II. megoldás. 2^n darab olyan n-jegyű szám van, amely csak 1-esből és 2-esből áll (mert minden helyiértékre két szám közül választhatunk).

Az összes ilyen n-jegyű számot elosztva rendre 2^n-nel legfeljebb 2^n darab különböző maradékot kaphatunk az osztás eredményeként (éspedig: $0; 1; 2; \ldots; 2^n - 1$). Belátjuk, hogy minden ilyen n-jegyű szám különböző maradékot ad 2^n-nel osztva.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van két különböző, csak 1-esből és 2-esből álló n-jegyű szám, amely ugyanazt a maradékot adja 2^n-nel osztva. Így a két szám különbsége (a nagyobbikból a kisebbet kivonva) osztható lesz 2^n-nel.

Ez a különbség legfeljebb n-jegyű szám lehet, melynek az „első” nem 0 számjegye (az 1-es helyiértéktől indulva a nagyobbak felé) vagy 1-es (a $2-1$ miatt), vagy 9-es (az $1-2$ miatt). Így ez a különbségként kapott szám $A \cdot 10^k$ alakú lesz, ahol A egy páratlan természetes szám, míg k a 0-k száma az (1-es helyiértéktől indulva) első 1-es vagy 9-es jegyig.

Mivel a különbség legfeljebb n-jegyű, a fentiek alapján legfeljebb $(n-1)$ darab 0-ra végződhet, azaz a különbség legfeljebb 2^{n-1}-gyel osztható (hiszen $10^{n-1} = 2^{n-1} \cdot 5^{n-1}$). Ellentmondáshoz jutottunk, tehát nincs két olyan különböző, csak 1-esből és 2-esből álló n-jegyű szám, amely ugyanazt a maradékot adja a 2^n-nel való osztásnál. Vagyis minden maradék különböző.

Figyelembe véve, hogy pontosan 2^n darab, a feltételeknek megfelelő n-jegyű szám van, így pontosan 2^n darab különböző maradékunk van, vagyis van (pontosan egy darab) olyan n-jegyű szám, amely csupa 1-esből és 2-esből áll és 2^n-nel való osztási maradéka 0 – és ezt akartuk bizonyítani.

mindkét megoldás *Molnár István* (Békéscsaba, Széchenyi István Szki., 10. évf.) munkája

61 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 24 versenyző: Agócs Katinka, Ajtai Boglárka, Balog Lóránd, Bíró Dániel, Bukor Benedek, Deák Péter, Dékány Barnabás, Havlik Miklós, Horváth Dávid, Jankovits András, Julinek István, Kiszelovics Dorina, Mészáros Márton, Molnár István, Németh Csilla Márta, Porkoláb Mercédesz, Rittgasszer Ákos, Spányik Teodor, Surján Anett, Szántó Julianna, Szécsi Adél Lilla, Szepessy Luca, Szőnyi Laura, Tóth Imre. 4 pontos 15, 3 pontos 6, 2 pontos 6, 1 pontos 7, 0 pontos 3 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4737. *Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja D. Az $ACD\sphericalangle$ és a $BCD\sphericalangle$ szögfelezője az AB átfogót rendre az E és F pontokban metszi. Határozzuk meg az ABC háromszög beírt, és a CEF háromszög körülírt köre sugarainak arányát.*

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

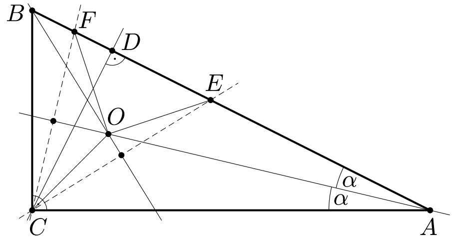
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a két kör középpontja egybeesik. Jelölje 2α az ABC háromszög A-nál lévő szögét, O pedig a háromszög szögfelezőinek metszéspontját. Mivel a merőleges szárú hegyesszögek egyenlőek, ezért $CAD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 2\alpha$ (*1. ábra*), tehát

$$FCA\sphericalangle = FCD\sphericalangle + DCA\sphericalangle = \alpha + (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha.$$

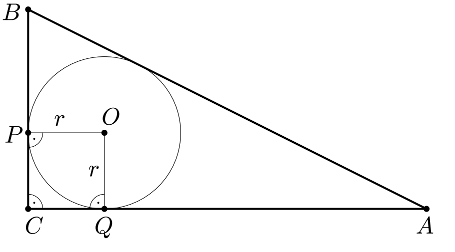
Az AFC háromszögben a szögek összege 180°, tehát

$$AFC\sphericalangle = 180^\circ - (FCA\sphericalangle + CAF\sphericalangle) = 90^\circ - \alpha.$$

Ezért az AFC háromszög egyenlőszárú, amiből következik, hogy szárszögének szögfelezője merőleges az alapjára. Tehát CF szakaszfelező merőlegese az AO egyenes. Ugyanígy kapjuk, hogy CE szakaszfelező merőlegese pedig a BO egyenes. Mivel két oldalfelező merőleges metszéspontja meghatározza a CEF háromszög körülírt körének középpontját, ezért az egybeesik O-val.



1. ábra



2. ábra

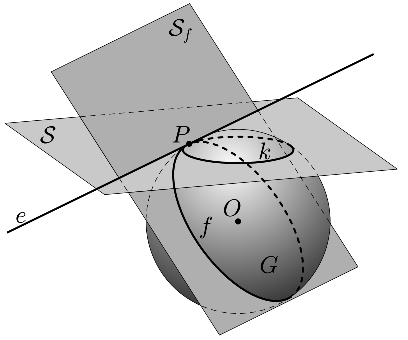
Jelölje P, illetve Q az ABC háromszög beírt körének a befogókon lévő érintési pontjait (*2. ábra*). Mivel bármely külső pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz hossza egyenlő, ezért $CP = CQ$. Nyilván teljesül $OP = OQ$ is, tehát a $CPOQ$ négyszög deltoid. Kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, továbbá $PCQ\sphericalangle = 90^\circ$, ezért a deltoidnak van három derékszöge, tehát téglalap is. Ha viszont egy deltoid téglalap, akkor az négyzet.

A két kör sugarainak keresett aránya tehát megegyezik a $CPOQ$ négyzet OP oldalának és OC átlójának arányával, azaz $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

114 dolgozat érkezett. 5 pontos 79, 4 pontos 15, 3 pontos 6, 2 pontos 6, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

B. 4829. *Fedjük le az egységsugarú gömb felületét főkörökkel úgy, hogy minden pontot legfeljebb négy főkör tartalmazzon.*

(*5 pont*)



Megoldás. Jelölje a gömbfelületet G, középpontját O. Messük el G-t egy O-ra nem illeszkedő $\mathcal{S}$ síkkal, így kapjuk az $\mathcal{S} \cap G = k$ körvonalat. Az $\mathcal{S}$ a G-t két részre osztja, a kisebbiket az $\mathcal{S}$-hez (vagy k-hoz) tartozó gömbsapkának nevezzük (hozzáértve a gömbsapkához magát k-t is). A gömbsapkára gondolhatunk úgy is, mint a k által meghatározott körlapra a G gömbfelületen.

Legyen $P \in k$ tetszőleges, és érintse az $e \subset \mathcal{S}$ egyenes a k kört P-ben. Az O és e által feszített $\mathcal{S}_f$ sík a G-t egy f főkörben metszi. Azt mondjuk, hogy G-n az f a k körvonal P-ben húzott érintője. Világos, hogy G-n a k-hoz annak minden pontjában pontosan egy érintőt húzhatunk.

Legyen a k kör O-ra vonatkozó tükörképe k', és vegyünk egy tetszőleges $X \in G$ pontot, amely nem eleme sem a k-hoz, sem a k'-höz tartozó gömbsapkának. Megmutatjuk, hogy k-nak pontosan két érintője tartalmazza X-et. Messe ugyanis OX az $\mathcal{S}$ síkot az X' pontban. Az X-re tett feltevés miatt X' a k körön kívül van, azaz X'-ből k-hoz pontosan két érintő egyenes húzható: e_1 és e_2. (Ha $OX \parallel \mathcal{S}$ (ekkor az X' pont nem létezik), akkor e_1 és e_2 legyenek k azon érintőegyenesei $\mathcal{S}$-ben, amelyek párhuzamosak OX-szel, ezekből is pontosan kettő van.) Világos, hogy az O és e_1, valamint az O és e_2 által feszített síkok k olyan érintő főköreit metszik ki G-ből, amelyek tartalmazzák X-et. A gondolatmenetből az is kitűnik, hogy más, X-re illeszkedő főkör nem érintheti k-t.

Most válasszunk két, k_1 és k_2 kört a G gömbön úgy, hogy a hozzájuk, valamint k_1' és k_2' tükörképeikhez tartozó gömbsapkák páronként diszjunktak legyenek. Tekintsük k_1 és k_2 összes érintő főkörét. Azt állítjuk, hogy ezek együttesen eleget tesznek a kívánalmaknak. Legyen A a gömbfelszín tetszőleges pontja. Mivel a k_1, k_2, k_1' és k_2' körökhöz tartozó gömbsapkák páronként diszjunktak, így A-ból k_1 és k_2 valamelyikéhez biztosan húzható érintő főkör, tehát az összes érintők lefedik A-t. Másrészt mind k_1-hez, mind k_2-höz legfeljebb 2 érintő főkör húzható A-ból, így A-t legfeljebb 4 kiválasztott főkör tartalmazza. Ezzel a konstrukció helyességét beláttuk.

Megjegyzések. 1. A megoldás első részében leírtak a gömbi geometria közismert állításai.

2. A következő állítás lényegében a síkbeli megfelelője a feladatnak: a sík lefedhető egyenesekkel úgy, hogy minden pontot legfeljebb 4 egyenes tartalmaz, és nincs az egyenesek között 5 darab párhuzamos. Két diszjunkt kör összes érintői itt is triviálisan megfelelnek. Ebből a feladatunk állítását megkaphatjuk: ha a síkot a gömb egyik érintősíkjának választjuk, és a síkon megadott egyeneseket a gömb középpontjából a gömbfelszínre vetítjük, egy jó konstrukciót kapunk. A technikai részletek kidolgozását az olvasóra bízzuk. (Például miért fontos, hogy ne legyen az egyenesek között 5 párhuzamos?)

40 dolgozat érkezett. 5 pontos 27, 4 pontos 6, 2 pontos 1, 1 pontos 1, 0 pontos 5 dolgozat.

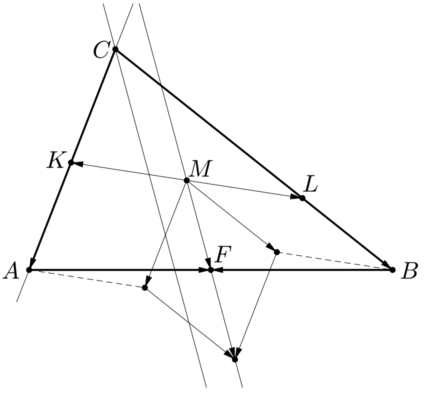
B. 4843. *Az ABC háromszög AC, illetve BC oldalaihoz írt köröknek az oldalakon az érintési pontjai rendre K és L. Bizonyítsuk be, hogy a KL és AB szakaszok felezőpontjain átmenő egyenes párhuzamos az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjével, és felezi a háromszög kerületét.*

(*5 pont*) (*Kvant* alapján)

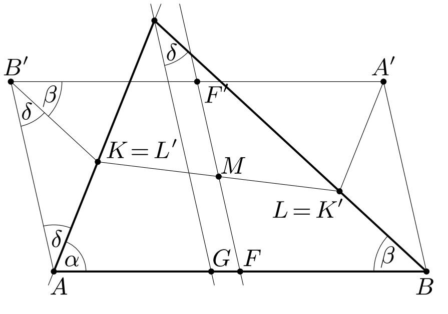
Megoldás. A feladat megoldása három jól elkülöníthető, önmagában is figyelemre érdemes lépésre bontható. Ezeket külön segédállításokként fogalmazzuk meg, ahol lehetséges, többféle indoklást is mutatunk.

1. segédállítás. *Ha az ABC háromszög AC és BC oldalain felvett K és L pontokra $AK=BL$, akkor az AB és KL szakaszok felezőpontjain átmenő egyenes párhuzamos az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjével.*

1. bizonyítás (vektorokkal, *Győrffy Ágoston* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása). Az AB szakasz felezőpontja legyen F, a KL szakaszé pedig M. A vektorok összeadásának definíciója szerint $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MK}+$ $+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BF}$. Ebből, felhasználva, hogy $\overrightarrow{MK}=-\overrightarrow{ML}$ és $\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{BF}$, kapjuk, hogy $2\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{LB}$. A feltétel szerint $|\overrightarrow{KA}|=|\overrightarrow{LB}|$, így a vektorösszeadást paralelogramma-módszerrel végezve egy rombuszt kapunk, aminek $2\overrightarrow{MF}$ átlója valóban felezi a $\overrightarrow{KA}$ és $\overrightarrow{LB}$ vektorok szögét, ahogy állítottuk (*1. ábra*). $\square$



1. ábra

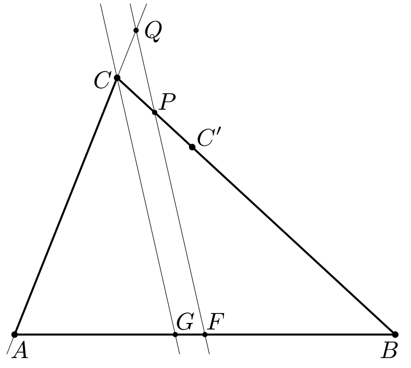


2. ábra

2. bizonyítás (elemi szögszámítással, *Daróczi Sándor* (Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn., 11. évf.) megoldása). Használjuk a *2. ábra* jelöléseit. Tükrözzük az $ABLK$ négyszöget és az F pontot középpontosan az M-re, így kapjuk az A', B', L' és K', valamint F' pontokat. A tükrözés miatt $ABA'B'$ paralelogramma, aminek FF' középvonala, így $AFF'B'$ is paralelogramma; valamint $KB'A'\sphericalangle=\beta$. Továbbá $AK=BL=B'L'$ miatt a $B'AK\triangle$ egyenlőszárú, így $B'AK\sphericalangle=KB'A\sphericalangle=\delta$. Mivel $\alpha+\beta<180°$, K az $ABA'B'$ paralelogramma belső pontja, és a 2. ábra helyes. Az ábráról leolvasható, hogy $\alpha+\beta+2\delta$ egyenesszög, mivel egy paralelogramma egy szárán fekvő két szög összege. Ebből következik, hogy az $ABC\triangle$-ben $C\sphericalangle = 2\delta$, amiből CG szögfelezése miatt $GCB\sphericalangle = \delta$. A tükrözés miatt $B'K \parallel BL = BC$, amiből $GCB\sphericalangle = AB'K\sphericalangle$ miatt $CG \parallel B'A \parallel F'F$, amivel az állítást beláttuk. $\square$

Megjegyzés. Az első, vektorokat használó megoldásból kitűnik, hogy nem szükséges feltennünk, hogy K és L a háromszög oldalainak egy-egy pontja, elegendő, hogy az oldalegyeneseken vannak, és $AK = BL$. Azonban attól függően, hogy K és L melyik A-hoz illetve B-hez tartozó félegyenesre kerül, változhat, hogy a $C\sphericalangle$ melyik szögfelezőjével lesz párhuzamos az FM egyenes.

2. segédállítás. *Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja legyen F, és F-en keresztül húzzuk meg a $BCA\sphericalangle$ szög (belső) szögfelezőjével párhuzamos e egyenest. Ekkor az e egyenes felezi az $ABC\triangle$ kerületét.*



3. ábra

1. bizonyítás (az 1. segédállításból közvetlenül). Az $a = b$ eset triviális, így az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a > b$, és használjuk a *3. ábra* jelöléseit. Legyen C' a BC oldal azon pontja, amelyre $BC' = AC$, továbbá legyen P a CC' szakasz felezőpontja. Alkalmazzuk az 1. segédállítást a $K = C$ és $L = C'$ pontokra. Kapjuk, hogy a PF egyenes párhuzamos a CG szögfelezővel, azaz $PF = e$. Az $AF = FB$, $AC = BC'$ és $C'P = PC$ nyilvánvaló egyenlőségekből adódik az állítás. $\square$

2. bizonyítás (szögfelező-tételből, *Győrffy Ágoston* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása). Ismét feltesszük, hogy $a > b$. A szögfelező-tétel szerint egy háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, azaz $AG/GB = b/a$. Innen arányos osztással $GB = ca/(a+b)$ azonnal adódik. Az $ABC\sphericalangle$-ben felírhatjuk a párhuzamos szelők tételét a CG szögfelezőre és az e egyenesre – a P pontot most $e \cap BC$-ként definiáljuk:

$$\frac{BF}{BG} = \frac{BP}{BC}.$$

Innen

$$BP = \frac{c/2}{ca/(a+b)} \cdot a = \frac{a+b}{2},$$

és végül $BF + BP = c/2 + (a+b)/2 = k/2$ valóban a kerület fele, ahogy állítottuk. $\square$

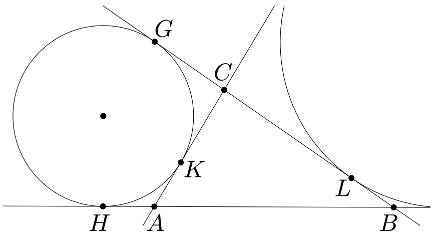
3. bizonyítás (Menelaosz-tételből). Továbbra is feltesszük, hogy $a > b$. Messe e a BC-t P-ben, az AC-t pedig Q-ban a 3. ábra szerint. Mivel e párhuzamos a CG szögfelezővel, $PQC\sphericalangle = GCA\sphericalangle = GCB\sphericalangle = CPQ\sphericalangle$, azaz $PQC\triangle$ egyenlőszárú. Írjuk fel a Menelaosz-tételt az $ABC\triangle$-re és az e egyenesre:

$$AF \cdot BP \cdot CQ = BF \cdot AQ \cdot CP.$$

Az $AF = BF$ és $PC = CQ$ egyszerűsítések után $AQ = BP$ adódik, amiből $PC = CQ = x$ jelöléssel $a - x = b + x$, és $x = (a - b)/2$ következik. Így $FA + AC + CP = c/2 + b + (a - b)/2 = k/2$, ahogy állítottuk. $\square$

3. segédállítás. *Az ABC háromszög AC, illetve BC oldalaihoz írt köröknek az oldalakon levő érintési pontjai rendre K és L. Ekkor $AK = BL$.*

Bizonyítás. Az állítás jól ismert, a teljesség kedvéért közöljük a bizonyítását. A szokásos jelöléseket használjuk, $s = (a + b + c)/2$ az $ABC\triangle$ félkerülete. Az AC oldalhoz írt kör érintési pontjai az AB és BC oldalegyeneseken legyenek rendre H és G. Mivel külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, azért $CG = CK$, $AH = AK$ és $BG = BH$. Ezeket felhasználva



4. ábra

$$BH + BG = BA + AH + BC + CG = BA + AK + BC + CK = a + b + c = 2s,$$

így $BH = s$, és $AK = AH = BH - BA = s - c$ adódik. Hasonló számolással $BL = s - c$, amiből az állítás következik. $\square$

A B. 4843. feladat megoldása. A három segédállításból a feladat állítása azonnal következik. A 3. segédállítás szerint $AK = BL$. Ezután az 1. segédállítás miatt a KL és AB szakaszok felezőpontjain átmenő egyenes párhuzamos az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjével, végül a 2. segédállítás szerint felezi a háromszög kerületét. $\square$

62 dolgozat érkezett. 5 pontos 52, 4 pontos 1, 3 pontos 4, 2 pontos 2, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4885. *Legyen k és m két különböző, 14-jegyű pozitív egész szám, mindkettőben 2 darab 1-es, 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös, 6-os és 7-es számjegyet tartalmaz (mint pl. a 22133456456717). Bizonyítsuk be, hogy $\frac{k}{m}$ nem lehet egész.*

(4 pont) *(M&IQ)*

Megoldás. A legnagyobb ilyen szám

$$77665544332211,$$

a legkisebb pedig

$$11223344556677.$$

Két ilyen szám 1-nél nagyobb hányadosa ezért mindig kisebb, mint 8. Valamennyi ilyen szám jegyeinek összege $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 = 56 = 6 \cdot 9 + 2$. A feladat állításával szemben tételezzük fel, hogy k és m hányadosa egész, azaz $k = md$, ahol d is pozitív egész, és a mondottak miatt $2 \leqslant d \leqslant 7$. Mivel k-nak és m-nek a 9-es maradéka egyaránt 2, a különbségük osztható 9-cel:

$$9 \mid k - m = md - m = m(d - 1).$$

Itt m-nek a 9-es maradéka 2 lévén az m még 3-mal sem osztható, így $d-1$ osztható lenne 9-cel, ami $1 \leqslant d-1 \leqslant 6$ miatt lehetetlen. A kapott ellentmondás miatt tehát $\frac{k}{m}$ valóban nem lehet egész szám.

188 dolgozat érkezett. 4 pontos 107, 3 pontos 60, 2 pontos 10, 1 pontos 7, 0 pontos 4 dolgozat.

MATEMATIKA ÉS FIZIKA TOTÓ*
a 2017. évi Őszi KöMaL Ankéton

1. Hány megoldása van a nemnegatív egész számok halmazán a $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$ egyenletnek? 3 (1); 4 (2); 6 (X).

2. Egy vízcsapból, amelynek 1 cm a belső átmérője, 6 cm/s sebességgel folyik ki a víz függőlegesen lefelé. A víz a csap aljától kb. 20 cm távolságban a felületi feszültség miatt cseppekké kezd alakulni. Mekkora a keletkező cseppek átmérője? Kisebb, mint 1 mm (1); nagyobb, mint 2 mm (2); az előző két érték közötti (X).

3. Az ABC háromszögben $AB = 15$, $BC = 14$ és $CA = 13$. A háromszög oldalaira kifelé a $BAPQ$, $CBRS$ és $ACTU$ négyzeteket állítottuk. Mekkora a $PQRSTU$ hatszög területe? 800 (1); 926 (2); 968 (X).

4. Homogén anyagú gömb belsejében ugyancsak gömb alakú, elhanyagolható sűrűségű gázzal töltött üreg van. A gömb középpontján átmenő tengelyek közül melyikre vonatkozóan legkisebb a tehetetlenségi nyomaték? Amelyik merőleges a gömb és az üreg középpontját összekötő egyenesre (1). A gömb és az üreg középpontját összekötő egyenesre (2). Nem függ a tehetetlenségi nyomaték a tengely irányától (X).

5. Két olyan prímszám van, melynek reciprokának tizedestört alakjában a periódus 7. Az egyik prím a 4649. Mennyi a másik prím számjegyeinek az összege? 12 (1); 13 (2); 14 (X).

6. Becsüljük meg, hogy mekkora teljesítményű villanymotor tudja biztonságosan működtetni azt a mozgólépcsőt, amelynek a vízszintessel bezárt szöge 30°, szintkülönbsége 20 m és egy lépcsőfokának magassága 25 cm. Elegendő 25 kW (1); kb. 40-70 kW (2); 150 kW felett (X).

7. Az r sugarú körbe olyan hatszöget írunk, melynek két oldala 7 egység, négy oldala pedig 20 egység hosszú. Mennyi r értéke? 14 (1); 15 (2); 16 (X).

8. Vajon a személygépkocsik gumiabroncsában nagyobb-e a levegő nyomása, mint a kerékpárok tömlőjében? A személygépkocsik keréknyomása a nagyobb (1); a kerékpároknál nagyobb a nyomás (2); körülbelül egyforma (X).

9. Egy ötjegyű és egy négyjegyű szám összege 33 190. Ha pedig a számjegyeiknek fordított sorrendben írásával előálló számokat adjuk össze, 48 400-at kapunk. Mennyi a két szám kilenc számjegyének az összege? 43 (1); 49 (2); 67 (X).

---

*A megoldások az 566. oldalon találhatók.