ható vízszintes erőkkel foglalkoznunk. Két ilyen erő van: az m_1 tömegű testre ható N erő ellenereje és a kötél által a csigára gyakorolt $\sqrt{2}\cdot K$ nagyságú erő, amelynek vízszintes irányú komponense éppen K (*2. ábra*).



2. ábra

A testekre ható erők számításba vétele után most már felírhatjuk a mozgásegyenleteket x (vízszintes, balra pozitív) és y (függőleges, lefele pozitív) irányokban:

$$(1,x) \qquad N = m_1 a_{1x},$$

$$(1,y) \qquad m_1 g - K = m_1 a_{1y},$$

$$(2) \qquad K = m_2 a_2,$$

$$(3) \qquad K - N = MA.$$

A mozgásegyenletek mellett még két kényszerfeltételt is megfogalmazhatunk. Az első feltétel abból adódik, hogy az m_1 és M tömegű testek vízszintes gyorsulása egyenlő kell hogy legyen, hiszen az m_1 tömegű test az M tömegű testen lévő üreg függőleges falán gurul, attól (a mozgás kezdetekor még biztosan) nem válik el. Fennáll tehát:

$$(4) \qquad a_{1x} = A.$$

A kötél nyújhatatlansága is ad egy kényszerfeltételt: az m_1 tömegű test függőleges gyorsulása és az m_2 tömegű testnek a *csigához viszonyított* (jobb felé irányuló) vízszintes gyorsulása egyenlő nagyságú, hiszen a kötél egyik vége ugyanannyit közeledik a csigához, amennyit a másik távolodik attól. Teljesül tehát:

$$(5) \qquad a_2 + A = a_{1y}.$$

Az $(1,x)$, $(1,y)$, (2), (3), (4), (5) egyenletrendszer megoldható, belőlük a hat ismeretlen (a_{1x}, a_{1y}, a_2, A, F és N) kifejezhető:

$$(6) \qquad A = a_{1x} = \frac{m_1 m_2}{2m_1 m_2 + m_1^2 + M(m_1+m_2)}\, g.$$

A megadott tömegadatok esetén

$$A = a_{1x} = \frac{1}{10}\, g = 0{,}98\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$a_2 = \frac{m_1(M+m_1)}{2m_1 m_2 + m_1^2 + M(m_1+m_2)} g = \frac{3}{10}\, g = 2{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$a_{1y} = \frac{m_1(M+m_1+m_2)}{2m_1 m_2 + m_1^2 + M(m_1+m_2)} g = \frac{4}{10}\, g = 3{,}92\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Kiszámíthatjuk még az erőket is: $N \approx 6$ N és $K \approx 1$ N.

Összefoglalva: az m_1 tömegű test gyorsulásvektora

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} \approx 4{,}04\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

nagyságú és az iránya a vízszintessel $\operatorname{arctg}\left(\frac{3{,}92}{0{,}98}\right) = 76^\circ$-os szöget zár be (balra lefelé mutat), az m_2 tömegű test gyorsulása $2{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ *jobbra*, az M tömegű test pedig $0{,}98\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással *balra* indul el.

b) A (6) összefüggésből látható, hogy a kifejezésben szereplő tört mindig pozitív, így az M tömegű kocsi (bármilyen tömegadatok mellett) biztosan *balra* indul el.

$M \gg m_1, m_2$ esetben a kifejezés nevezője sokkal nagyobb a számlálónál, ilyenkor az M tömegű test gyorsulása elhanyagolhatóan kicsi. Az

$$\frac{M}{m_1} \to \infty, \qquad \frac{M}{m_2} \to \infty$$

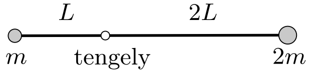
idealizált határesetben $A = 0$, ez tehát a *minimális* gyorsulású eset.

A kifejezés számlálójában láthatóan csak egy tag szerepel ($m_1 m_2$), ugyanezen tag pedig szerepel a nevezőben is, kétszeres szorzóval ($2m_1m_2$). Mivel a nevező többi tagja mind pozitív, ez azt jelenti, hogy a tört értéke nem lehet nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. Ez a maximális gyorsulású eset pedig akkor valósulhat meg, ha $m_2 \gg m_1 \gg M$, ekkor

$$A = \frac{1}{2 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{M}{m_1}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}\, g \approx \frac{1}{2}\, g \approx 4{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Németh Róbert (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

39 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 21, hibás 2 dolgozat.



P. 4929. *Az ábrán látható, 3L hosszúságú, elhanyagolható tömegű, merev rúd a bal oldali végétől L távolságra lévő, rögzített, vízszintes tengely körül függőleges síkban súrlódásmentesen foroghat. A rúd végeihez m, illetve 2m tömegű, kis méretű testeket erősítünk, majd egy adott pillanatban a rudat vízszintes helyzetből elengedjük.*

a) *Határozzuk meg a testek sebességét abban a pillanatban, amikor a rúd éppen függőleges!*

b) *Mekkora erővel nyomja ekkor a rúd a tengelyt?*

c) *Mekkora a testek gyorsulása a rúd elengedése utáni pillanatban?*

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) Jelöljük a $2m$ tömeget M-mel, és a két testre jellemző fizikai mennyiségeket (sebesség, gyorsulás, erő) különböztessük meg a tömegüknek megfelelő indexszel. Írjuk fel az energiamegmaradás törvényét a rúd vízszintes és függőleges helyzetének megfelelő állapotokra! (A helyzeti energiát a tengely alatt $2L$ mélységben választjuk nullának.)

$$Mg \cdot 2L + mg \cdot 2L = mg \cdot 3L + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2. \tag{1}$$

A sebességeket kifejezhetjük a rúd szögsebességével:

$$v_m = L\omega, \qquad v_M = 2L\omega,$$

és így (1)-ből a szögsebességet, abból pedig a kerületi sebességeket is kiszámíthatjuk:

$$2mg \cdot 2L + mg \cdot 2L = mg \cdot 3L + \frac{1}{2}m\omega^2 L^2 + \frac{1}{2}2m\omega^2(2L)^2,$$

vagyis

$$(2)\qquad \omega=\sqrt{\frac{2g}{3L}},\qquad v_m=\sqrt{\frac{2Lg}{3}},\qquad v_M=\sqrt{\frac{8Lg}{3}}.$$

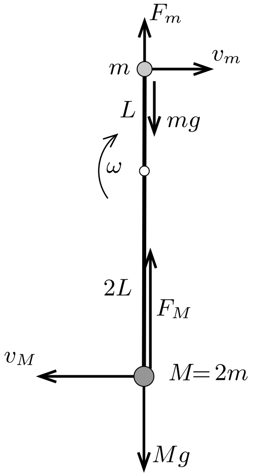
b) Jelöljük a függőleges helyzetű rúd által a kis testekre kifejtett erőket F_m-mel és F_M-mel, a gyorsulásokat pedig a_m-mel és a_M-mel (lásd az *1. ábrát*). Ezeket a mennyiségeket függőlegesen felfelé mutató irányban fogjuk pozitívnak tekinteni. A mozgásegyenletek:

$$F_m-mg=ma_m,\qquad F_M-Mg=Ma_M.$$

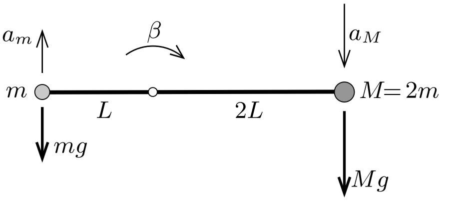
Mivel $a_m=-L\omega^2$ és $a_M=2L\omega^2$, a szögsebesség korábban kiszámított értékének felhasználásával kapjuk, hogy

$$F_m=mg-mL\frac{2g}{3L}=\frac{1}{3}mg,\qquad \text{illetve}\qquad F_M=2mg+2m(2L)\frac{2g}{3L}=\frac{14}{3}mg.$$

A két test összesen $F_m+F_M=5mg$ nagyságú, függőlegesen lefelé mutató erővel hat a rúdra (függőlegesen lefelé), és mivel a rúd tömege elhanyagolható, ugyanekkora erőt fejt ki a rúd a tengelyre.



1. ábra



2. ábra

c) A rúd vízszintes helyzetében (közvetlenül az elengedése után) a nehézségi erők eredő forgatónyomatéka a tengelyre vonatkoztatva (lásd a *2. ábrát*):

$$M_{\text{eredő}}=M_M-M_m=2mg\cdot(2L)-mgL=3mgL.$$

A forgatónyomaték hatására a rúd

$$\beta=\frac{M_{\text{eredő}}}{\Theta}$$

szöggyorsulással kezd elfordulni a tengely körül, ahol

$$\Theta=\Theta_m+\Theta_M=mL^2+M(2L)^2=9mL^2$$

a rendszer teljes tehetetlenségi nyomatéka. Ezek szerint

$$\beta=\frac{g}{3L},\qquad \text{továbbá}\qquad a_m=L\beta=\frac{1}{3}g,\quad a_M=2L\beta=\frac{2}{3}g.$$

Balaskó Dominik (Sopron, Széchenyi I. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. A rúd függőleges helyzetében a testek gyorsulása is és a rájuk ható nehézségi erő is függőleges, tehát a rúd által kifejtett erők is függőlegesek (rúdirányúak). Vízszintes helyzetnél viszont a rúd függőleges irányú erőket fejt ki a végeihez rögzített testekre, tehát a rúdban ható erő általában *nem rúdirányú.*

G. P.

58 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 1 dolgozat.

P. 4936. *Egy szabad, álló neutron bomlásakor mekkora lehet az elektron legnagyobb mozgási energiája?*

(*5 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

Megoldás. A neutron bomlásának egyenlete:

$$\mathrm{n}^0\to\mathrm{p}^++\mathrm{e}^-+\bar{\nu},$$

ahol p^+ a keletkező (pozitív töltésű) protont, e^- a (negatív töltésű) elektront, $\bar{\nu}$ pedig a semleges antineutrínót jelöli.

Az elektronnak akkor lesz a legnagyobb a mozgási energiája, ha az antineutrínó (amelyet nulla nyugalmi tömegű részecskének tekintünk) nem visz el sem energiát, sem impulzust. Az impulzusmegmaradás miatt ekkor a proton és az elektron lendülete egyenlő (p) nagyságú és ellentétes irányú lesz.

A relativisztikus energia:

$$E=\sqrt{(m_0c^2)^2+(pc)^2},$$

ahol m_0 a megfelelő részecske nyugalmi tömege. A tömegeket érdemes MeV/c^2 egységben megadni:

$$m_\mathrm{n}=939{,}565\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2},\quad m_\mathrm{p}=938{,}272\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2},\quad m_\mathrm{e}=0{,}511\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2}.$$

Az energiamegmaradás miatt:

$$m_\mathrm{n}c^2=\sqrt{(m_\mathrm{p}c^2)^2+(pc)^2}+\sqrt{(m_\mathrm{e}c^2)^2+(pc)^2},$$

amit így is felírhatunk:

$$m_\mathrm{n}-\sqrt{(m_\mathrm{e})^2+(p/c)^2}=\sqrt{(m_\mathrm{p})^2+(p/c)^2}.$$

Négyzetre emelve, majd az elektron energiáját kifejezve azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{(m_\mathrm{e})^2+(p/c)^2}=\frac{E_\mathrm{elektron}}{c^2}=\frac{m_\mathrm{n}^2+m_\mathrm{e}^2-m_\mathrm{p}^2}{2m_\mathrm{n}}=1{,}29\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2},$$

vagyis a keletkező elektron *teljes* energiája 1,29 MeV. Ha ebből az energiából levonjuk az elektron 0,51 MeV-os nyugalmi energiáját, megkapjuk, hogy az elektron mozgási energiája legfeljebb 0,78 MeV lehet, ami SI egységekben kb. $1{,}25\cdot10^{-13}$ J.

Nagy Botond (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)

33 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 13, hibás 1 dolgozat.

P. 4937. *A jövőben képesek leszünk olyan űrhajókat is építeni, amelyek távoli csillagrendszerekbe repíthetnek minket. Tegyük fel, hogy az egyik ilyen űrhajó a szökési sebességgel hagyja el a Földet, és speciális hajtóművének köszönhetően a mozgási energiáját minden nap megduplázza (a nyugalmi tömege eközben nem változik).*

Becsüljük *meg, mennyit öregszik az űrhajó kapitánya a* 4,3 *fényévnyire lévő Alpha Centaurira történő utazás során!*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

Megoldás. Az űrhajó mozgását érdemes három szakaszra osztani:

i) A „klasszikus" szakaszra (amikor az űrhajó sebessége sokkal kisebb a fénysebességnél, és így számolhatunk a newtoni fizika képleteivel;

ii) a „simán" relativisztikus mozgásra (amikor az űrhajó sebessége megközelíti a fénysebességet);

iii) és végül az „ultrarelativisztikus" szakaszra (amely során a fénysebességtől való eltérés elhanyagolhatóan kicsi).

Megmutatjuk, hogy a klasszikus szakasz kb. 26 napig tart, a relativisztikus (a kapitány nézőpontjából) kb. 5 napig, és végül az ultrarelativisztikus szakasz (ismét a kapitány nézőpontjából) mindössze néhány óráig. A kérdéses idő (a kapitány öregedése) tehát összesen 31 nap.

Megjegyzés. Érdemes megemlíteni, hogy még a klasszikus szakasz vége előtt, kb. két héttel az indulás után minden ember életét vesztené az űrhajón, mert ekkor az űrhajó gyorsulása már $10\,g$-nél is nagyobb, és a továbbiakban még növekszik. Ilyen körülmények között a szív nem tudja tartósan vérrel ellátni az agyat; ekkora gyorsulásnál még a vadászpilóták is pár perc után elájulnak. Emiatt a kapitány öregedése helyett inkább arra a kérdésre kereshetünk választ, hogy mit mutat az űrhajóban egy óra, esetleg egy gyorsulásálló robotkapitány számítógépének belső órája.

Az m (nyugalmi) tömegű űrhajó a 2. kozmikus sebességgel, $v_0=11{,}2$ km/s kezdősebességgel hagyja el a Földet. Nem tudjuk, hogy az űrhajó milyen ütemben változtatja a sebességét (elképzelhető, hogy folyamatosan, exponenciálisan nő mozgási energiája), de becslésre az is megfelel, ha feltesszük, hogy minden nap egyszer pillanatszerűen kétszeresére növeli a mozgási energiáját, majd 1 napig állandó sebességgel halad.

Ha az űrhajó sebessége a fénysebességhez képest $\beta = v/c$, és a földi megfigyelő számára 1 napig ezzel a sebességgel mozog, akkor kapitány számára ezalatt

$$t' = (1 \text{ nap})\sqrt{1-\beta^2} < 1 \text{ nap}$$

idő telik el. (Ez az időkülönbség, az ún. idődilatáció jelensége a relativitáselmélet egyik furcsasága.) Az űrhajó összes (mozgási+nyugalmi) energiája ennél a sebességnél:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 \cdot \frac{1 \text{ nap}}{t'}. \tag{1}$$

i) A klasszikus szakaszban az űrhajó mozgási energiája viszonylag kicsi nyugalmi energiához képest: ekkor az idő még „normálisan" (a földi megfigyelőével kb. megegyező módon) telik a kapitány (és „legénység", valamint a fedélzeti számítógépek) számára. A klasszikus szakasz felső határát (kicsit önkényesen) pl. a nyugalmi energia $\frac{1}{25}$ részénél húzhatjuk meg, vagyis

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{1}{2}mv^2 < \frac{1}{25}mc^2.$$

A szakasz legnagyobb sebessége $v_1 = 8{,}5 \cdot 10^4$ km/s, aminek eléréséhez szükséges (napokban számolt) időt a

$$v_1^2 = 2^t \cdot v_0^2$$

egyenletből számíthatjuk ki, és $t = 25{,}8$ nap adódik.

ii) A relativisztikus szakaszban az űrhajó mozgási energiája összemérhető (azonos nagyságrendű) a nyugalmi energiával, emiatt a relativisztikus képleteket kell használni. Becslésnek megfelel, ha azt mondjuk, hogy a mozgási energia ebben a szakaszban legyen $\frac{1}{25}mc^2$ és $25\,mc^2$ közötti érték. Ez 625-szörös növekedés, aminek 2-es alapú logaritmusa 9,2. Tehát a földi megfigyelő kb. 9 nap alatt „látja" az űrhajó mozgásának klasszikusból ultrarelativisztikusba való átmenetét. Mennyi időt mér ezalatt a hajó belső órája (mennyit öregszik a kapitány)?

A relativisztikus szakasz i-edik napján az (1) összefüggés felhasználásával

$$t_i' = (1 \text{ nap}) \cdot \sqrt{1-\beta_i^2} \text{ nap} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{25}\right)^i} \text{ nap},$$

a teljes szakaszon pedig

$$T' = t_1' + t_2' + \ldots + t_9' =$$

$$= \frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}08} + \frac{1}{1{,}16} + \frac{1}{1{,}32} + \frac{1}{1{,}64} + \frac{1}{2{,}28} + \frac{1}{3{,}56} + \frac{1}{6{,}12} + \frac{1}{11{,}24} \approx 5{,}1 \text{ nap}$$

telik el az űrhajóban.

iii) Az ultrarelativisztikus szakaszban az űrhajó mozgási energiája jóval nagyobb a nyugalmi energiájánál: az űrhajó „összes energiáját” gyakorlatilag teljesen az előbbi teszi ki. Mivel a mozgási energia naponta duplázódik, minden nap fele olyan hosszúnak érződik kapitány számára, mint az előző. Ez egy 1/2-es szorzójú, elég („végtelen”) hosszú mértani sor, aminek összege az első elem kétszerese. Mivel az első napon

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = 25\,mc^2,$$

$$t' = \frac{1\ \text{nap}}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{1}{25}\ \text{nap} \approx 1\ \text{óra},$$

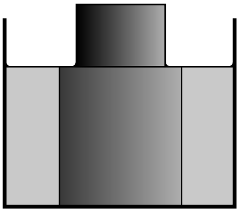
az összes további időtartam összege ennek kétszerese, vagyis kb. 2 óra.

A földi indulástól számítva tehát az Alpha Centauri (vagy bármilyen más, nagyon távoli csillag) eléréséig összesen kb. 31 nap telik el.

Fajszi Bulcsú (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

15 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (1 pont) 1 dolgozat.

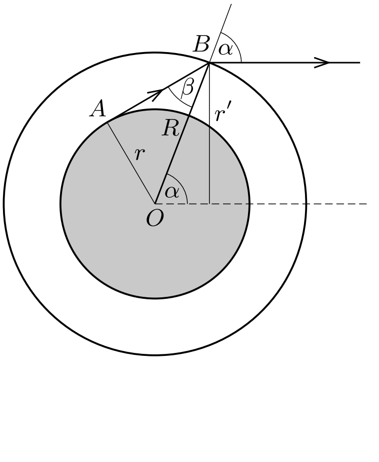
P. 4943. *Egy hengeres üvegpohár közepén átlátszatlan fémhenger áll. A henger körül a pohárban átlátszó folyadék van. Messziről nézve, a fénytörés következtében a henger folyadékban álló része vastagabbnak látszik. Milyen mértékben?*



Adatok: *a pohár sugara* 4 cm, *a fémhenger sugara* 2,5 cm, *a folyadék törésmutatója* 1,5.

(*5 pont*) *Vermes Miklós* (1905–1990) feladata

Megoldás. Jelöljük a pohár sugarát R-rel, a fémhenger sugarát r-rel, a folyadék törésmutatóját n-nel. A poharat és a fémhengert felülnézetből az *ábra* mutatja.



A henger felületétől kiinduló fénysugarak között található olyan, ami törés után éppen „vízszintesen” jobbra halad. Ennek a fénysugárnak a törésére felírhatjuk a Snellius–Descartes-törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

A fémhenger látszólagos átmérőjét az ábrán A-val jelölt pontból kiinduló fénysugár határozza meg. Ez a fénysugár érinti a fémhengert, így

$$\sin\beta = \frac{r}{R}.$$

Legyen a B pont (a fénysugár megtörésének pontja) a körök középpontján átmenő vízszintes egyenestől r' távolságra. Ekkor egyállású szögek miatt fennáll, hogy

$$\sin\alpha = \frac{r'}{R}.$$

A fenti két egyenletet egymással elosztva kapjuk:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r'}{r} = n,$$

vagyis

$$r' = nr = 3{,}75\ \text{cm}.$$

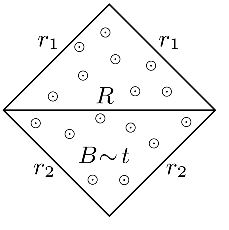
A fémhenger tehát másfélszer olyan vastagnak látszik, mint amilyen valójában.

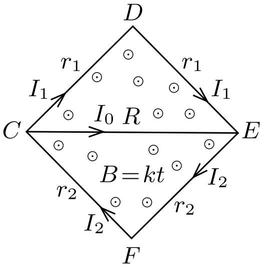
Csuha Boglárka (Keszthelyi Vajda János Gimn., 11. évf.)

38 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 5 dolgozat.

P. 4957. *Egy négyzet alakú drótkeret oldalélei az* áb*rán látható r_1 és r_2 ellenállású huzalokból készültek. A keret az ábra síkjára merőleges, homogén, időben egyenletesen növekvő mágneses indukciójú mezőben van. Mekkora R ellenállású vezetéket kapcsoljunk a négyzet átlójára, hogy az a leggyorsabb ütemben melegedjen?*

(*5 pont*) *Izsák Imre Gyula verseny* (Zalaegerszeg) feladata nyomán





Megoldás. Jelöljük az egyes vezetékekben folyó áramokat és a drótkeret csúcspontjait az *ábrán* látható módon. Legyen a mágneses indukció növekedési üteme $k =$ állandó, az R ellenállású átló mentén disszipált teljesítmény pedig P.

A mágneses indukció változása miatt az ábra síkjából kifelé jövő mágneses fluxus időben egyenletesen növekszik, így – Lenz törvénye szerint – a $CDEC$ hurokban az óramutató járásával megegyező irányban $ka^2/2$ nagyságú körfeszültség indukálódik (a a négyzet oldalélének hossza). Ugyanekkora feszültség indukálódik az $EFCE$ hurokban is.

A Kirchhoff-féle huroktörvény szerint

$$\frac{a^2k}{2} = 2I_1r_1 - I_0R, \tag{1}$$

$$\frac{a^2k}{2} = 2I_2r_2 + I_0R. \tag{2}$$

A C pontra felírhatjuk még Kirchhoff csomóponti törvényét:

$$I_0 = I_2 - I_1. \tag{3}$$

Az (1) és (2) egyenletekből kapjuk:

$$I_1 = \frac{I_0R}{2r_1} + \frac{a^2k}{4r_1}, \tag{4}$$

$$I_2 = \frac{a^2k}{4r_2} - \frac{I_0R}{2r_2}, \tag{5}$$

amiből (3) felhasználásával

$$I_0 = \frac{\frac{a^2k}{4}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}{R\left(\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2}\right) + 1}$$

adódik.

Az R ellenállású vezetéken $P = I_0^2R$ teljesítménnyel fejlődik hő. A leggyorsabb melegedési ütemet a

$$P = \left(\frac{\frac{a^2k}{4}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}{R\left(\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2}\right) + 1}\right)^2 R$$

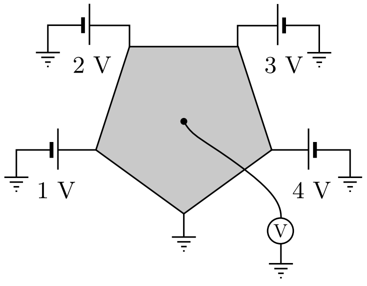
függvény maximuma határozza meg. Ezt a maximumot a derivált eltűnéséből (a $P'(R) = 0$ feltételből), vagy a $P(R)$ függvény reciprokára alkalmazott számtani-mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségből kaphatjuk meg. A szélsőérték akkor áll fenn, ha

$$R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2},$$

vagyis ha R az r_1 és r_2 ellenállásértékek harmonikus közepe.

Shirsha Bose (Kalkutta (India), South Point High School, 12. évf.) dolgozata alapján

13 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

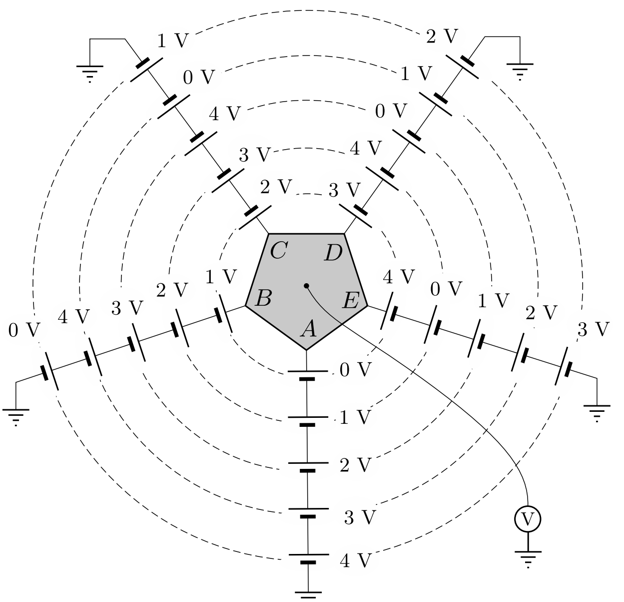


P. 4959. *Egy szabályos ötszög alakú, vékony fémlemez egyik csúcsát leföldeljük, a többire az ábrán látható módon kis belső ellenállású feszültségforrásokat kapcsolunk. Mekkora feszültséget mutat a lemez középpontjához kapcsolt voltmérő?*

(*6 pont*) *Példatári feladat nyomán*

I. megoldás. Nevezzük el az ötszög csúcsait! A földeléssel összekötött csúcs legyen A, az 1 V potenciálú B, a 2 V potenciálú C, a 3 V potenciálú D és végül az utolsó E! A feladatban a földelésnek nincs más szerepe, mint hogy meghatározza a nulla potenciált, így tekinthetünk rá úgy is, mint egy 0 V feszültséget szolgáltató feszültségforrásra. Az ötszög középpontjában kialakuló potenciált jelöljük U_0-lal, éppen ennek a nagyságát szeretnénk meghatározni.

Ezek után kössünk az A csúcsra a „0 voltos” feszültségforrás után (a fémlaptól távolodva) egy 1, egy 2, egy 3 és egy 4 voltos feszültségforrást, ebben a sorrendben. Ehhez hasonlóan kössünk a B pontra az 1 voltos feszültségforrás után a sorrendet tartva egy 2, egy 3, egy 4 és egy „0 voltos” feszültségforrást, a C csúcsra csatlakoztassunk egy 3, egy 4, egy „0” és egy 1 voltos tápegységet, a D pontra egy 4, egy „0”, egy 1 és egy 2 voltosat, és végül az E-re egy „0”, egy 1, egy 2 és egy 3 voltosat, ahogy azt az *1. ábra* mutatja.



1. ábra

Valamennyi feszültségforrást azonos polaritással sorba kapcsoljuk. Így mindegyik csúcsban a potenciál ugyanakkora lesz, értéke a feszültségek algebrai összegével, azaz 10 volttal egyezik meg. Ebből következően az egész fémlap egy ekvipotenciális felületet alkot, valamennyi pontjának a földhöz viszonyított potenciálja 10 V lesz.

Használjuk ki, hogy – az Ohm-törvény lineáris jellege miatt – a különböző feszültségforrások „hatását” egymástól függetlenül kezelhetjük, az általuk létrehozott potenciálokat összegezhetjük (szuperponálhatjuk). Először vegyük szemügyre azokat a feszültségforrásokat, amelyek közvetlenül a csúcsok mellett (az ábrán a legbelső szaggatott vonalú kör mentén) helyezkednek el, vagyis amelyeket az eredeti elrendezés tartalmazott. Ezek együttesen valamekkora U_0 potenciált hoznak létre az ötszög középpontjában, mint ahogyan azt már kikötöttük. Most azokat a feszültségforrásokat vizsgáljuk, amelyek közvetlenül az eredeti tápegységek mellett kaptak helyet. Ezek is egy „gyűrűt” alkotnak az eredeti rendszer körül, mint ahogy az őket követők szintén egy harmadik, egy negyedik és egy ötödik gyűrűt, amelyeket az ábrán további szaggatott vonalú körökkel jelöltük meg.

Vegyük észre, hogy valamennyi ilyen gyűrű megegyezik az eredeti (a legbelső gyűrű) kapcsolásával, a feszültségforrások egymáshoz viszonyítva is azonos elrendezésben találhatók, csupán egymáshoz képest „el vannak forgatva”. Emiatt valamennyi gyűrű öt feszültségforrása egyenként szintén U_0 potenciált hoz létre az ötszög középpontjában! Az eredeti feszültségforrások és a további négy gyűrű feszültségforrásainak hatását szuperponálva azt kapjuk, hogy a potenciálnak az ötszög középpontjában $5\,U_0$-nak kell lennie. Ezek alapján

$$5\,U_0 = 10\text{ V}, \qquad \text{vagyis} \qquad U_0 = 2\text{ V}.$$

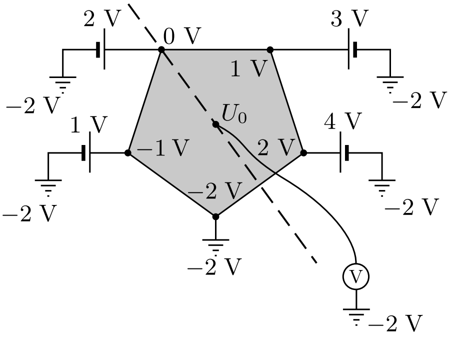
Tehát az eredeti elrendezésben a voltmérő $U_0 = 2$ V feszültséget mutat.

Megjegyzés. Az ismertetett gondolatmenettel egy szabályos n-szög alakú vezető fémlapot is meg tudunk vizsgálni, függetlenül attól, hogy milyen feszültségforrásokat kapcsolunk annak csúcsaira. Az ekvipotenciális felület potenciálja az eljárás végén a kezdeti potenciálok algebrai összegével egyezik meg. Ez az érték a középpont keresett potenciáljának n-szerese, vagyis az eredeti elrendezésben az n-szög középpontja és a földelés közti feszültség

$$U_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i.$$

Kondákor Márk
(Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. A földelés potenciálját általában nullának választjuk, de ez önkényes, választhatnánk akár −2 V-nak is. Ekkor az ötszög csúcsaiban a potenciálok a *2. ábrán* látható értékek lesznek.



2. ábra

Amint látszik, a csúcspontok potenciáljai az ábrán szaggatottan jelölt vonalra történő tükrüzéskor előjelet váltanak (erre a vonalra nézve „antiszimmetrikusak”). Mivel a csúcspontok potenciáljai egyértelműen meghatározzák a fémlemez minden pontjának elektromos potenciálját, az egész lemez potenciáleloszlása „örökli” a csúcspontok szimmetriatulajdonságát, vagyis a szaggatott vonalra való tükrözésre nézve a potenciálfüggvény „antiszimmetrikus”. Ezek szerint a szaggatott vonal mentén mindenhol, így a lemez középpontjában is 0 V lesz a potenciál.

A feszültségmérő tehát $U_0 = (0\ \mathrm{V}) - (-2\ \mathrm{V}) = 2\ \mathrm{V}$ értéket mutat.

Szakály Marcell (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

14 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1 pont) 1, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 374. Mérjük meg valamilyen fajta méz optikai törésmutatóját!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 621. A levegő nyomása 1 km magasságban 899 hPa és a hőmérséklete 8,6 °C. 10 km magasságban már csak 265 hPa és −37,2 °C. Az 1 km-es magasságban mérhető értékhez képest hány százalékkal kisebb 10 km magasságban

a) a levegő sűrűsége;

b) a nehézségi gyorsulás értéke?

(*3 pont*)

G. 622. Egy gömb alakú gáztartály egy nyári meleg napon reggeltől délig annyira felmelegszik, hogy térfogata 0,6%-kal különbözik a reggeli térfogattól. Hány százalékkal változott a tartály felszíne?

(*3 pont*)

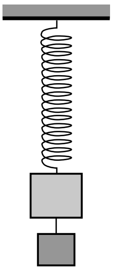
G. 623. Egy elhanyagolható tömegű kötél végén lévő 10 kg tömegű vödröt emelve a vödör 2 másodperc alatt, egyenletesen gyorsulva éri el az emelkedési 0,6 m/s sebességet, amellyel még további 8 másodpercig mozog. Milyen magasra emelkedik a vödör, és mekkora munkát végeztünk?

(*3 pont*)

G. 624. A Balatonon újonnan létesített vitorláskikötők egy része jégmentes, azaz a bent hagyott hajók körül igen nagy hidegben sem fagy be. Ezt a víz felkeverésével érik el. Miért működik ez a módszer?

(*3 pont*)

P. 4991. Egy állványon függő csavarrugóra egymás alá két, fonállal összekötött, összesen 4 kg tömegű testet erősítettünk az *ábra* szerint. Ha az alsó test leesik, a rugón maradó rezgőmozgásba jön. Ha a két testet felcseréljük, és ezután esik le az alsó test, a felső ismét rezegni fog. A két rezgésidő különbsége 0,3 s. Mekkora a két test tömege külön-külön, ha együtt a rugón 1,5 s periódusidejű rezgést végeznek?



(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 4992. Álló liftben h magasról elejtett labda t ideig pattog.

a) Mekkora az ütközés rugalmatlanságára jellemző k ütközési szám? (A k szám a labda ütközés utáni és ütközés előtti lendületének hányadosát adja meg.)

b) Egy lift állandó v sebességgel felfelé halad. Mennyi ideig pattog a liftben h magasról elejtett labda?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 4993. A Calais-t Doverrel összekötő „Csalagút” hossza 55 km, ennek mintegy 38 km-es szakasza halad a La Manche csatorna alatt. Képzeljünk el a 6371 km sugarú, tökéletesen gömb alakú Földön egy 40 km hosszú, nyílegyenes vasúti alagutat a tenger szintje alatt, amelynek tenger alatti eleje és vége felett 20 méter magasan áll a víz.

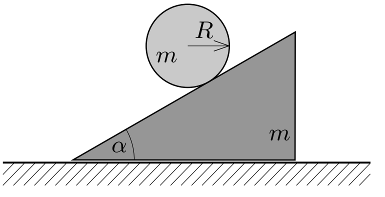
a) Milyen magasan áll a víz ennek az alagútnak a közepe felett?

b) Ha ebben a vasúti alagútban nem lenne levegő, és eltekinthetnénk a súrlódástól is, mennyi idő alatt haladna át rajta az alagút egyik végéről nyugalmi helyzetből induló vagon csupán a Föld gravitációs vonzóerejének hatására?

c) Mekkora sebességgel száguldana át ez a vagon az alagút közepén?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 4994. Az *ábrán* látható ék és a rajta lévő tömör, R sugarú henger tömege egyaránt m. Az ék a talajon súrlódás nélkül csúszhat. Legalább mekkora a tapadási súrlódási együttható értéke az ék és a henger között, ha a henger tisztán gördül, és az ék hajlásszöge $\alpha = 30°$?



(*5 pont*) Közli: *Berke Martin,* Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn.

P. 4995. Becsüljük meg, hogy mekkora kitéréseket végez a Nap középpontja a körülötte keringő bolygók hatására!

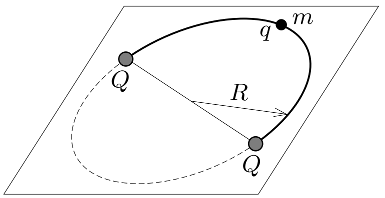
(*4 pont*) Közli: *Hudoba György,* Székesfehérvár

P. 4996. Egy mól hélium térfogatát kétszeresére növeltük a $p=\frac{\alpha}{V^2}$ folyamatban (α állandó), miközben belső energiája 2493 J-lal csökkent.

a) Mennyi volt a hélium kezdeti hőmérséklete?

b) Mennyi hőt adott le a folyamat során?

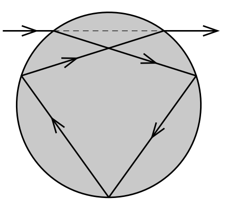
(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*



P. 4997. Vízszintes síkban elhelyezkedő, R sugarú félkörön súrlódásmentesen mozoghat egy pontszerű, m tömegű, q töltésű gyöngy. A félkör végpontjaiban egy-egy Q töltésű, rögzített, pontszerű test található. Az így kialakított rendszer egyensúlyban van. Mekkora lesz a rezgésidő, ha a gyöngyöt kissé kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, majd magára hagyjuk?

(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

P. 4998. Egy gömb alakú vízcseppre érkező fénysugár az *ábrán* látható módon három belső visszaverődés után az eredeti irányban halad tovább. Mekkora beesési szöggel lépett be a fénysugár a vízcseppbe? (A víz törésmutatója $n=4/3$.)



(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 4999. A JET* berendezésében deutérium- (^{2}H) és tríciumatommagok (^{3}H) fúziója során egy α-részecske (^{4}He atommagja) és egy neutron keletkezik, miközben reakciónként 17,62 MeV energia szabadul fel.

a) A JET eddigi legnagyobb teljesítményt produkáló kísérletében 16 MW fúziós teljesítményt szabadított fel. Hány gramm tríciumot és deutériumot használt fel ekkor a berendezés egy másodperc alatt?

b) Egy fúziós erőműtől azt várjuk, hogy 1 GW elektromos teljesítményt adjon le. Tételezzük fel, hogy a fúziós folyamatban felszabaduló teljesítményt a reaktor 35%-os hatásfokkal tudja elektromos teljesítménnyé alakítani. Hány kilogramm deutériumot és tríciumot használna el évente egy ilyen reaktor?

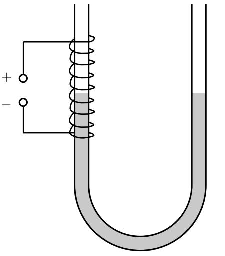
c) Tegyük fel, hogy a fúziós kutatások eredményre vezetnek, és 2050-ben a világ akkori teljes, 10 milliárdos népessége fúziós erőművekből fedezi villamosenergia-szükségletét (7000 kWh/fő/év) a fent leírt reaktorokkal. Hány kilogramm hélium keletkezik egy év alatt, és ez hány térfogatszázalékkal növeli meg a földi légkör héliumtartalmát? (A földi légkört tekintsük egy 5 km vastag, normál állapotú gázrétegnek.)

(*4 pont*) Közli: *Zoletnik Sándor,* Budapest

---

*Joint European Torus, a világ legnagyobb „tokamak” rendszerű berendezése (`www.eurofusion.org/jet`), amelyben a szabályozott magfúziós energiatermeléshez szükséges magas hőmérsékletű plazma összetartását, fűtését és tulajdonságait tanulmányozzák.

P. 5000. Az *ábrán* látható U-alakú csőbe vizet töltöttünk. Hogyan és mennyire változik meg a cső két szárában a víz szintje, ha a bal oldali csőszárat szorosan körülvevő N menetes, ℓ hosszúságú tekercsbe I erősségű áramot vezetünk? (A cső átmérője jóval kisebb a tekercs hosszánál. A víz relatív permeabilitása μ_{r}, számértéke 1-nél egy nagyon kicsivel kisebb.)



(Lásd még *Radnai Gyula: Az elektromágnes húzóerejéről* szóló cikket a KöMaL 2000. évi 4. számában és a honlapunkon.)

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

Beküldési határidő: 2018. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 68. No. 1. January 2018)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 29): **K. 571.** The headmaster of a school issued a decree that the legs of students' trousers must not be shorter than one fifth of their height. In the investigation of Sam's trousers length, the ethical committee concluded that the legs of his trousers were shorter than allowed, by exactly $\frac{2}{7}$ of the allowed minimum length. In addition, they also established that a 3-cm increase of the length of his trousers legs would still make it 20% shorter than allowed. How tall is Sam? **K. 572.** Tom Sawyer and Huckleberry Finn were painting the fence together. It would take Tom 3 hours to paint the whole fence alone, and it would take Huck 4 hours to do it alone. However, when they work together, their working speed decreases by 20% since they are doing pranks on each other continually. The two of them started working at noon, but after a while Huck was getting bored, so he decided to go fishing instead. Tom spent 10 minutes trying to persuade him to continue (during that time, neither of them did any painting at all), without success. So he threw a dead rat at Huck, and finished the job alone. He was done at 2:34. When did Huckleberry Finn stop painting? **K. 573.** Kate, Alex and Steve went to the sweet shop. Kate bought 9 identical boxes of sweets for Christmas, but she only had 11 000 forints (Hungarian currency) on her, so she borrowed all the change that Alex had. With that, she just had the right amount of money to pay for the sweets. Then Alex also thought that these sweets would make nice Christmas presents so he decided to buy 13 boxes of the same kind. Since he only had 15 000 forints left now, he borrowed all the change that Steve had on him. Thus he just had the right amount of money to pay for his sweets. Given that the price of a box of sweets ends in 0 and the amounts borrowed by Kate and by Alex were both less than 1000 forints, how much does Kate owe Alex, and how much does Alex owe Steve? **K. 574.** The sum of the digits of a positive number N is the same as the sum of the digits in its double. a) Find a two-digit number, a three-digit number, and a four-digit number with this property. b) Show that N is divisible by 9. **K. 575.** Six people are having a meeting. Among any three participants there are two who do not know each other. Prove that there is a set of three participants who do not know each other at all. (Acquaintance is mutual.) **K. 576.** A box contains some red and blue balls. If a ball is picked at random, the probability of its being blue is $\frac{2}{5}$. If one blue ball is removed from the box, the probability of a randomly selected ball being red will be $\frac{5}{8}$. How many balls are there in the box?

New exercises for practice – competition C (see page 30): **Exercises up to grade 10: C. 1455.** The currency used on a distant island consists of coins of unusual denominations. The basic units are three different one-digit numbers, and there are their multiples, too: ten times, a hundred times, and also a thousand times their value. The price of one kilo of coconut may be paid with two identical coins plus a third coin of different value. In order to pay for a kilo of passion fruit, which costs twice as much, the third coin needs to be replaced by the coin with 10 times its value. Given that no coin has a denomination of 1 and the largest denomination is 7000, what other coins are used on the island? **C. 1456.** Prove that no perfect square can be represented in the form 3^a+9^b+1 (a, b are positive integers). **Exercises for everyone: C. 1457.** An isosceles right-angled triangle inscribed in a circle is rotated through 45 degrees about the centre of the circle. Find the perimeter and area of the intersection of the two triangles. **C. 1458.** Solve the following equation on the set of real numbers: $\sqrt{x+11}+\sqrt{x^2+11x}-\sqrt{x}-x=4$. **C. 1459.** Reflect the parabola $y=x^2$ about the point $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$. At what angle do the two parabolas intersect? **Exercises upwards of grade 11: C. 1460.** A special snowflake with rotational symmetry is developing as follows: in every second, a new branch of one third the length grows from the midpoint of each terminal branch of the snowflake. (The *diagram* shows the initial shape of the snowflake and the two successive stages of the process.) Given that the diameter of the snowflake is 4.32 mm, how many terminal branches of length 10 micrometres will it have in 6 seconds? **C. 1461.** The operation $\circ$ is defined on positive integers. Given that *i*) $1\circ 1=3$; *ii*) $a\circ b=b\circ a$ for all a, b; *iii*) $a\circ(b+1)=a\circ b+(a+1)+2b$ for all a, b, determine the value of $2017\circ 2018$.

New exercises – competition B (see page 31): **B. 4921.** Let n and k denote positive integers. Prove that given $n+k$ integers it is always possible to select at least $(k+1)$ numbers out of them such that their sum is divisible by n. (*5 points*) (Proposed by *Z. Gyenes,* Budapest) **B. 4922.** Find the integer solutions of the following simultaneous equations: $3x-y^2=\frac{z}{2}$, $3y+x^2=\frac{3z}{2}$. (*3 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 4923.** The interior angle bisector drawn from vertex A of triangle ABC intersects side BC at E, and the interior angle bisector drawn from vertex B intersects side AC at F. Let O denote the centre of the inscribed circle of the triangle. What may be the size of the angle at C if the sum of the areas of $\triangle OFA$ and $\triangle OBE$ equals the area of $\triangle AOB$? (*3 points*) **B. 4924.** Consider the perpendicular lines drawn from the centres of the escribed circles of a triangle to the corresponding sides. Prove that the three lines are concurrent. (*4 points*) **B. 4925.** Show that if the mean of the non-negative real numbers $a_1,a_2,\ldots,a_{2017}$ is 1, then the following inequality holds: $\frac{a_1}{a_1^{2018}+a_2+a_3+\cdots+a_{2017}}+\frac{a_2}{a_2^{2018}+a_3+a_3+\cdots+a_{2017}+a_1}+\cdots+\frac{a_{2017}}{a_{2017}^{2018}+a_1+a_2+\cdots+a_{2016}}\leqslant 1$. (*4 points*) **B. 4926.** In an acute-angled triangle ABC, the feet of the altitudes drawn from B and from C are D and E, respectively. The reflections of point E in the lines AC and BC are S and T, respectively. The circle CST, centred at O, intersects line AC again at point $X\neq C$. Show that lines XO and DE are perpendicular. (*5 points*) (*Korean problem*) **B. 4927.** Let A and B be finite sets of vectors, and let $A+B=\{\mathbf{v}+\mathbf{w}\mid \mathbf{v}\in A,\ \mathbf{w}\in B\}$. Show that $|A+B|\geqslant |A|+|B|-1$. (*5 points*) **B. 4928.** The trunk of an ever-growing tree forks in two at a height of one foot. In the following, the term branch will refer to a section between two joints, with no further joint along its length. Every branch of the ever-growing tree is straight, and terminates one foot higher than its lower end. The branches starting from the upper end of the branch are considered the children of the branch, also called the siblings of each other. Every branch of the tree has at least two children. If a branch does not have exactly two children then it has a sibling with exactly two children. Siblings always have different numbers of children. If a branch has more than two children then it has a sibling with one fewer children. How many branches start from joints at a height of n feet? (*6 points*) (Proposed by *M. E. Gáspár,* Budapest) **B. 4929.** The planes of an ellipse $\mathcal{E}$ and a hyperbola $\mathcal{H}$ in the space are perpendicular. The foci of $\mathcal{E}$ are the endpoints of the real axis of $\mathcal{H}$, and the foci of $\mathcal{H}$ are the endpoints of the major axis of $\mathcal{E}$. Let A be B two fixed points on different branches of hyperbola $\mathcal{H}$, and let P be an arbitrary point of the ellipse. Prove that the sum of the distances PA and PB is independent of the choice of P. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 33): **A. 713.** We say that a sequence $a_1, a_2, \ldots$ is *expansive* if for all positive integers j, $i<j$ implies $|a_i - a_j| \geqslant \frac{1}{j}$. Find all positive real numbers C for which one can find an expansive sequence in the interval $[0, C]$. **A. 714.** Consider $n \geqslant 2$ pairwise disjoint disks $D_1, D_2, \ldots, D_n$ on the Euclidean plane. For each $k=1,2,\ldots,n$, denote by f_k the inversion with respect to the boundary circle of D_k. (Here, f_k is defined at every point of the plane, except for the center of D_k.) How many fixed points can the transformation $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ have, if it is defined on the largest possible subset of the plane? **A. 715.** Let a and b be positive integers. We tile a rectangle with dimensions a and b using squares whose side-length is a power of 2, i.e. the tiling may include squares of dimensions 1×1, 2×2, 4×4 etc. Denote by M the minimal number of squares in such a tiling. Numbers a and b can be uniquely represented as the sum of distinct powers of 2: $a = 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}$, $b = 2^{b_1} + \cdots + 2^{b_\ell}$. Show that $M = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{\ell} 2^{|a_i - b_j|}$.

Problems in Physics

(see page 58)

M. 374. Measure the refractive index of some type of honey.

G. 621. The pressure of air at a height of 1 km is 899 hPa and its temperature is 8.6 °C. At a height of 10 km the pressure is only 265 hPa, and the temperature is −37.2 °C. *a*) By what factor is the density of air smaller at the height of 10 km than that of at the height of 1 km? *b*) By what factor is acceleration due to gravity smaller at the height of 10 km than that of at the height of 1 km? **G. 622.** A spherical gas container gets so warm in a hot summer day from morning to noon, such that its volume at noon differs by 0.6% from its volume in the morning. By what percent did the surface area of the container change? **G. 623.** A bucket of mass 10 kg is raised by means of a negligible-mass rope, such that first it is accelerated uniformly in 2 s to a speed of 0.6 m/s, and then it continues its motion at this speed for 8 more seconds. To what height is the bucket raised, and how much work was done? **G. 624.** Some of the newly established sailing boat ports at lake Balaton are ice-free, which means that even in very cold weather the water around the sailing boats do not freeze. This is due to the constant stirring of water. Why does this method work?

P. 4991. Two objects of total mass 4 kg, one of them is hanging below the other and attached to it by means of a thread, are attached to the lower end of a spring, hung onto a stand, as shown in the *figure.* If the lower object falls down the other one at the end of the spring begins to oscillate. If the two objects are interchanged and the lower one falls the other also begins to oscillate. The difference between the periods is 0.3 s. Calculate the mass of each object if the period of the oscillatory motion when both objects are on the spring is 1.5 s. **P. 4992.** A ball which was dropped from a height of h in a stationary elevator is bouncing for a time of t. *a*) What is the coefficient of restitution k, which characterises the elasticity of the impact? (The constant k is the ratio of the linear momentum of the ball before the impact to that of after the impact.) *b*) The elevator is moving upwards at a speed of v. How long does the ball bounce when it is dropped from a height of h? **P. 4993.** The Channel Tunnel, between Calais and Dover has a length of 55 km, and 38 km of it is below the English Channel. Think of a 40 km long straight train tunnel on the exactly spherical Earth of radius 6371 km, below sea level, such that above the two ends of the tunnel the height of water is 20 m. *a*) What is the height of water above the middle of the tunnel? *b*) If there was no air in the tunnel and friction was also negligible, how long would it take for a train, starting from rest, to go through the channel due to just the gravitational pull of the Earth? *c*) At what speed would the train go through the middle of the tunnel? **P. 4994.** The masses of both the wedge and the solid cylinder shown in the *figure* are m, the radius of the cylinder is R. The wedge can slide without friction on the ground. What is the minimum value of the coefficient of static friction between the wedge and the cylinder, if the cylinder rolls without slipping along the wedge and the angle of elevation of the wedge is $\alpha=30^\circ$? **P. 4995.** Estimate the displacement of the centre of the mass of the Sun, due to the planets orbiting around it. **P. 4996.** In the process of $p=\frac{\alpha}{V^2}$ (where α is a constant) the volume of one mole helium was doubled, whilst its internal energy was decreased by 2493 J. *a*) What was the initial temperature of the helium? *b*) How much heat was released by the gas during the process? **P. 4997.** A point-like bead of mass m, and of charge q can move frictionlessly along a horizontal semicircular path of radius R. At each end of the semicircle there is a point-like fixed object of charge Q. The system described is in equilibrium. What is the period of the motion of the bead if it is displaced a bit from its equilibrium position and then released? **P. 4998.** A ray of light enters into a spherical water droplet, and after three total internal reflections it travels into its original direction as shown in the *figure.* What was the angle of incidence of the ray when it entered into the droplet? (The refractive index of water is $n=4/3$.) **P. 4999.** In the device called JET* deuterium (^{2}H) and tritium (^{3}H) nuclides fuse and create an α-particle, and a neutron, while 17.62 MeV energy is liberated in each individual fusion. *a*) The total liberated fusion energy by the Jet, when it produced the most power during an experiment, was 16 MW. How many grams of tritium and deuterium were used in the device in one second? *b*) A fusion power plant is expected to produce electrical power of 1 GW. Suppose that the efficiency to transform the liberated nuclear energy to electrical energy is 35%. How many kilograms of deuterium and tritium would be used by this type of plant in one year? *c*) Suppose that research on fusion power plants is successful, and by the year of 2050 the total electrical energy demand of all the 10 thousand million people (7000 kWh per person per year) living at that time on the Earth is supplied by fusion power plants. How many kilogram helium is generated in one year, and by what volume percent does the helium content of the atmosphere is increased? (Consider the atmosphere as a 5 km thick gas layer at standard conditions.) **P. 5000.** The U-shaped tube shown in the *figure* was filled with water. How, and by what amount will the level of the water in the arms of the tube change, if a current of I is made flow through the coil, of length ℓ and of number of turns N, tightly wrapped around the arm at the left-hand side? The diameter of the tube is much smaller than the length of the coil. (The relative permeability of water is μ_r, its numerical value is just a very little bit less than 1.)

---

*Joint European Torus, is the greatest "tokamak" type device in the world (`www.euro-fusion.org/jet`), in which the heating, the properties and the confinement of hot plasma, needed for the production of controlled nuclear fusion power, is investigated.