A teleszkópikus összeg közbülső tagjai „kiesnek”, így $S_n = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$. Ezt szerettük volna belátni.

b) A tört számlálójában és nevezőjében minden tagot n-nel elosztva kapjuk, hogy:

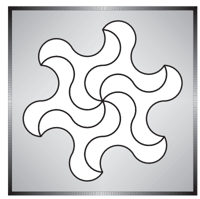
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}\right)=1-\frac{0}{1}=1.$$

A határérték definíciója alapján:

$$\left|1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}-1\right|<\frac{1}{100},\quad \text{vagyis}\quad \left|\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right|<\frac{1}{100}.$$

Mivel n pozitív egész, ezért $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} < \frac{1}{100}$, melyet rendezve $0 < n^2 - 9998n - 9999$. Az egyenlőtlenség pozitív zérushelye 9999, így az ennél nagyobb természetes számok megfelelnek küszöbértéknek.

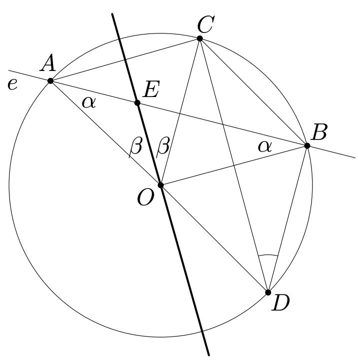
Varga Péter
Budapest



Matematika feladatok megoldása

B. 4841. *Az O középpontú k kör az e egyenest az A és B pontokban, az OB szakaszfelező merőlegesét pedig a C és D pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy a $COA\sphericalangle$ szögfelezője és az e egyenes 60 fokos szöget zárnak be.*

(*3 pont*)



Megoldás. Az OCB háromszög szabályos, ugyanis $OC = OB$ sugarak, továbbá $OC = CB$ is teljesül, mert C az OB szakaszfelező merőlegesének egy pontja. Tehát $BOC\sphericalangle = 60°$.

Az AOB háromszög egyenlő szárú, mert AO és OB a kör sugara. Legyen $OAB\sphericalangle = OBA\sphericalangle = \alpha$.

A $COA\sphericalangle$ szögfelezője a szöget két egyenlő β szögre bontja.

Most használjuk fel, hogy az AOB háromszögben a belső szögek összege 180°:

$$OAB\sphericalangle + OBA\sphericalangle + AOB\sphericalangle = 2\alpha + 2\beta + 60° = 180°.$$

Ebből azonnal adódik, hogy $\alpha + \beta = 60°$.

Egy háromszög külső szöge egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével, ezt az AEO háromszög $OEB\sphericalangle$ külső szögére alkalmazva:

$$OEB\sphericalangle = \alpha + \beta = 60^\circ.$$

Ha a C és D pontok helyét felcseréljük, a megoldás menete változatlan marad.

Győrffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 115 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 108, 2 pontot 3 versenyző, továbbá 1 pontos 4 tanuló dolgozata.

B. 4854. *Legyenek* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *valós számok. Tekintsük az ezekből képezett* $2^n - 1$ *(nemüres) összeget. Hány lehet ezek közül pozitív?*

(*5 pont*)

Megoldás. Kiindulási pontként tekintsük a $2^{n-1}, 2^{n-2}, \ldots, 2^0 = 1$ számokat. Ezeket alkalmasan előjelezve megmutatjuk, hogy 0-tól 2^{n-1}-ig bármennyi lehet a nemüres összegek közül pozitív.

Először vegyük az $a_1 = -2^{n-1}$, $a_2 = -2^{n-2}, \ldots, a_n = -2^0$ sorozatot, amelyben a sorozat tagjai mind negatívak, vagyis közülük választva egyetlen pozitív nemüres összeg sincs.

Ha ezután bármely más előjelezés mellett nézzük a nemüres összegeket, akkor egy ilyennek az előjele csak a legnagyobb abszolút értékű tag előjelétől függ, mivel az összes nála kisebb abszolút értékű tag összegének az abszolút értéke kisebb, mint ennek az egynek az abszolút értéke.

Bármely 0 és 2^{n-1} közötti pozitív egész szám egyértelműen felírható kettes számrendszerben legfeljebb n darab jeggyel. Ha a kettes számrendszerben felírt szám $M = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_p}$ alakú (ahol $k_1 > k_2 > \ldots > k_p$), akkor $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_p}$ előjelét pozitívnak, az összes többit pedig negatívnak választva pontosan azok az összegek lesznek pozitívak, amelyek tagjainak legnagyobb indexe valamelyik k_j. Adott j-re az ilyen összegek száma 2^{k_j}, összesen tehát $2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_p} = M$ darab ilyen összeg van.

Sulan Ádám (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 63 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 46, 4 pontot 5 versenyző. 3 pontos 3, 2 pontos 6 tanuló dolgozata. 1 pontot kapott 2, 0 pontot 1 tanuló.

B. 4855. *Egy táblázatot* 0 *és* 1 *számokkal töltöttünk ki úgy, hogy nincs két azonos sor, azonban bármelyik két oszlop és négy sor által meghatározott* 4×2*-es résztáblázatban van két azonos sor. Igazoljuk, hogy van olyan oszlop, amelyben az egyik szám pontosan egyszer fordul elő.*

(*6 pont*) Javasolta: *Lelkes Ádám*

Megoldás. Legyen k sora a táblázatnak. Bebizonyítom, hogy ha a táblázatnak van olyan oszlopa, amelyben pontosan $n < k$ darab 0 vagy pontosan n darab 1-es van, akkor olyan oszlopa is létezik, amelyben kevesebb mint n darab, de legalább 1 darab 0 vagy kevesebb mint n darab, de legalább 1 darab 1-es van.

Legyen például az A oszlopban n darab 0 és $k-n$ darab 1-es. Válasszunk ki kettőt ebből az A-ban nullás n sorból; legyenek ezek a c-edik és a d-edik sorok. Mivel a táblázat sorai mind különbözőek, lesz olyan oszlop, amelyikben különböző értéket vesz fel e két sor cellája – legyen ez a B oszlop.

Ha van kettő olyan sor – mondjuk az e-edik és az f-edik – amelyek A oszlopában 1-es, a B-be eső oszlopában pedig két különböző szám áll, akkor a c-edik, d-edik, e-edik és f-edik sorok, valamint az A és B oszlopok által meghatározott 4×2-es résztáblázatban nincs két azonos sor. Ezért a B oszlopban azonos értéket vesz fel ez a $k-n$ sor. Így a B oszlopban 0-ból vagy 1-ből legalább $k-n+1$ van, ezért a másik számból legfeljebb $n-1$, de legalább 1 darab. A bizonyított állítást ismételten alkalmazva az A helyett a B oszlopra stb., eljutunk addig, hogy az egyik oszlopban az egyik szám pontosan egyszer fordul elő.

A bizonyított állítást csak akkor nem tudnánk alkalmazni, ha feltételei a táblázat egyik oszlopára sem teljesülnek. Ez pontosan azt jelentené, hogy mindegyik oszlop vagy csupa 0, vagy csupa 1 elemből áll, azaz a táblázat valamennyi sora azonos.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)

30 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 21 versenyző: Baran Zsuzsanna, Beke Csongor, Borbényi Márton, Döbröntei Dávid Bence, Fuisz Gábor, Gáspár Attila, Győrffy Ágoston, Imolay András, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Klász Viktória, Kovács Benedek, Németh Balázs, Saár Patrik, Szemerédi Levente, Tiszay Ádám, Tóth Balázs, Tóth Viktor, Vári-Kakas Andor, Velkey Vince, Weisz Máté. 5 pontos 3, 4 pontos 2, 2 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 4860. *Tegyük fel, hogy* $a<b<c<d$ *és* $a+d\neq b+c$. *Mutassuk meg, hogy az*

$$\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}-\frac{1}{c-x}+\frac{1}{d-x}=0$$

egyenletnek pontosan két különböző gyöke van, amelyek közül az egyik a (b,c) *intervallumba, a másik pedig az* (a,d) *intervallumon kívül esik.*

(*3 pont*)

Megoldás. Az egyenletet rendezzük először úgy, hogy mindkét oldalon két-két tört szerepeljen.

$$\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}-\frac{1}{c-x}+\frac{1}{d-x}=0,$$

$$\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}=\frac{1}{c-x}-\frac{1}{d-x}.$$

A két oldalon külön-külön közös nevezőre hozva így olyan törtkifejezéseket kapunk, amelyeknek számlálója már nem tartalmaz ismeretlent:

$$\frac{b-a}{(a-x)(b-x)}=\frac{d-c}{(c-x)(d-x)}.$$

A nevezőkkel történő beszorzás és egy oldalra rendezés után rögtön látható, hogy ($a+d\neq b+c$ miatt) egy másodfokú $P(x)$ polinom zérushelyeit keressük.

$$(b-a)(c-x)(d-x)=(d-c)(a-x)(b-x),$$
$$P(x)=(b-a)(c-x)(d-x)-(d-c)(a-x)(b-x).$$

Ezek a zérushelyek egyben az eredeti egyenlet összes megoldásai is, mivel az eredeti egyenlet értelmezési tartományában nem szereplő a, b, c, d értékek egyikére sem lesz $P(x)=0$. A polinomba behelyettesítve az egyes értékeket kapjuk, hogy $P(b)>0$ és $P(c)<0$, ezért az egyenletnek két megoldása van, amelyek közül az egyik a (b,c) intervallumba esik. A másik nem eshet ebbe az intervallumba, mert ha a polinom mindkét gyöke ebbe az intervallumba esne, akkor b-ben és c-ben ugyanolyan előjelű értéket kellene felvennie. Az egyenlet másik gyöke viszont nem eshet sem az (a,b), sem a (c,d) intervallumba, mert pl. az (a,b) intervallumon azt látjuk, hogy $b-a>0$, $c-x>0$, $d-x>0$, azaz $(b-a)(c-x)(d-x)>0$, továbbá $d-c>0$, $a-x<0$, $b-x>0$, azaz $(d-c)(a-x)(b-x)<0$, tehát ezen az intervallumon $P(x)$ pozitív értékeket vesz fel, itt nem lehet zérushely. Hasonlóan a (c,d) intervallumot vizsgálva láthatjuk, hogy itt $P(x)$ csak negatív értékeket vesz fel, így itt sem lehet gyök.

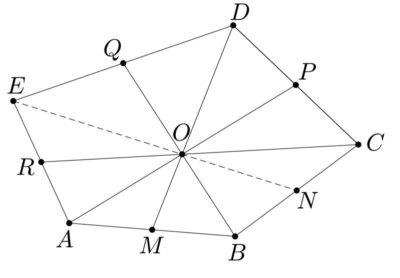
$P(x)$-ről tudjuk, hogy pozitív és negatív értéket is felvesz, így megállapítottuk, hogy két különböző gyöke van. Mivel se (b,c)-be, se (a,b)-be, se (c,d)-be nem eshet a másik gyök, azért biztos, hogy (a,d)-n kívül esik.

Noszály Áron (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 35 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott Csahók Tímea, Fekete Balázs Attila, Fülöp Anna Tácia, Noszály Áron, Póta Balázs, Simon Dániel Gábor, Tiderenczl Dániel, Tiszay Ádám, Vári-Kakas Andor, Várkonyi Dorka, Velkey Vince, Zólomy Kristóf és Zsigri Bálint. 2 pontot kapott 6 versenyző, továbbá 1 pontos 13 és 0 pontos 3 tanuló dolgozata.

B. 4862. *Az $ABCDE$ konvex ötszög AB, BC, CD, DE, illetve EA oldalainak felezőpontjai rendre M, N, P, Q, illetve R. Mutassuk meg, hogy ha az AP, BQ, CR és DM szakaszok egy közös pontban metszik egymást, akkor ez a pont rajta van az EN szakaszon is.*

(*5 pont*) *Róka Sándor* (Nyíregyháza)



Megoldás. Legyen a szakaszok metszéspontja O. Mivel $EQ=QD$, az $EQO\triangle$ és $QDO\triangle$ alapja és magassága megegyezik, tehát a területük egyenlő. Hasonlóan látható, hogy $T_{EQB\triangle}=T_{QDB\triangle}$, így a megfelelő különbségekre

$$T_{EOB\triangle}=T_{EQB\triangle}-T_{EQO\triangle}=$$
$$=T_{QDB\triangle}-T_{QDO\triangle}=T_{BOD\triangle}.$$

Ezen az úton sorra belátható, hogy

$$T_{EOB\triangle} = T_{BOD\triangle} = T_{DOA\triangle} = T_{AOC\triangle} = T_{COE\triangle}.$$

A továbbiakban felhasználjuk a területek egyenlőségéből, hogy $T_{EOB\triangle} = T_{COE\triangle}$. Az OE félegyenes az $ROQ\sphericalangle$ szögtartományban van, ezért az EO egyenes másik félegyenese a $COB\sphericalangle$ szögtartományban van. Ennek megfelelően az EO egyenes a BC szakaszt egy N' belső pontban metszi.

$$T_{BN'O\triangle} = T_{N'CO\triangle} \cdot \frac{BN'}{N'C}, \quad \text{és} \quad T_{BN'E\triangle} = T_{N'CE\triangle} \cdot \frac{BN'}{N'C},$$

ezért

$$T_{EOB\triangle} = T_{COE\triangle} \cdot \frac{BN'}{N'C}.$$

Így $BN' = N'C$, vagyis az N' a BC felezőpontja, tehát $N = N'$.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 33 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 19 tanuló: Baran Zsuzsanna, Borbényi Márton, Busa Máté, Csiszár Zoltán, Fülöp Anna Tácia, Gáspár Attila, Győrffy Ágoston, Imolay András, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Kővári Péter Viktor, Nagy Nándor, Schrettner Jakab, Szabó Dávid, Szemerédi Levente, Tanács Viktória, Tóth Viktor, Tubak Dániel, Weisz Máté. 4 pontot szerzett 6 versenyző, 1 pontos 3, 0 pontos 5 tanuló dolgozata.

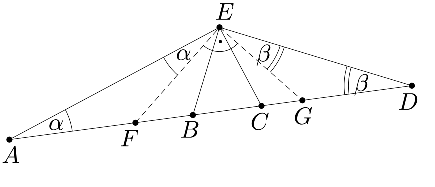
B. 4877. *Az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben illeszkednek egy egyenesre. Az egyenesen kívül eső E pontra*

$$AEB\sphericalangle = BEC\sphericalangle = CED\sphericalangle = 45°.$$

Legyen az AC szakasz felezőpontja F, a BD szakasz felezőpontja pedig G. Mekkora az FEG szög?

(*3 pont*) Javasolta: *Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11.c.*

Megoldás. Az *ábra* jelölései szerint $AEC\sphericalangle = AEB\sphericalangle + BEC\sphericalangle = 45° + 45° = 90°$, az $AEC\triangle$ derékszögű.



Ugyanígy a $BED\triangle$ is derékszögű. A derékszögű háromszögek szögeire

$$ACE\sphericalangle = 90° - \alpha, \quad \text{és} \quad DBE\sphericalangle = 90° - \beta.$$

Az AED háromszög AED szöge a feltételek alapján 135°, így $\alpha + \beta = 45°$.

Most rajzoljuk be az EF szakaszt. Az F pont az AEC derékszögű háromszög átfogójának felezőpontja, egyben a Thalész-tétel miatt köréírt körének középpontja. Ebből következően az AFE egyenlő szárú háromszög, $AEF\sphericalangle = \alpha$.

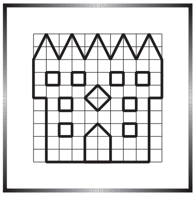
Ugyanígy az EG behúzása után látható, hogy az EDG háromszög is egyenlő szárú és $GED\sphericalangle = \beta$.

A keresett $FEG\sphericalangle$ az ábra és az eddigiek alapján:

$$FEG\sphericalangle = AEB\sphericalangle + BEC\sphericalangle + CED\sphericalangle - AEF\sphericalangle - GED\sphericalangle =$$
$$= 45^\circ + 45^\circ + 45^\circ - \alpha - \beta = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ.$$

Olosz Adél (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn., SZKI és Óvoda, 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 70 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 67 tanuló, 2 pontos 2, 1 pontos 1 tanuló dolgozata.



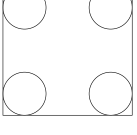
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (559–564.)

K. 559. Hány olyan legfeljebb hatjegyű szám van, amelyben szerepelnek az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek, mindegyik pontosan egyszer?

K. 560. Egy vizsgán 30 fő vett részt. Azok, akik megbuktak, 60 pontos átlagot teljesítettek, míg azok, akik átmentek, 84-et. A vizsga átlagpontszáma 80 lett. Hányan mentek át a vizsgán?

K. 561. Egy regény három kötetben jelent meg. Az oldalakat a három kötetben az első oldaltól az utolsóig folyamatosan számozták meg (1-essel kezdve a számozást). A második kötet 50 oldallal vastagabb, mint az első, a harmadik pedig 1,5-szer olyan vastag, mint a második. A három kötet első oldalszámainak összege 893. Hány oldalas a regény? Hány számjegyet használtak fel az oldalszámozás leírásához?

K. 562. Alíz elindult vásárolni, csupa 10 és 1000 forintossal (mindegyikből volt nála legalább egy). Elköltötte a pénze felét, majd észrevette, hogy ismét csupa 10 és 1000 forintos van nála. Megszámolta a pénzt, és látta, hogy pont annyi 10 forintosa lett, mint ahány 1000 forintossal elindult, és pontosan feleannyi 1000 forintosa lett, mint amennyi 10 forintossal elindult. Hány forintot költött el Alíz, ha a feltételeknek megfelelő lehető legkevesebb pénzt költötte?



K. 563. Egy 18 cm oldalú négyzet alakú lemezből kivágtak a négyzet csúcsainál egy-egy 3 cm sugarú kört az *ábrának* megfelelően. A csúcsoknál keletkező hulladéklemez darabokat eldobták. Mekkora a megmaradt rész területe?