Megjegyzés. Persze ismét követhetünk más utakat is. Például ha már tudjuk, hogy a $GBFQ$ húrnégyszög, akkor ebben az $FB = d$ húrhoz $60°$-os kerületi szög tartozik, így ugyanekkora kerületi szög tartozik a $GB = d$ húrhoz is. Ezért $BQG\sphericalangle = 60°$, és $PQG\sphericalangle = 60°$ szintén. Innen pedig már következik, hogy $PMGQ$ paralelogramma.

A matematika tételkészítő bizottság

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\lg x - \left(1 - \lg^2 x\right) = -1.$$

b) Igazoljuk, hogy a következő egyenletnek nincs valós megoldása:

$$\left|\sin^2 x - \cos x\right| = -x^2. \qquad (\textit{11 pont})$$

2. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(4;7)$, $B(-6;-4)$, $C(2;-3)$.

a) Számítsuk ki az $ABCD$ paralelogramma AC és BD átlóegyenesének hajlásszögét.

b) Igazoljuk, hogy az $ABCD$ paralelogramma területének mérőszáma egész szám. (*12 pont*)

3. Egy pékségben az öt legnépszerűbb péksütemény az eladási adatok alapján sorrendben: I. sós négyes, II. rozsos zsömle, III. sajtos rúd, IV. óriás kifli, V. kenyérlángos. Az ezekből eladott mennyiség átlaga és mediánja is tegnap 122 db volt, az öt darabszám egyetlen módusza pedig 114. Az egyik termékből átlagos mennyiséget adtak el, az öt adat terjedelme pedig 22.

a) Adjuk meg az egyes péksütemények relatív gyakoriságát három tizedesjegy pontossággal.

b) Mekkora a darabszámok szórása?

c) Ma nyitás után az első hat vásárló mindegyike vásárolt a fenti péksütemények közül egyet. Hányféleképpen tehették ezt meg, ha a vásárlásuk után mindegyik termékből fogyott legalább egy darab? (*14 pont*)

4. Két téglalap alakú grafikáról tudjuk, hogy mindkettőnek 65 cm az átlója. Az egyik oldalainak aránya 3 : 4, a másiknak pedig 5 : 12.

a) Melyiknek nagyobb és mennyivel a területe?

b) Az elsőt úgy szeretnék keretezni, hogy a képet körülvevő szegély területe pontosan a kép területével legyen egyenlő, és a szegély mind a négy oldalon ugyanolyan széles legyen. Mekkora az így kapott, keretezendő kép kerülete?

c) A második kapjon olyan szegélyt keretezés előtt, hogy az oldalak aránya változzon 7 : 16-ra. Ennek a szegélynek a területe 1300 cm^2 legyen, úgy, hogy a bal és jobb oldalon egyenlő, illetve lent és fent is egyenlő szélességű. Milyen széles lesz a szegély a grafika egyes oldalai mentén? (*14 pont*)

II. rész

5. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 42x + 425$ hozzárendelésű függvény.

a) Igazoljuk, hogy az $f(x)$ függvény képére illeszkedő 15, 20, 24 és 25 abszcisszájú pontok húrnégyszöget határoznak meg. Adjuk meg a körülírható kör középpontját és sugarát.

b) Mekkora területű síkidomot határol az $f(x)$ függvény képe és az x tengely?

c) Adjuk meg az $f(x)$ függvény grafikonját a $(20; -15)$ pontban érintő egyenes egyenletét. (*16 pont*)

6. Egy kockát az oldallapjaival párhuzamos síkok mentén n^3 darab kisebb, egybevágó kockára vágunk.

a) Hány darab sík mentén történik a vágás? (A vágások alatt a részeket nem mozdítjuk el egymástól.)

Egy kockát az oldallapjaival párhuzamos síkok mentén kisebb, egybevágó kockákra vágunk.

b) Hány darab kis kockára kell vágnunk a nagy kockát, ha ezáltal a felszín ötszöröződik?

Egy fehérre festett, 9 cm élhosszúságú kockát az oldallapjaival párhuzamos síkok mentén 27 darab egybevágó kis kockára vágtunk szét. A vágásfelületeket úgy festettük pirosra és zöldre, hogy a kis kockákból kirakható legyen egy piros, illetve egy zöld, az eredeti fehér kockával azonos méretű tömör kocka. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kialakított készletből véletlenszerűen egy olyan kis kockát választhatunk, amellyel

c) 0,5 valószínűséggel pirosat dobunk;

d) csak kétféle színt dobhatunk?

e) A kis kockákból egy olyan lyukas kockát építünk, hogy minden lap közepén át lehet látni az építményen. Mekkora az így kapott test térfogata, felszíne? (*16 pont*)

7. *a*) Kilenc egymást követő egész szám közül az öt kisebbnek a négyzetösszege egyenlő a négy nagyobbnak a négyzetösszegével. Adjuk meg a kilenc számot.

b) Igazoljuk, hogy kilenc egymást követő egész szám közül a hat kisebbnek a négyzetösszege nem lehet egyenlő a három nagyobbnak a négyzetösszegével.

c) Létezik-e öt olyan gömb, melyeknek sugara centiméterben mérve öt egymást követő egész szám, és a három kisebb gömb térfogatösszege egyenlő a két nagyobb gömb térfogatösszegével?

d) Egy téglatest két élének hossza egymást követő két egész számmal adható meg, a testátlójának hossza pedig az előző két egész szám szorzatánál 1-gyel nagyobb. Igazoljuk, hogy a téglatest harmadik élének hossza is egész számmal adható meg. (*16 pont*)

8. Tóbiás király (akit a mesében a nép csak Palacsintás királynak nevez) nagyon elszegényedett, ezért kénytelen volt január elsején a Derelye főszakács érdekeltségi köréhez tartozó banktól 8 millió fabatka kölcsönt felvenni. A Derelye Bank 12 évi futamidőre, évi 9%-os kamatra adta a kölcsönt, és ezt minden év végén egyenlő összegekkel kell visszafizetnie a királynak. Mennyi lesz az évente visszafizetendő törlesztőrészlet? Mennyi pénzt fizet vissza összesen 12 év alatt a király? (*16 pont*)

9. Bea nagyon szereti a természetet. Az egyik teljesítménytúra alkalmával egy vízszintes, sík tisztás egyik pontjából egy irányba nézve két hegycsúcsot pillantott meg. A közelebbi C hegycsúcs $\gamma = 15°$, a távolabbi D hegycsúcs pedig $\delta = 21°$ emelkedési szögben látszik. Tudjuk, hogy a két hegycsúcs távolsága légvonalban 1000 méter. Anita valamennyivel már közelebb van a C csúcshoz, és ő a két hegycsúcsot egy közös $\alpha = 30°$ emelkedési szögben látja.

a) Milyen magasan vannak a csúcsok Bea és Anita nézőpontjához képest, ha a testmagasságukat azonosnak vehetjük?

b) Mekkora a távolság Bea és Anita között?

c) Egy $1 : 40\,000$ méretarányú turistatérképen bejelöljük Bea helyét. Hány centiméterre van ettől a ponttól a távolabbi hegycsúcs a térképen? (*16 pont*)

Számadó László
Budapest

Megoldásvázlatok a 2017/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget, illetve egyenletet:*

a) $\log_4\left(x^2 - 3x\right) \leqslant 1$; (*5 pont*)

b) $x^2 \cdot |\sin x| = \sin x$. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyenlőtlenségnek csak akkor van értelme, ha $x^2 - 3x > > 0$, azaz $x < 0$ vagy $x > 3$. A 4-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért $x^2 - 3x \leqslant 4$, melyet rendezve $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$.

Az $x^2 - 3x - 4 = 0$ egyenlet gyökei -1 és 4. Mivel az $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$ egyenlőtlenségben a másodfokú tag együtthatója pozitív, ezért $-1 \leqslant x \leqslant 4$.