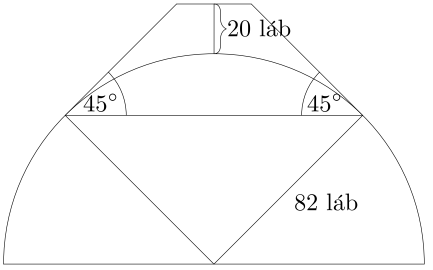


C. 1445. Az „Egy angol, aki dombra ment fel, de hegyről jött le” című filmben egy walesi falu mellett lévő hegyet, miután lemérték a magasságát, a földmérők dombnak minősítettek. A falusiak büszkék voltak a hegyükre, és ebbe nem nyugodtak bele. Elhatározták, hogy 984 lábról 1004 lábra emelik a magasságát. Földet hordanak fel a 82 láb sugarú félgömbnek tekinthető dombtetőre olyan csonkakúp alakban, amelynek alkotója a félgömb érintője, és 45°-os szöget zár be a vízszintessel. Így a magasság meghaladja majd az 1000 lábat, és a dombot újra hegynek lehet nevezni. Hány köbláb földet kellett felhordaniuk a dombra?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1446. Az $ABCD$ paralelogramma belsejében vegyük fel a Q pontot úgy, hogy $AQB\sphericalangle + CQD\sphericalangle = 180°$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy $QBA\sphericalangle = QDA\sphericalangle$ és $QAD\sphericalangle = QCD\sphericalangle$.

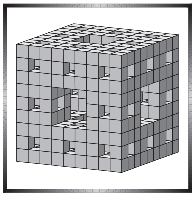
C. 1447. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a VALÓSZÍNŰSÉG, illetve SZÁMÍTÁS szavak mindegyikéből két-két véletlenszerűen választott karaktert véletlenszerűen egymás mellé írva ugyanazt a két „szót” kapjuk?

❄

Októberi számunkban a **C. 1437.** feladat hiányosan jelent meg. A feladatot újra kitűzzük, a megoldását a novemberi feladatokkal együtt várjuk.

C. 1437. Kilenc különböző egyenes mindegyike 2 : 3 arányban osztja egy négyzet területét úgy, hogy egyik egyenes sem vág le háromszög alakú részt a négyzetből. Igazoljuk, hogy az egyenesek között van három olyan, amelyek egy ponton mennek keresztül.

Beküldési határidő: 2017. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4903–4911.)

B. 4903. Határozzuk meg azokat az a, b, c, d pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $abcd - 1 \mid a + b + c + d$.

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 4904. Egy S síkidomnak pontosan kettő szimmetriatengelye van. Mutassuk meg, hogy S középpontosan is szimmetrikus.

(*3 pont*)

B. 4905. Legyen $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n-1} \geqslant a_{2n} \geqslant 0$, illetve $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 1$. Igazoljuk, hogy

$$a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Mikor teljesül egyenlőség?

(*4 pont*)

B. 4906. Az $ABCD$ konvex négyszög BC és CD oldalainak felezőpontja rendre E és F. Az AE, EF és AF szakaszok a négyszöget négy olyan háromszögre bontják, melyek területeinek mérőszáma négy egymást követő egész szám. Legfeljebb mekkora lehet az ABD háromszög területe?

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 4907. Bizonyítsuk be, hogy egy $a \times b$ méretű téglalapon legfeljebb $[a] \cdot [b]$ darab olyan 1×1-es négyzet helyezhető el átfedés nélkül, melyek oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival (ahol $[x]$ az x szám egész részét jelenti).

(*5 pont*)

B. 4908. Legyen C az AB átmérőjű körvonal tetszőleges pontja. A C pont merőleges vetülete az AB szakaszra legyen T. Rajzoljuk meg a C középpontú, T-n átmenő kört és a két kör metszéspontjai legyenek P és Q. Bizonyítsuk be, hogy a PQ egyenes felezi a CT szakaszt.

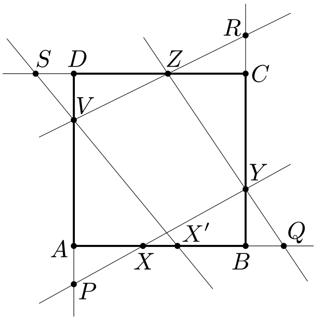
(*4 pont*) (*Kvant*)

B. 4909. Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely minden $x \neq 0$ és y esetén kielégíti az alábbi egyenletet:

$$x \cdot f(y) - y \cdot f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

(*6 pont*) (*Kvant*)

B. 4910. Az $ABCD$ négyzet oldalegyenesein vegyük fel a P, Q, R és S pontokat az *ábra* szerint úgy, hogy $AP = BQ = CR = DS$. Az AB oldal tetszőleges belső X pontjából kiindulva a PX egyenes messe BC egyenesét Y-ban, QY messe CD egyenesét Z-ben, RZ a DA egyenest V-ben, végül SV az AB egyenest X'-ben. Bizonyítsuk be hogy ha X' és X egybeesnek, akkor $XYZV$ négyzet.



(*5 pont*)

B. 4911. Egy 8×8-as sakktáblára bábukat helyeztünk úgy, hogy minden sorba és minden oszlopba is páratlan számú bábu került. Bizonyítsuk be, hogy a sötét mezőkön összesen páros sok bábu áll.

(*5 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2017. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (707–709.)

A. 707. 100 betyár áll a hortobágyi síkságon. Mindegyik illető egy 100°-os szögtartományt lát. Az összes betyár felírja egy-egy papírra, hogy hány másik betyárt lát, majd mi összeadjuk ezt a 100 számot. Mi a lehető legnagyobb összeg, amit ily módon kaphatunk?

A. 708. Legyen S racionális számokból álló véges halmaz. Minden k pozitív egészre legyen $b_k = 0$, ha választható k darab (nem feltétlenül különböző) S-beli szám, melyek összege 0, és $b_k = 1$ egyébként. Mutassuk meg, hogy a $0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots$ kettedestört racionális szám. Igaz marad-e az állítás, ha S-ről nem kötjük ki, hogy véges?

A. 709. Legyen $a > 0$ valós szám. Határozzuk meg azt a legkisebb C_a számot, amire a

$$C_a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - x_{k-1}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{k+a}{x_k}$$

egyenlőtlenség teljesül tetszőleges n pozitív egész és $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ valós számok esetén.

❄

Beküldési határidő: 2017. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄