az M valamelyik $a_i b_{m+1} - b_i a_{m+1}$ tényezőjének ($1 \leqslant i \leqslant m$). Vegyük észre, hogy ekkor a homogenitás miatt

$$b_i^{\deg g} g(a_{m+1}, b_{m+1}) = g(b_i a_{m+1}, b_i b_{m+1}) \equiv g(a_i b_{m+1}, b_i b_{m+1}) =$$

$$= b_{m+1}^{\deg g} g(a_i, b_i) = b_{m+1}^{\deg g} \pmod p,$$

s így $p \mid g(a_{m+1}, b_{m+1})$-ből $p \mid b_{m+1}$ következik. Hasonlóan kapjuk, hogy $p \mid a_{m+1}$. Ez viszont ellentmond annak, hogy a_{m+1} és b_{m+1} relatív prím.

Ha $M \neq 0$, akkor a relatív prímség miatt $g(a_{m+1}, b_{m+1})^{\varphi(|M|)} \equiv 1 \pmod M$ az Euler–Fermat-tétel szerint, így pl. $K = m\varphi(|M|)$ választással alkalmas $C \in \mathbb{Z}$-re $f(a_{m+1}, b_{m+1}) = 1$ biztosítható. Ha pedig $M = 0$, akkor a 0-hoz való relatív prímség miatt $g(a_{m+1}, b_{m+1}) = \pm 1$, s így $K = 2$ és $C = 0$ megfelel.

Tehát minden esetben biztosítottuk, hogy $f(a_{m+1}, b_{m+1}) = 1$ is teljesüljön. Tehát az indukciós lépést befejeztük, az indukció teljes.

Megjegyzés. A feladat általánosítása volt a 2017. szeptemberi számban megjelent **A. 703.** feladat. Egy további megoldási módszer olvasható a

`https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A703&l=hu`

címen.

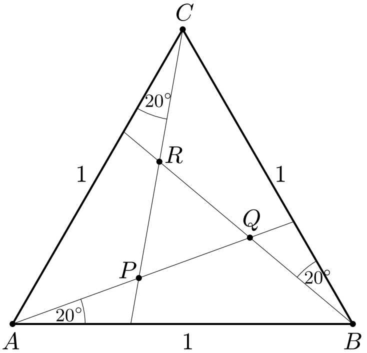
Bizonyítsunk sokféleképpen! – Egy érettségi feladat továbbgondolása

(a 2017. májusi emelt szintű matematika érettségi feladatsor 8.b feladata)

A 2017. májusi emelt szintű érettségi feladatsor egyik feladata a következő volt:

8. b) Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az *1. ábrán* látható PQR szabályos háromszöget kaptuk.

Számítsa ki a PQR háromszög oldalának hosszát!

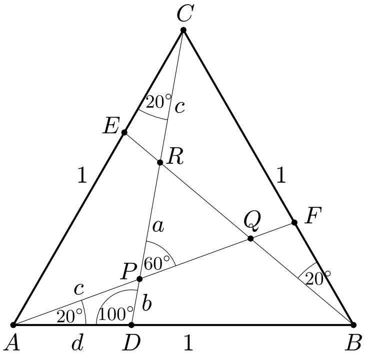


1. ábra

A hivatalos javítási-értékelési útmutató három különböző megoldást közölt a feladatra, ezek megtekinthetők pl. a

`https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2017tavasz_emelt/e_mat_17maj_ut.pdf`

címen.



2. ábra

M1. Az első megoldás az ABQ háromszögben felírt két szinusztétel segítségével határozza meg a PQ oldal hosszát (*2. ábra*).

M2. A második megoldásban egy szinusztétel és területszámítás segítségével érünk célt. $T_{ABC} - T_{ABQ} = T_{PQR}$; és a szabályos háromszög területéből az oldalának hossza már számítható.

M3. A harmadik megoldásban szinusztételek többszöri alkalmazásával meghatározzuk a CD, majd a d, c és b szakaszhosszakat, ebből a szabályos háromszög a oldalhossza már számítható.

A javítási útmutatóban a megoldások végén a következő megjegyzés szerepel: „Addíciós tételek felhasználásával bizonyítható, hogy $a = d = 2 \cdot \sin 10°$."

Jelen cikkben egyrészt elvégezzük ezt az addíciós tételek segítségével történő bizonyítást, másrészt további elemi geometriai bizonyításokat mutatunk a szabályos háromszög oldalát meghatározó $a = d$ egyenlőségre.

Megjegyzés. **Az** $a = d = 2 \cdot \sin 10°$ **egyenlőség igazolása** addíciós tételek segítségével.

A bizonyításban felhasználjuk **M3.** részeredményeit:

$$d = \frac{\sin 20°}{\sin 100°} \quad \text{és} \quad a = \frac{\sin 60°}{\sin 100°} - \frac{\sin 20°}{\sin 60°} - \frac{\sin^2 20°}{\sin 60° \sin 100°};$$

valamint alkalmazzuk a $\sin 100° = \sin 80°$ helyettesítést:

$$d = \frac{\sin 20°}{\sin 80°} = \frac{2 \sin 10° \cos 10°}{\cos 10°} = 2 \sin 10°.$$

$$a = \frac{\sin^2 60° - \sin^2 20° - \sin 20° \sin 80°}{\sin 60° \sin 80°} =$$

$$= \frac{(\sin 60° + \sin 20°)(\sin 60° - \sin 20°) - \sin 20° \sin 80°}{\sin 60° \sin 80°} =$$

$$= \frac{2 \sin 40° \cos 20° \cdot 2 \sin 20° \cos 40° - \sin 20° \sin 80°}{\sin 60° \sin 80°} =$$

$$= \frac{\sin 80° \sin 40° - \sin 20° \sin 80°}{\sin 60° \sin 80°} = \frac{\sin 40° - \sin 20°}{\sin 60°} = \frac{2 \sin 10° \cos 30°}{\sin 60°} =$$

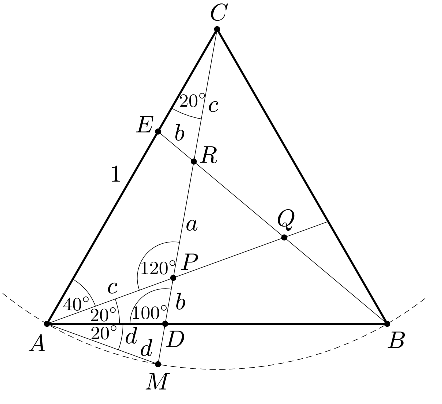
$$= 2 \sin 10°.$$

Ezzel igazoltuk az $a = d = 2 \cdot \sin 10°$ egyenlőséget.

M4. A CER és CDA háromszögek hasonlóak (szögeik 20°, 60°, 100°), így $\frac{b}{c} = \frac{d}{1}$, azaz $b = cd$. A CD egyenes a C középpontú egység sugarú kört M-ben metszi, $AC = CM = 1$. $AMD\sphericalangle = 80°$, így az MAD háromszög egyenlő szárú, és $AM = d$. Az MAD és ACM háromszögek hasonlóak (szögeik megegyeznek, *3. ábra*), ebből $\frac{MD}{d} = \frac{d}{1}$, azaz $MD = d^2$. Az AP egyenes szögfelezője $MAC\sphericalangle$-nek, így az MAC háromszögben felírható a szögfelező-tétel:

$$\frac{d^2 + b}{a + c} = \frac{d}{1}.$$

Innen $d^2 + b = da + dc$, amiből a fent kapott $b = cd$ miatt $d^2 = da$, azaz $d = a$ következik.

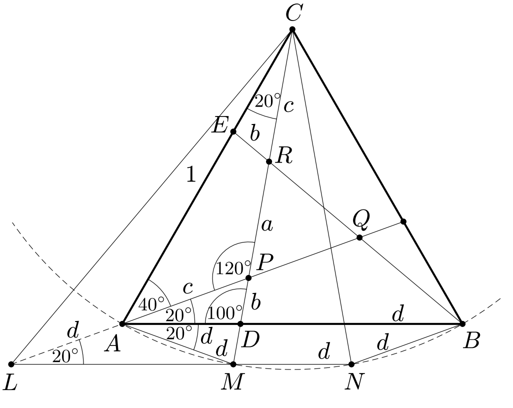


3. ábra

Megjegyzés. A $b = cd$ összefüggés az AMP háromszögben felírt szögfelező-tételből is megkapható, ha felhasználjuk az MAD és ACM háromszögek hasonlóságát:

$$\frac{DP}{PA} = \frac{b}{c} = \frac{DM}{MA} = \frac{MA}{AC} = \frac{d}{1}.$$

A következő bizonyítás előtt segédlépésként vegyük fel az egység sugarú körbe írt szabályos 18-szög oldalait. Az előző megoldás alapján $AM = MN = NB = d$ (*4. ábra*). A szabályos sokszög szimmetriatulajdonságából következik, hogy AB átlója és MN oldala párhuzamos.



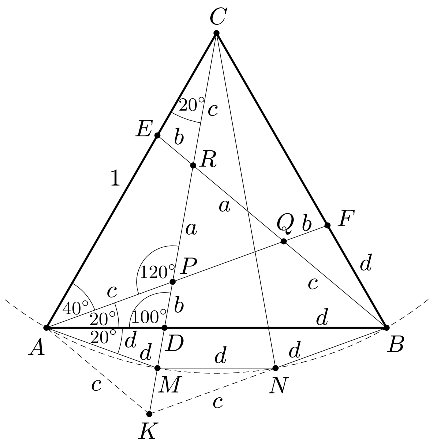
4. ábra

M5. Felmérjük PA-ra A-n túl $AL = d$-t, és azt fogjuk igazolni, hogy $PL = PC$.

LAM egyenlő szárú háromszög, $ALM\sphericalangle = 20°$, ezért LM és AB párhuzamosak, és az L, M, N pontok egy egyenesbe esnek. $LNBA$ egyenlő szárú trapéz ($LA = NB$) és nem húrtrapéz, ezért $LNBA$ paralelogramma, és így $LN = 1$. Az LNC háromszög egyenlő szárú,

$$NCL\sphericalangle = NLC\sphericalangle = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Továbbá $PCL\sphericalangle = PLC\sphericalangle$ ($= 30^\circ$), így $PL = PC$, azaz $c + d = a + c$, tehát $a = d$.



5. ábra

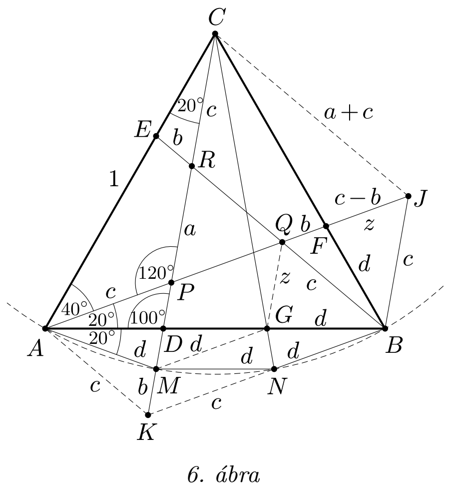
M6. Ismét szükségünk van a szabályos 18-szög oldalainak felvételére (M, N pontok). Felmérjük RP-re P-n túl $PK = c$-t, és azt fogjuk igazolni, hogy $RK = KB$ (*5. ábra*).

APK 60°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög, ezért $AK = c$ és AK párhuzamos EB-vel. Így

$$KAM\sphericalangle = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ.$$

Az A és N tükrös helyzetű a KC egyenesre, ezért $KN = c$, $KNM\sphericalangle = 20^\circ$, és így K, N, B egy egyenesre esik. KRB szabályos háromszög (pl. $KR = RB$ és bezárt szögük 60°), így $KR = KB$, $a + c = c + d$, tehát $a = d$.

Megjegyzés. Ha már megkaptuk, hogy K, N, B egy egyenesre esik, akkor a megoldás befejezésére több lehetőség is kínálkozik. Például a KRB háromszög szabályossága abból is következik, hogy szögei 60°-osak; vagy azt is megmutathatjuk, hogy $AKBQ$ paralelogramma.



6. ábra

M7. Felvesszük a szabályos 18-szög oldalait és az előző megoldásbeli K pontot. Jelölje AB és CN metszéspontját G (*6. ábra*). Az $MNBG$ négyszög rombusz, mivel MN és BG oldalai párhuzamosak és egyenlők, és velük azonos hosszúságú az NB oldal is. Így $NB = MG = d$, valamint NB, MG és AF párhuzamosak ($FAB\sphericalangle = ABN\sphericalangle = 20^\circ$ váltószögek.)

Azt fogjuk igazolni, hogy $QGMP$ paralelogramma.

A QG szakasz hossza legyen z. Felmérjük AQ-ra Q-n túl $QJ = c$-t, így a QBJ szabályos háromszöget kapjuk ($QJ = QB$ és a közbezárt szögük 60°). A GBQ és FBJ háromszögek egybevágók, mert c és d oldalaik 40°-os szöget zárnak be, így $FJ = c - b = z$. Mivel az AKM

és APD háromszögek egybevágók (megegyezik d és c oldaluk és a közbezárt szögük $20°$), így $KM = b$, azaz $MP = c - b = z$ szintén. A $QGMP$ négyszög egyenlő szárú trapéz (PQ és MG párhuzamosak, $MP = GQ$) és nem húrtrapéz, ezért paralelogramma. Így $PQ = MG$, azaz $a = d$.

Megjegyzések. 1. A megoldás során más utakat is követhetünk, bár ezek elvileg nem nagyon különböznek. Például a $QGMP$ négyszögről szögeinek kiszámításával is igazolhatjuk, hogy paralelogramma. Egy másik lehetőség: a C körüli $+60°$-os forgatás a CAP háromszöget a CBJ háromszögbe viszi, ezért CPJ szabályos háromszög. $PJ = JC = a + c$, és ekkor ráismerhetünk az $AKBQ$ és $PKBJ$ paralelogrammákra: az $AQ = a + c$, $KB = c + d$, $PJ = a + c$ szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

2. A QJB háromszög konstrukciójából és a GBQ és FBJ háromszögek egybevágóságából következik, hogy

$$GQB\sphericalangle = FJB\sphericalangle = 180° - FBJ\sphericalangle - BFJ\sphericalangle = 60°.$$

A QJB háromszög konstrukciója nélkül is igazolhatjuk a fenti 2. megjegyzésből adódó **segédállítást:** az AQB háromszögben QG szögfelező.

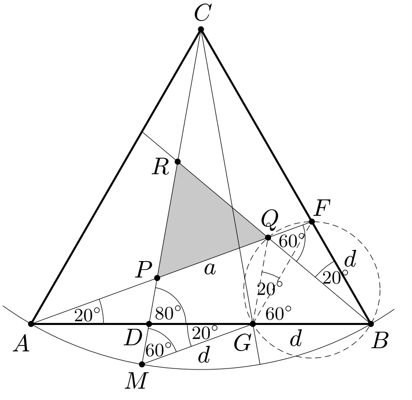
Bizonyítás: Q-ból párhuzamost húzunk CD-vel, ez AB-t G'-ben metszi, és QG' szögfelezője az AQB szögnek. (Azt kell megmutatnunk, hogy G és G' egybeesik.) Jelölje a szakaszok hosszát $QG' = z$, $G'D = y$, $G'B = t$. Az $AG'Q$ háromszögben $\frac{y}{d} = \frac{a}{c}$ (párhuzamos szelők tétele), a BDR háromszögben hasonlóan $\frac{y}{t} = \frac{a}{c}$. A két egyenletből következik, hogy $t = d$; azaz G' egybeesik a G szögharmadoló talpponttal.

M8. A szabályos 18-szög oldalai és G felvétele után ismét azt igazoljuk, hogy $QGMP$ paralelogramma.

A fenti segédállítás miatt (az AQB háromszögben QG szögfelező) QG és PM párhuzamosak, **M7.**-ből ismert MG és PQ párhuzamossága. $QGMP$ paralelogramma, így $PQ = MG$, azaz $a = d$.

M9. Forgassuk el a C pont körül pozitív irányban $20°$-kal az ACD háromszöget, így az MCG háromszöget kapjuk, ahol $MG = AD = d$ (*7. ábra*).

A forgatás szöge és iránya miatt MG és AF párhuzamosak. A $BFQG$ négyszög húrnégyszög, mert az FB szakasz Q-ból és G-ből is $60°$-os szögben látszik (Q és G ugyanabban a félsíkban vannak FB-hez képest). Tehát $QGF\sphericalangle = QBF\sphericalangle = 20°$ (kerületi szögek tétele), vagyis $QGB\sphericalangle = 80°$. Emiatt PM párhuzamos QG-vel, így a $PMGQ$ négyszögnek két párhuzamos oldalpárja van, vagyis paralelogramma. Tehát $MG = PQ$, vagyis $a = d$.



7. ábra

Megjegyzés. Persze ismét követhetünk más utakat is. Például ha már tudjuk, hogy a $GBFQ$ húrnégyszög, akkor ebben az $FB = d$ húrhoz $60°$-os kerületi szög tartozik, így ugyanekkora kerületi szög tartozik a $GB = d$ húrhoz is. Ezért $BQG\sphericalangle = 60°$, és $PQG\sphericalangle = 60°$ szintén. Innen pedig már következik, hogy $PMGQ$ paralelogramma.

A matematika tételkészítő bizottság

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\lg x - \left(1 - \lg^2 x\right) = -1.$$

b) Igazoljuk, hogy a következő egyenletnek nincs valós megoldása:

$$\left|\sin^2 x - \cos x\right| = -x^2.$$

(*11 pont*)

2. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(4;7)$, $B(-6;-4)$, $C(2;-3)$.

a) Számítsuk ki az $ABCD$ paralelogramma AC és BD átlóegyenesének hajlásszögét.

b) Igazoljuk, hogy az $ABCD$ paralelogramma területének mérőszáma egész szám. (*12 pont*)

3. Egy pékségben az öt legnépszerűbb péksütemény az eladási adatok alapján sorrendben: I. sós négyes, II. rozsos zsömle, III. sajtos rúd, IV. óriás kifli, V. kenyérlángos. Az ezekből eladott mennyiség átlaga és mediánja is tegnap 122 db volt, az öt darabszám egyetlen módusza pedig 114. Az egyik termékből átlagos mennyiséget adtak el, az öt adat terjedelme pedig 22.

a) Adjuk meg az egyes péksütemények relatív gyakoriságát három tizedesjegy pontossággal.

b) Mekkora a darabszámok szórása?

c) Ma nyitás után az első hat vásárló mindegyike vásárolt a fenti péksütemények közül egyet. Hányféleképpen tehették ezt meg, ha a vásárlásuk után mindegyik termékből fogyott legalább egy darab? (*14 pont*)

4. Két téglalap alakú grafikáról tudjuk, hogy mindkettőnek 65 cm az átlója. Az egyik oldalainak aránya 3 : 4, a másiknak pedig 5 : 12.

a) Melyiknek nagyobb és mennyivel a területe?

b) Az elsőt úgy szeretnék keretezni, hogy a képet körülvevő szegély területe pontosan a kép területével legyen egyenlő, és a szegély mind a négy oldalon ugyanolyan széles legyen. Mekkora az így kapott, keretezendő kép kerülete?