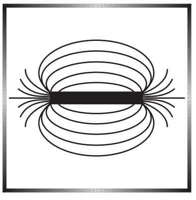
Egy homogén anyagú rugó rugóállandója fordítottan arányos a hosszával, tehát $\ell_3 = \frac{9}{25}\ell_5 = 0{,}36\,\ell_5$. Norbikának tehát az eredeti kötélhossz 36 százalékáig, majdnem a gumikötél *felső harmadáig* fel kell másznia, hogy a kívánt periódusidő-csökkenést elérhesse.

Veres Kristóf (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 9. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes Békési Péter, Garamvölgyi István Attila, Kozák Áron és Veres Kristóf megoldása. Kicsit hiányos (2 pont) 11, hiányos (1 pont) 7, hibás 9 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 4882. *Egy atomerőműben az uránmagok hasadásakor felszabaduló gyors neutronok mozgási energiája* MeV *nagyságrendű. Ahhoz, hogy ezek a neutronok további maghasadást idézhessenek elő, le kell lassítani őket az ún. „termikus energiaszintre", amikor a sebességük már csak kb.* 2,2 km/s.

A neutronok lassítása könnyű elemek (például a nehézvízben található deutérium) atommagjaival (deuteronokkal) történő rugalmas ütközéssel valósítható meg.

a) Hozzávetőleg hány ütközés után lassul le egy hasadási neutron a termikus energiaszintre? (Feltételezhetjük, hogy a deuteronok mozgási energiája az ütközések előtt elhanyagolható, továbbá az ütközések centrálisak.)

b) Nagyságrendileg mekkora a termikus neutronok mozgási energiája, és mekkora a „hőmérsékletük"?

(*4 pont*) *Versenyfeladat nyomán*

Megoldás. A neutron kezdeti mozgási energiája $E_0 = 1$ MeV $= 1{,}6\cdot 10^{-13}$ J, tömege (táblázatba foglalt érték): $m_\mathrm{n} = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg.

$$E_0 = \frac{1}{2}m_\mathrm{n}v_0^2, \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m_\mathrm{n}}} \approx 1{,}4\cdot 10^4\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

A neutron kezdeti mozgási energiája sokkal kisebb, mint a nyugalmi energiája (ami kb. 1 GeV), ezért jogosan használtuk a mozgási energia klasszikus (nemrelativisztikus) képletét.

A gyorsan mozgó neutron rugalmasan ütközik egy álló ${}^2_1\mathrm{H}$ deutérium-atommaggal (deuteronnal), amelynek tömege $m_\mathrm{H} \approx 2m_\mathrm{n}$. Felírhatjuk az ütközésre a lendület és a mechanikai energia megmaradásának törvényét:

$$m_\mathrm{n}v_0 = m_\mathrm{n}v_1 + m_\mathrm{H}u_1, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{n}v_0^2 = \frac{1}{2}m_\mathrm{n}v_1^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{H}u_1^2, \tag{2}$$

ahol v_1 a neutron, u_1 pedig a deuteron sebessége az ütközés után.

Az (1) egyenletből kifejezhetjük u_1-et, és azt (2)-be behelyettesíthetjük. A tömegek ismert arányát is felhasználva algebrai átalakítások után azt kapjuk, hogy

$$0 = (3v_1 + v_0)(v_1 - v_0).$$

A $v_1 = v_0$ (és az ezzel járó $u_1 = 0$) „megoldás" annak felel meg, hogy nem is történik ütközés, ezt a lehetőséget elvethetjük.

Ha a neutron ténylegesen ütközik a deuteronnal, akkor $v_1 = -\frac{1}{3}v_0$, tehát egyharmad részére csökken a neutron sebességének nagysága. Ez minden további ütközésnél megismétlődik (hacsak nem a már korábban meglökött deuteronnal ütközik a neutron; ennek lehetőségét nem vesszük számításba). Ilyen körülmények között minden ütközésnél harmadolódik a neutron sebessége, és N ütközés után

$$v_N = \frac{v_0}{3^N}$$

lesz a sebesség nagysága. Innen kiszámíthatjuk a neutronok lelassításához szükséges ütközések számát:

$$N = \frac{\log(v_0/v_N)}{\log 3} \approx 8.$$

b) Termikus energiaszinten a neutronok mozgási energiája

$$E_T = \frac{1}{2} m_{\mathrm{n}} v_N^2 \approx 4 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}.$$

Ha a neutronokat $f = 3$ szabadsági fokú, T hőmérsékletű gáznak tekintjük, akkor az egyes részecskékre jutó átlagos mozgási energia

$$E_T = \frac{3}{2}kT$$

összefüggéséből a neutrongáz hőmérsékletére $T \approx 195$ K-t kapunk. Ez nagyságrendileg megegyezik a 300 K-es szobahőmérséklettel; éppen ezért nevezik az ilyen mértékben lelassított részecskéket *termikus* neutronoknak.

Bukor Benedek (Révkomárom, Selye János Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

45 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 1 dolgozat.

P. 4896. *Egy kicsi sportrepülőgép „szembeszélben"* 3 óra *alatt tud A-ból pontosan észak felé B-be repülni, visszafelé „hátszélben"* 2 óra *alatt ér B-ből A-ba. Mennyi idő alatt tenné meg az utat oda-vissza, ha állandóan északkeleti szél fújna? (A szél sebessége mindvégig ugyanakkorának tekinthető.)*

(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. Jelöljük az AB távolságot s-sel, a repülő, illetve a szél sebességét pedig $v_{\text{repülő}}$-vel és $v_{\text{szél}}$-lel. Felírhatjuk az észak felé, illetve a dél felé haladó repülőgépre az út–idő–sebesség kapcsolatot:

$$s = (v_{\text{repülő}} - v_{\text{szél}}) \cdot 3\ \text{óra},$$

$$s = (v_{\text{repülő}} + v_{\text{szél}}) \cdot 2\ \text{óra}.$$

A fenti két egyenletből

$$2(v_{\text{repülő}} + v_{\text{szél}}) = 3(v_{\text{repülő}} - v_{\text{sz}}),$$

vagyis

$$v_{\text{repülő}} = 5\,v_{\text{szél}} \qquad \text{és} \qquad s = v_{\text{szél}} \cdot 12 \text{ óra}$$

következik.

Ha mindvégig állandó nagyságú északkeleti szél fúj, akkor a szél sebességének nyugat felé mutató komponense

$$v_{\text{szél}}^{(\text{nyugat})} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_{\text{szél}}.$$

Ugyanekkora nagyságú a repülőgép levegőhöz viszonyított sebességének kelet felé mutató komponense, hiszen a repülőgép eredő sebessége tisztán északi, illetve visszafelé jövet tisztán déli irányú. Eszerint a repülőgép levegőhöz viszonyított sebességének észak (vagy dél) felé mutató komponense

$$v_{\text{repülő}}^{(\text{észak–dél})} = \sqrt{v_{\text{repülő}}^2 - \frac{1}{2} v_{\text{szél}}^2} = \frac{7}{\sqrt{2}} v_{\text{szél}}.$$

Ha ebből a sebességkomponensből levonjuk a szél sebességének dél felé mutató

$$v_{\text{szél}}^{(\text{dél})} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_{\text{szél}}$$

komponensét, illetve ha hozzáadjuk azt, megkapjuk a repülő talajhoz viszonyított sebességét északkeleti (ferde) szembeszélben, illetve északkeleti (ferde) hátszélben:

$$v_1 = \left(\frac{7}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) v_{\text{szél}} = \frac{6}{\sqrt{2}}\, v_{\text{szél}},$$

$$v_2 = \left(\frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) v_{\text{szél}} = \frac{8}{\sqrt{2}}\, v_{\text{szél}}.$$

A teljes menetidő ilyen sebességek mellett:

$$T = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = \frac{12 \text{ óra}}{\frac{6}{\sqrt{2}}} + \frac{12 \text{ óra}}{\frac{8}{\sqrt{2}}} \approx 4{,}95 \text{ óra}.$$

Makai Enikő (Csongrád, Batsányi J. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

83 dolgozat érkezett. Helyes 44 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 28, hibás 4 dolgozat.

P. 4897. *Függőlegesen álló, felül nyitott, henger alakú edényből az alul lévő csapon keresztül folyik ki a víz. Hogyan változik a víz felszínének süllyedési sebessége? Ha T idő alatt folyik ki a víz fele az edényből, mennyi idő alatt ürül ki teljesen az edény?*

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Jelöljük az edény belsejének keresztmetszetét A-val, a csap keresztmetszetét A_0-lal, a vízfelszín folyamatosan változó nagyságú sebességét v-vel, a csapból kiáramló víz sebességét pedig V-vel.

Írjuk fel a Bernoulli-törvényt a h magasságú vízoszlop felszínét és a csapot összekötő valamelyik áramvonalra (*1. ábra*):

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + p_0 + \varrho g h = \frac{1}{2}\varrho V^2 + p_0.$$

(p_0 a külső légnyomás, ϱ a víz sűrűsége.) Felhasználhatjuk még a kontinuitási egyenletet (az anyagmegmaradás törvényét) is:

$$VA_0 = vA.$$

Ezen két összefüggés meghatározza a folyadék felszínének süllyedési sebességét:

$$v(h) = \sqrt{\frac{A_0^2}{A^2 - A_0^2} 2gh}\,,$$

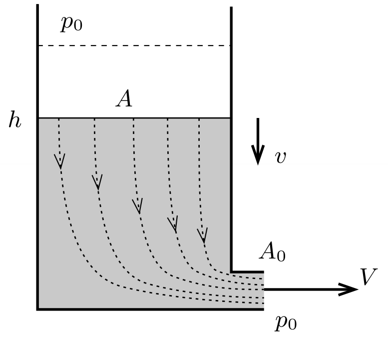
amit

$$v(h) = \sqrt{2g'h}$$

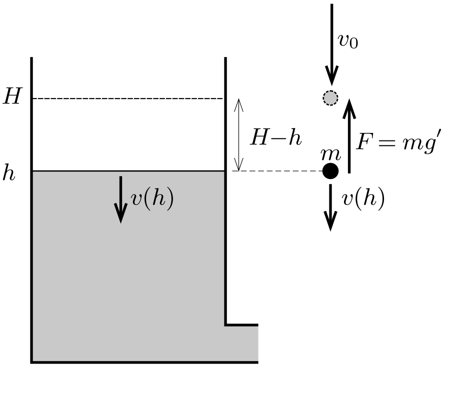
alakban is felírhatunk, ahol

$$g' = \frac{A_0}{\sqrt{A^2 - A_0^2}} g = \text{állandó}.$$

Látható, hogy a folyadék felszínének süllyedési sebessége a magasság *négyzetgyökével* arányos.



1. ábra



2. ábra

Legyen a folyadékfelszín kezdeti magassága az edény aljához képest H. Vizsgáljuk meg egy pontszerű test mozgását egy olyan gravitációs mezőben, amelyben a „nehézségi gyorsulás” nagysága g', iránya pedig ellentétes g-vel (*2. ábra*). Induljon a test $v_0=\sqrt{2g'H}$ kezdősebességgel a kezdeti vízszint magasságától az edény alja felé. A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-mg'(H-h).$$

Innen a test h magassághoz tartozó sebessége:

$$v(h)=\sqrt{2g'h}\,.$$

Mivel tetszőleges h magasságban a folyadékfelszín és a kis test sebessége a g' gravitációjú térben megegyezik, ezért ha képzeletben egymás mellé helyezzük őket úgy, hogy a vízre csak a szokásos g gravitációjú tér hasson lefelé, a kis testre pedig csak a g' felfelé, akkor a kis test és a vízfelszín (egyenletesen lassuló mozgással) mindvégig egymás mellett marad, egyformán süllyed lefelé.

A vízfelszín süllyedési sebessége az idő függvényében a kis test sebességével egyezik meg:

$$v(t)=v_0-g't.$$

Amikor a víz fele kifolyik, a kis test $H/2$ magasságba ér, a sebessége tehát $v_1=$ $=\sqrt{g'H}$ lesz. Mivel ez T idő alatt következik be,

$$v_1=v_0-g'T,\quad \text{ahonnan}\quad T=\frac{v_0-v_1}{g'}=\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{H}{g'}}\,.$$

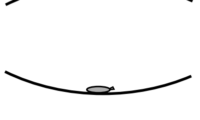
A teljes kiürülés T_0 idejekor a kis test sebessége nulla, vagyis $v_0-g'T_0=0$, ahonnan a keresett időtartam:

$$T_0=\frac{v_0}{g'}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{H}{g'}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}T\approx 3{,}4\,T.$$

Nagy Botond (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

41 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 4, hibás 2 dolgozat.

P. 4900. *Érdekes optikai játék két egymással szembefordított, azonos görbületi sugarú, homorú gömbtükör, melyek közül a felső tükör közepén egy néhány centiméter átmérőjű, kör alakú lyuk van. A tükrök olyan távolságra vannak egymástól, hogy az alsó tükör közepére tett kicsiny tárgy (például egy szem cukor) képe a lyukas tükör közepén jelenik meg, miután a tárgyról induló fénynyaláb előbb a felső, azután az alsó tükörről is egyszer visszaverődött.*



a) Milyen messze lehet egymástól a két tükör közepe?

b) Egyenes vagy fordított állású, valódi vagy látszólagos a megjelenő kép, és mekkora a nagyítás?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Nevezzük a felső tükröt F tükörnek, az alsó tükröt A tükörnek. A tárgyból kiinduló fénysugarak az F, majd az A tükörről visszaverődve az F tükör közepén hoznak létre képet. Ez a kép csak valódi lehet, mert az A tükörről visszaverődő (ez már a 2. visszaverődés!) fénysugarak nyilván elérik az F tükröt, és csak akkor jöhet létre kép ezen tükör középpontjában, ha a fénysugarak valóban metszik egymást.

A két tükör közepének távolságát nevezzük d-nek, a fókusztávolságukat pedig jelöljük f-fel. Az F tükörre tükrözéskor a tárgytávolság d:

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f},$$

innen az első képtávolság, vagyis az A tükör távolsága a létrejövő képtől

$$k_1=\frac{fd}{d-f}.$$

Ha ez nullánál kisebb, vagy d-nél nagyobb, akkor az első tükröződés után nem jön így létre valódi kép, de ez nem befolyásolja a további számolás érvényességét. A második, az A tükör által létrehozott képalkotásnál a tárgytávolság

$$t_2=d-k_1=\frac{2df-d^2}{f-d},$$

a képtávolság pedig $k_2=d$.

$$\frac{1}{t_2}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f},$$

amiből t_2 behelyettesítése és algabrai átalakítások után a

$$0=d^2-4fd+3f^2=(d-f)(d-3f)$$

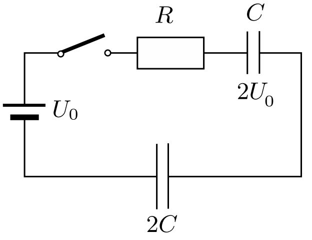
másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai: $d=f$ és $d=3f$.

$d=3f$ esetén az első tükrözés fordított állású, felére kicsinyített képet eredményez a két tükör között félúton ($k_1=\frac{3}{2}f=\frac{1}{2}d$). A második tükröződés visszafordítja és kétszeresére növeli a képet. Végeredményben a létrejövő kép *valódi, egyenes állású* és a tárggyal *megegyező méretű* lesz.

$d=f$ esetén is létrejöhet kép, hiszen az elsőként az F tükörről visszaverődő fénysugarak párhuzamosak lesznek, és a párhuzamos fénysugarakat az A homorú tükör a saját fókuszpontjába gyűjti, ami az F tükör középpontja. A keletkező kép *valódi,* a tárggyal *azonos méretű,* de az előző esettől eltérően *fordított* állású lesz.

Fajszi Bulcsú (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

24 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (2–3 pont) 9 dolgozat.



P. 4904. *Az ábrán látható kapcsolásban a C kapacitású kondenzátor feszültsége kezdetben $2U_0$, a $2C$ kapacitású kondenzátor töltetlen.*

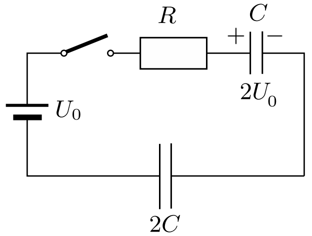
Mennyi hő fejlődik az R ellenálláson, miután zártuk a kapcsolót?

(*6 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

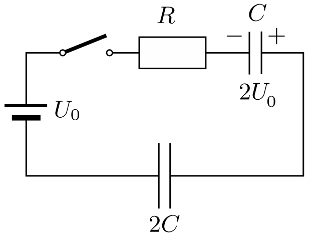
Megoldás. A feltöltött (C kapacitású és $Q_0 = 2CU_0$ töltésű) kondenzátor kezdeti polaritásától függően két eset lehetséges.

I. eset: A kondenzátor pozitív töltésű fegyverzete a bal oldalon van (*1. ábra*).

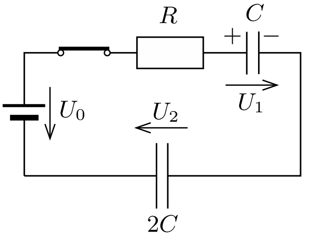
II. eset: A pozitív fegyverzet a jobb oldalra kerül (*2. ábra*).



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Vizsgáljuk először az első esetet. A kapcsoló zárása után az áramkörben töltésáramlás indul meg, melynek során mindkét kondenzátor töltött állapotba kerül (*3. ábra*). A folyamat végén a körben már nem folyik áram, ennek következtében az ellenálláson nem esik feszültség. Írjuk fel a huroktörvényt erre az állapotra a 3. ábra jelöléseit használva (az óramutató járásával azonos irányban):

$$U_1 + U_2 - U_0 = 0. \tag{1}$$

Tudjuk továbbá, hogy a két kondenzátort összekötő ágon az összes töltés a kezdeti és végállapotban egyenlő (hiszen a kondenzátor lemezei között nem haladhatnak át töltések):

$$-2CU_0 = -CU_1 + 2CU_2, \tag{2}$$

innen

$$2U_0 = U_1 - 2U_2. \tag{3}$$

Az (1) és (3) egyenletek rendszerének megoldása:

$$U_1 = \frac{4}{3}U_0, \qquad U_2 = -\frac{1}{3}U_0.$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a $2C$ kapacitású kondenzátoron a lemezek töltése a 3. ábrán jelölthöz képest ellentétes (a bal oldali lemez lesz pozitív töltésű).

Jóllehet az ellenálláson áthaladó áram időben bonyolult módon (belátható, hogy exponenciális függvény szerint) változik, az ellenálláson fejlődő Joule-hő elemi úton (integrálszámítás nélkül) is kiszámítható, ha energetikai megfontolásokat követünk. Feltételezzük, hogy az áramkörből nem jut ki energia (elhanyagolva az áramok által keltett mágneses tér gerjesztette elektromágneses hullámokat), így teljesül a

$$W_{\text{telep}} + W_C + W_{2C} + W_R = 0 \tag{3}$$

mérlegegyenlet. A fenti képletben W_{telep} a telep energiaváltozását, W_C és W_{2C} az egyes kondenzátorok energiaváltozását, W_R pedig az ellenálláson fejlődő hőt jelöli.

A kondenzátorok energiaváltozása:

$$W_C = \frac{1}{2}C\big(U_1^2 - (2U_0)^2\big) = -\frac{10}{9}CU_0^2,$$

$$W_{2C} = \frac{1}{2}2C\big(U_2^2 - 0\big) = \frac{1}{9}CU_0^2,$$

a telep energiaváltozása pedig az U_0 feszültség és a telepen áthaladó töltés szorzata:

$$W_{\text{telep}} = U_0(Q_0 - CU_1) = U_0\left(2CU_0 - C\cdot\frac{4}{3}U_0\right) = \frac{2}{3}CU_0^2.$$

(A pozitív előjel azt jelenti, hogy a telepnek nő az energiája.)

A (3) energiamérleg segítségével kiszámíthatjuk az ellenálláson fejlődő hőt:

$$W_R = -W_{\text{telep}} - W_C - W_{2C} = -\frac{2}{3}CU_0^2 - \left(-\frac{10}{9}CU_0^2\right) - \frac{1}{9}CU_0^2 = \frac{1}{3}CU_0^2.$$

A második esetben az fentiekhez teljesen hasonló módon járhatunk el. A megfelelő egyenletek csak a C kapacitású kondenzátor kezdeti töltését megadó kifejezés előjelében térnek el az első eset egyenleteitől:

$$U_1 + U_2 - U_0 = 0, \tag{1'}$$

$$+2CU_0 = -CU_1 + 2CU_2, \tag{2'}$$

$$2U_0 = 2U_2 - U_1. \tag{3'}$$

Az (1′)–(3′) egyenletek megoldása:

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = U_0.$$

(Ez azt jelenti, hogy a kapcsoló zárása után a C kapacitású kondenzátor összes töltése átkerül a másik kondenzátorra.) Az energiaváltozások:

$$W_C = \frac{1}{2}C\big(0 - (2U_0)^2\big) = -2CU_0^2,$$

$$W_{2C} = \frac{1}{2}2C\big(U_0^2 - 0\big) = CU_0^2,$$

$$W_{\text{telep}} = -U_0\cdot 2CU_0 = -2CU_0^2.$$

(A telep energiaváltozása ebben az esetben negatív, hiszen az áram a telepfeszültséggel ellentétes irányban folyik.) Az energiamérlegből:

$$W_R = -W_{\text{telep}} - W_C - W_{2C} = 2CU_0^2 - \big(-2CU_0^2\big) - CU_0^2 = 3CU_0^2.$$

Az ellenálláson fejlődő hő tehát a már kezdetben is feltöltött kondenzátor bekötésétől (polaritásától) függően $\frac{1}{3}CU_0^2$ vagy $3CU_0^2$.

Németh Róbert (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Belátható, hogy ha egy ellenálláson időben exponenciálisan csökkenő áram folyik keresztül (esetünkben éppen ez történik), akkor a teljes kisülési folyamat során fejlődő Joule-hő az ellenállásra eső kezdeti (maximális) feszültség és az ellenálláson átfolyó töltés szorzatának felével egyezik meg.

Valóban, ha az áramerősség

$$I(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

az ellenállásra eső feszültség tehát

$$U(t) = RI(t) = RI_0 \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

akkor a folyamat során fejlődő Joule-hő (ami az időben változó $P(t) = U(t)I(t)$ teljesítmény integrálja):

$$W_R = \int_0^\infty U(t)I(t)\,\mathrm{d}t = RI_0^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{RI_0^2}{2\lambda}.$$

Másrészt a kezdeti (maximális) feszültség az ellenálláson

$$U_{\max} = U(0) = RI(0) = RI_0,$$

a rajta átfolyó töltés pedig

$$Q = \int_0^\infty I(t)\,\mathrm{d}t = I_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{I_0}{\lambda}.$$

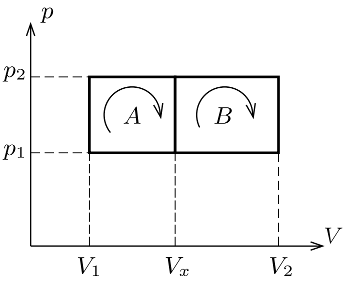
Látható, hogy a hivatkozott $W_R = \frac{1}{2}U_{\max}Q$ összefüggés teljesül. A feladatban szereplő kapcsolásnál a keresett hő

$$\frac{1}{2}(-U_0)\left(-\frac{2}{3}CU_0\right) = \frac{1}{3}CU_0^2, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{1}{2}(3U_0)(2CU_0) = 3CU_0^2.$$

(Sz. K.)

26 dolgozat érkezett. Helyes Elek Péter, Fehér Szilveszter, Fekete Balázs Attila, Jakus Balázs István, Marozsák Tóbiás, Nagy Botond és Németh Róbert, Olosz Adél, Sal Dávid és Szentivánszki Soma megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 1 dolgozat.

P. 4907. *Mekkora V_x térfogat esetén egyezik meg az ábrán látható A és B körfolyamatot végző, állandó tömegű ideális gázzal működő két hőerőgép hatásfoka?*



(*4 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. Az A körfolyamatban a hőerőgép η_A hatásfoka a gáz által végzett

$$W_A = (p_2 - p_1)(V_x - V_1)$$

hasznos munka és a gáz által felvett hő hányadosa. Hőfelvétel egyrészt az állandó V_1 térfogaton végbemenő izochor állapotváltozáskor történik, ennek nagysága

$$Q_1 = \frac{f}{2}V_1(p_2 - p_1),$$

másrészt a p_2 nyomáson végbemenő izobár táguláskor, amikor a felvett hő

$$Q_2 = \frac{f+2}{2}p_2(V_x - V_1).$$

(A fenti képletekben felhasználtuk, hogy az f szabadsági fokú gáz belső energiája $E = (f/2)pV$, és a hőfelvétel $Q = \Delta E + p\Delta V$.) A körfolyamat hatásfoka tehát

$$\eta_A = \frac{W_A}{Q_1 + Q_2} = \frac{(p_2 - p_1)(V_x - V_1)}{\frac{f}{2}V_1(p_2 - p_1) + \frac{f+2}{2}p_2(V_x - V_1)}.$$

Hasonló módon számíthatjuk ki a B körfolyamat hatásfokát is. Itt a hőfelvétel a V_x térfogaton végbemenő izochor állapotváltozáskor

$$Q_3 = \frac{f}{2}V_x(p_2 - p_1),$$

illetve az izobár táguláskor felvett

$$Q_4 = \frac{f+2}{2}p_2(V_2 - V_x)$$

összege, a hasznos munka pedig

$$W_B = (p_2 - p_1)(V_2 - V_x).$$

A hatásfok ennek megfelelően

$$\eta_B = \frac{W_B}{Q_3 + Q_4} = \frac{(p_2 - p_1)(V_2 - V_x)}{\frac{f}{2}V_x(p_2 - p_1) + \frac{f+2}{2}p_2(V_2 - V_x)}.$$

Ha a két körfolyamat hatásfoka megegyezik, akkor nyilván

$$\frac{1}{\eta_A} = \frac{1}{\eta_B}$$

is fennáll. A hatásfokok fentebb kiszámított kifejezéseit behelyettesítve:

$$\frac{f}{2}\,\frac{V_1}{V_x-V_1}+\frac{f+2}{2}\,\frac{p_2}{p_2-p_1}=\frac{f}{2}\,\frac{V_x}{V_2-V_x}+\frac{f+2}{2}\,\frac{p_2}{p_2-p_1},$$

ahonnan

$$\frac{V_1}{V_x-V_1}=\frac{V_x}{V_2-V_x},$$

$$V_1V_1-V_1V_x=V_x^2-V_1V_x,$$

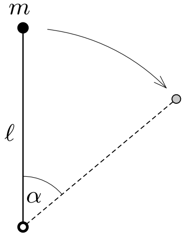
vagyis $V_x=\sqrt{V_1V_2}$ következik.

A keresett V_x érték tehát a V_1 és V_2 térfogatértékek *mértani* közepe.

Bukor Benedek (Révkomárom, Selye János Gimn., 10. évf.)
dolgozata felhasználásával

Megjegyzés. Érdekes, hogy a kapott eredmény sem a nyomások nagyságától, sem pedig a gáz minőségére jellemző f-től nem függ.

48 dolgozat érkezett. Helyes 41 megoldás. Hiányos (2–3 pont) 7 dolgozat.



P. 4908. *Egy ℓ hosszúságú, elhanyagolható tömegű rúd egyik végére m tömegű, pontszerű testet rögzítünk. Másik végét csuklós rögzítéssel látjuk el, mely körül foroghat a rendszer. A függőleges, instabil helyzetéből kimozduló rúd mekkora α szögénél lesz a végén lévő test centripetális gyorsulása egyenlő az érintő irányú gyorsulásával?*

Nyomja vagy húzza ekkor a rúd a testet? (A súrlódástól tekintsünk el!)

(*4 pont*) Közli: *Hegedűs József,* Kaposvár

Megoldás. A feladat *ábráján* látható helyzetben a test sebessége az energiamegmaradás

$$mg\ell(1-\cos\alpha)=\frac{mv^2}{2}$$

törvénye szerint $v=\sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)}$, így a test centripetális gyorsulása

$$a_{\mathrm{cp}}=\frac{v^2}{\ell}=2g(1-\cos\alpha).$$

Az érintőirányú (tangenciális) gyorsulást a nehézségi erő érintőirányú komponense ($mg\sin\alpha$) „hozza létre”, hiszen az elhanyagolható tömegű rúd csak rúdirányú erőt tud kifejteni. A tangenciális gyorsulás nagysága $a_{\mathrm{t}}=g\sin\alpha$.

A kétféle gyorsulás nagysága akkor egyezik meg, ha fennáll:

$$\sin\alpha=2(1-\cos\alpha).$$

Négyzetre emelés után kapjuk, hogy

$$1-\cos^2\alpha = 4-8\cos\alpha+4\cos^2\alpha,$$

vagyis az $x=\cos\alpha$ ismeretlenre az

$$5x^2-8x+3=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai: $x_1=0$, vagyis $\alpha_1=0$ (ez a függőleges instabil egyensúlyi helyzetnek felel meg, ahol $a_\mathrm{t}=a_\mathrm{cp}=0$), a másik gyök pedig

$$x_2=\frac{3}{5},\qquad \text{azaz}\qquad \alpha_2\approx 53{,}13^\circ.$$

Kezdetben a test nyilván nyomja a rudat, a rúd pedig „nyomja” felfelé a testet. A későbbiekben ez az erő egyre csökken, és valamekkora α_0 szögnél nullává válik, majd húzóerőbe vált át. A határesetet az jellemzi, hogy a centripetális erő éppen egyenlő a nehézségi erő rúdirányú komponensével, vagyis a centripetális gyorsulás megegyezik a nehézségi gyorsulás rúdirányú összetevőjével:

$$\frac{v^2}{\ell}=2g(1-\cos\alpha_0)=g\cos\alpha_0,\quad \text{vagyis}\quad \cos\alpha_0=\frac{2}{3},\quad \alpha_0\approx 48{,}2^\circ.$$

Ennél kisebb α szögeknél a rúd (ferdén felfelé) nyomja a pontszerű testet, nagyobb szögeknél pedig (ferdén lefelé) húzza azt. Mivel a korábban kiszámított szögekre $\alpha_2>\alpha_0$ teljesül, amikor a centripetális gyorsulás nagysága megegyezik az érintőirányú gyorsulással, a rúd már *húzza* a pontszerű testet.

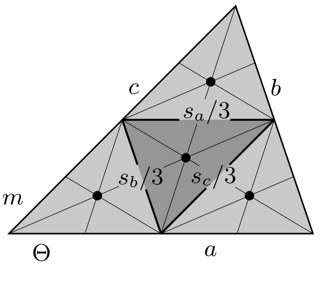
Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 9. évf.)

71 dolgozat érkezett. Helyes 43 megoldás hiányos (1–3 pont) 24, hibás 4 dolgozat.

P. 4911. *Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka egy m tömegű, homogén tömegeloszlású, a, b, c oldalhosszúságú háromszöglapnak a síkjára merőleges, súlypontján áthaladó tengelyre vonatkozólag? (A feladat elemi úton is megoldható.)*

(*5 pont*) Közli: *Fehér Szilveszter,* Budapest, Óbudai Gimnázium

Megoldás. Legyen a keresett tehetetlenségi nyomaték Θ. Húzzuk be a középvonalakat a háromszögben, amik így 4 egybevágó kis háromszögre bontják a nagy háromszöget. A kis háromszögek a nagyhoz hasonlóak, a hasonlóság aránya 1 : 2.



A kis háromszögek tömege $\frac{1}{4}m$, lineáris méretük fele a nagy háromszög méreteinek, így a kis háromszögek mindegyikének tehetetlenségi nyomatéka a saját súlypontukon átmenő tengelyre vonatkoztatva $\frac{1}{16}\Theta$.

A kis háromszögek tömegközéppontja a nagy háromszög tömegközéppontjától $\frac{1}{3}s_a$, $\frac{1}{3}s_b$ és $\frac{1}{3}s_c$ távolságra van, ahol s_a, s_b és s_c a nagy háromszög súlyvonalai.

A Steiner-tételt alkalmazva adjuk össze a négy kis háromszögnek a nagy háromszög súlypontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát, így megkapjuk a nagy háromszög tehetetlenségi nyomatékát.

$$\frac{1}{16}\Theta+\left(\frac{1}{16}\Theta+\frac{m}{4}\left(\frac{s_a}{3}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{16}\Theta+\frac{m}{4}\left(\frac{s_b}{3}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{16}\Theta+\frac{m}{4}\left(\frac{s_c}{3}\right)^2\right)=\Theta,$$

ahonnan

$$\Theta=\frac{m}{27}\left(s_a^2+s_b^2+s_c^2\right).$$

Egy háromszög a oldalához tartozó súlyvonalának hossza a paralelogrammatételből adódóan

$$s_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{2},$$

és hasonlóan kapható meg a többi súlyvonal hossza is. Ezt a fentebb kapott képletbe helyettesítve a háromszöglap tehetetlenségi nyomatékára végül a

$$\Theta=\frac{m}{36}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

eredményt kapjuk.

Póta Balázs (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Hasonló gondolatmenettel kapható meg több más síklemez, illetve homogén test tehetetlenségi nyomatéka is. Egy a és b oldalélű paralelogramma-lemezre például $\Theta=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$. Ez az eredmény független a paralelogramma szögétől, emiatt egy téglalap alakú lemezre is érvényes.

(*G. P.*)

27 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 372. Készítsünk egy hengeres műanyag (PET) palackból homokórát. A palack kupakján alakítsunk ki egy (kb. 8-10 mm átmérőjű) lyukat, és azon keresztül pergessük ki a palackból a száraz homokot. Mérjük meg, hogyan függ az időegységenként kiáramló homok mennyisége a palackbeli homokszint magasságától!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 613. Körpályán mozgó jármű állandó, 72 km/h nagyságú sebességgel halad. Mennyi időnként kerül ugyanabba a pontba, ha gyorsulásának nagysága 1,6 m/s^2?

(*3 pont*)