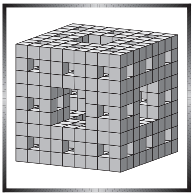


A B pontversenyben kitűzött feladatok (4912–4920.)

B. 4912. Bizonyítsuk be, hogy az $5x^2 - 4y^2 = 2017$ egyenletnek nincs egész megoldása.

(*3 pont*)

B. 4913. Az $ABCD$ húrnégyszög A csúcsánál fekvő szögét az AC átló felezi. Jelöljük ki az AD oldal D-n túli meghosszabbításán az E pontot. Mutassuk meg, hogy $CE = CA$ akkor és csak akkor teljesül, ha $DE = AB$.

(*3 pont*) (*Bolgár feladat*)

B. 4914. Legyen $p(x)$ olyan egész együtthatós polinom, amely négy különböző egész helyen is a 2000 értéket veszi fel.

a) Igazoljuk, hogy nincs olyan x_0 egész szám, amelyre $p(x_0) = 2017$.

b) Adjunk meg olyan (a fenti feltételnek megfelelő) $p(x)$ polinomot és x_1 egész számot, amelyre $p(x_1) = 2018$ teljesül.

(*4 pont*)

B. 4915. Adottak az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 és P általános helyzetű pontok a síkon. Jelölje k_i azt a számot, ahányféleképpen az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontok közül kiválasztható i darab úgy, hogy a kiválasztott pontok konvex burka tartalmazza P-t. Mutassuk meg, hogy $k_3 = k_4$.

(*5 pont*)

B. 4916. A térbeli derékszögű koordinátarendszerben rögzítsük a $P(a, b, c)$ pontot, ahol $a, b, c > 0$. Az origót jelölje O. Egy P-re illeszkedő S sík messe a koordinátatengelyeket a pozitív felükre eső X, Y és Z pontokban. Mutassuk meg, hogy az $OXYZ$ tetraéder térfogata pontosan akkor minimális, ha P az $XYZ\triangle$ súlypontja.

(*4 pont*)

B. 4917. Határozzuk meg az összes olyan $f : \big(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\big) \to \mathbb{R}$ függvényt, amely teljesíti a következő összefüggést:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 4 - \frac{2}{x}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti)

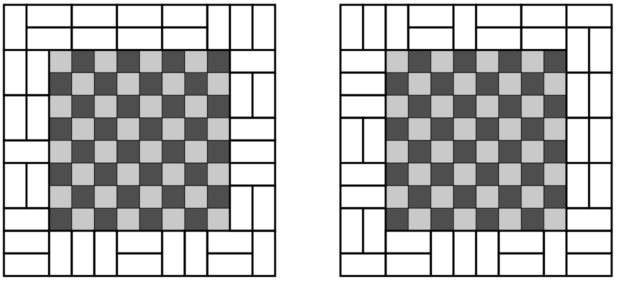
B. 4918. Mutassuk meg, hogy M darab ($M \geqslant 2$) térbeli egységvektorból ki lehet választani $M - 1$ olyat, amelyek összegének hossza legalább egységnyi.

(*5 pont*)

B. 4919. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I, a beírt kör a BC, CA, illetve AB oldalakat rendre az A_1, B_1, illetve C_1 pontokban érinti. Az AB és A_1B_1 egyenesek a K pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy a K középpontú, C_1-en átmenő körnek, az AC_1IB_1 deltoid beírt körének, valamint a BA_1IC_1 deltoid beírt körének van egy közös érintője, ami átmegy a C ponton.

(*6 pont*)

B. 4920. Hányféleképpen lehet 1×2-es dominókkal átfedés és hézag nélkül lefedni a 8×8-as sakktábla körül felvett 2 egység szélességű szegélyt? (Az *ábrán* látható két lefedést különbözőnek tekintjük.)

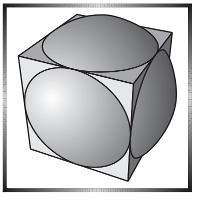


(*6 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

❄

Beküldési határidő: 2018. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (710–712.)

A. 710. Mely n-re lehet felbontani egy szabályos n-szöget véges sok háromszögre úgy, hogy semelyik két háromszögnek ne legyen közös oldala?

(*2017. évi Schweitzer-feladat nyomán*)

A. 711. Melyek azok az (m,n) párok, amelyekhez létezik olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektív függvény, hogy minden szabályos m-szög f-nél vett képe szabályos n-szög legyen? (Itt $m, n \geqslant 3$, és szabályos N-szög alatt a zárt töröttvonalat értjük, nem a zárt sokszöglemezt.)

Javasolta: *Sutanay Bhattacharya* (Bishnupur, India)