Megoldás. Kezdetben a kocka sűrűsége megegyezik a folyadék sűrűségével. A kocka további mozgását a hőtágulás mértéke fogja befolyásolni.

Ha a kocka hőtágulása nagyobb, mint a folyadéké, akkor a melegítés hatására a sűrűsége kisebb lesz, mint a folyadék sűrűsége, tehát úszni fog. Ekkor Lenkének lenne igaza.

Ha viszont a kocka hőtágulása kisebb, mint a folyadéké, akkor a sűrűsége nagyobb lesz a folyadék sűrűségénél, így le fog süllyedni. Ekkor Dórának lenne igaza.

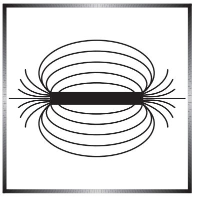
Amennyiben a kocka és folyadék hőtágulása (közelítőleg) egyforma mértékű, akkor semmi se fog történni, a kocka továbbra is lebegni fog.

Tehát bármelyiküknek igaza lehet, de az is előfordulhat, hogy mindketten tévednek.

Csóti Kristóf (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.)

37 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 13, hibás 8 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 4910. *Egy erdő belsejében a B pontból szeretnénk az A pontba eljutni. A fák között u sebességgel tudunk haladni tetszőleges irányban. Van azonban az erdőben egyetlen nyílegyenes és jól járható ösvény, amin ku $(k>1)$ sebességgel tudnánk haladni. Ez az ösvény elkerüli a B pontot, de átmegy az A ponton, és az AB egyenessel α szöget zár be. Milyen úton haladjunk, hogy a legrövidebb idő alatt jussunk el az A pontba?*

(*5 pont*) Közli: *Gáspár Merse Előd,* Budapest

A feladat többféle módszerrel is megoldható. Az alább bemutatott eljárások közül kettő fizikai (optikai, illetve hangtani) megfontolásokra épül, a harmadik a differenciálszámítás matematikai apparátusának felhasználásával jut el a végeredményig. (A három különböző gondolatmenetű megoldás jelöléseit úgy változtattuk meg, hogy az eredmények egymással könnyen összehasonlíthatóak legyenek. – A Szerk.)

I. megoldás. Oldjuk meg a feladatot fizikai eszközökkel! Használjuk a fényterjedést leíró *Fermat-elvet*: a fény két pont között olyan útvonalon terjed, amely mentén a fényterjedés ideje a szomszédos (a tényleges útvonaltól csak kicsit eltérő) útvonalak idejéhez képest a lehető legkisebb.

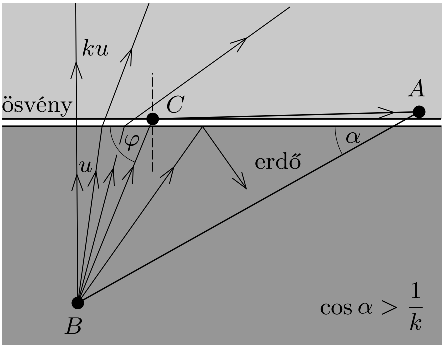
Tegyük fel, hogy az ösvény B-vel átellenes felén mindenhol ku sebességgel haladhatunk, és az A pont az ösvénytől egy „hajszálnyi” távolságra, de már az ösvény túloldalán helyezkedik el. (Ez érdemben nem módosítja a feladatot, hiszen ha már egyszer elértük az ösvényt, azon nyilván gyorsan és egyenesen érdemes haladjunk, nem pedig a túloldali erdőben görbe útvonal mentén és lassabban.)

Ebben az új megfogalmazásban a probléma a következő kérdéssel egyenértékű: Miként juthat el a fény egy optikailag sűrűbb közeg B pontjából az optikailag ritkább közeg A pontjába, ha a két közeget egy sík felület választja el egymástól és a relatív törésmutató (a fénysebességek aránya) k?

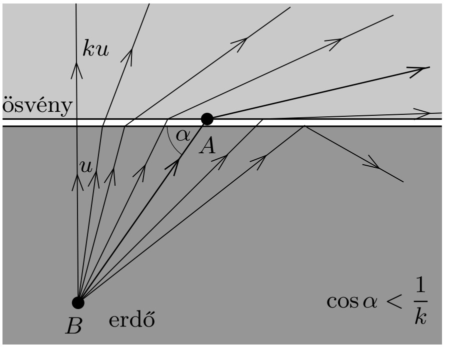
A B pontból kiinduló fénysugarak a két közeg határán megtörnek, illetve visszaverődnek. Ha a k törésmutató „elegendően nagy", akkor a törési törvény szerint lesz egy olyan fénysugár, amelynek törési szöge $90°$, vagyis amelyik fénysugár a két közeg határán (az ösvény mentén) halad tovább és jut el az A pontig (*1a. ábra*). Ezen fénysugár beesési szöge az ábra jelöléseit használva éppen $90° - \varphi$, így a Snellius–Descartes-törvény szerint

$$\frac{\sin(90° - \varphi)}{\sin 90°} = \cos\varphi = \frac{1}{k}.$$

A közeghatárt a C ponttól balra elérő fénysugarak átjutnak az optikailag ritkább közegbe, a C-től jobbra érkező fénysugarak pedig teljes visszaverődést szenvednek. Az ábrán látható φ szög nyilván nagyobb, mint α, tehát a megadott k és α adatok között fenn kell álljon a $\cos\alpha > \frac{1}{k}$ egyenlőtlenség; ez adja meg az „elegendően nagy törésmutató" kifejezés pontos jelentését.



1a. ábra



1b. ábra

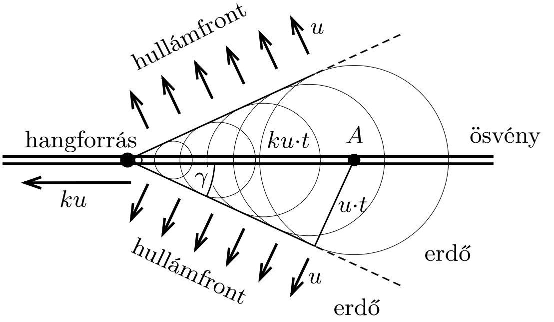
Amennyiben a törésmutató nem túl nagy (vagyis $\cos\alpha < 1/k$), a B-ből kiinduló fénysugarak egyike törésmentesen, mindvégig az optikailag sűrűbb közegben haladva jut el az A pontig (*1b. ábra*). Ilyen körülmények között az eredeti feladat megoldása: érdemes mindvégig az erdőben maradnunk, és ott egyenes úton haladva juthatunk el leghamarabb a B pontból az A pontig.

Németh Róbert (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Ha a B pontból valamilyen úton haladva a legrövidebb idő alatt jutunk az A pontba, akkor nyilván ugyanezen az útvonalon juthatunk leghamarabb az A pontból a B pontba. Vizsgáljuk a továbbiakban ezt a „megfordított" problémát!

Képzeljük el, hogy az A pontból indulva egy hangforrás mozog az ösvény mentén ku sebességgel, miközben folyamatosan olyan hanghullámokat kelt, amelyek

u sebességgel terjednek az erdőben ($k > 1$). Hol helyezkednek el azok a pontok, amelyeket a hanghullámok elérnek a hullámforrás indulásától számított t idő alatt? A különböző helyekről különböző időpillanatokban kiinduló gömbhullámok egy kúpot (az ún. *Mach-kúpot*) jelölnek ki (*2a. ábra*). A kúp csúcsa ku sebességgel



2a. ábra

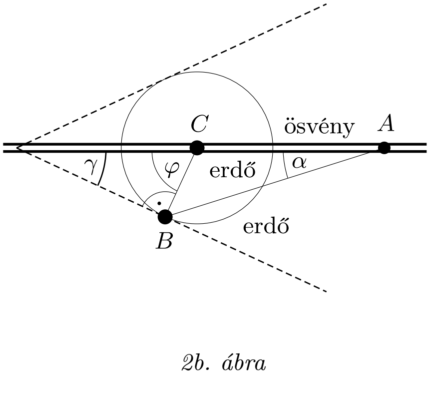
mozog, a kúp félnyílásszöge

$$\gamma = \arcsin \frac{u}{ku} = \arcsin \frac{1}{k},$$

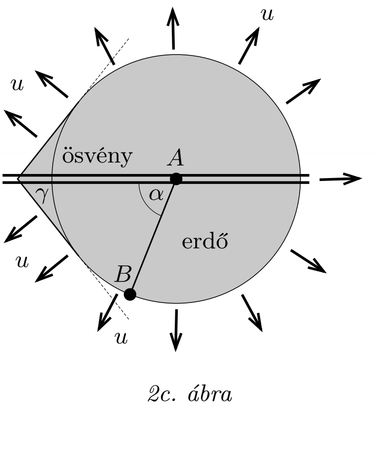
a kúp alkotói pedig u sebességgel mozogva távolodnak a szimmetriatengelytől (vagyis az ösvénytől). A γ szög (az ún. *Mach-szög*) egyértelműen meghatározható, hiszen a feladat szövege szerint $k > 1$.

Az idő múltával lesz egy olyan pillanat, amikor az egyre táguló kúp alkotója (vagyis a hullámfront) eléri a B pontot (*2b. ábra*). Tekintsük a B ponton átmenő, a hullámfrontra merőleges egyenes és az ösvény metszéspontját. Ezen C pontból kiinduló hullám éri el leghamarabb a B pontot, tehát ezen a ponton vezet át az eredeti feladat megoldása, a legrövidebb idejű útvonal is. Ezek szerint

$$\varphi = 90^\circ - \gamma, \quad \text{vagyis} \quad \cos\varphi = \sin\gamma = \frac{1}{k}.$$



2b. ábra



2c. ábra

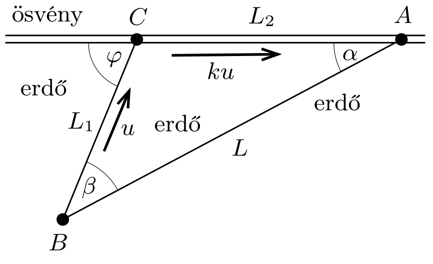
Természetesen (az ábrán választott mozgásirány esetén) a C pont nem lehet A-tól jobbra, vagyis $\varphi \geqslant \alpha$. Emiatt a fentebb leírt megoldás csak

$$\cos\alpha \geqslant \cos\varphi = \frac{1}{k}$$

teljesülése esetén helyes. A $k\cos\alpha = 1$ határesetben $\varphi = \alpha$, vagyis a C pont egybeesik A-val. Ilyenkor a legrövidebb idő, ami alatt eljuthatunk A-ból B-be (vagy B-ből A-ba) olyan útnak felel meg, amely mindvégig az erdőben halad.

Vajon melyik útvonalon haladó hullám éri el leghamarabb a B pontot, ha $k\cos\alpha < 1$? Ebben az esetben nem a Mach-kúp hullámfrontja, hanem az A pontból kiinduló gömbhullám éri el elsőként a B pontot (*2c. ábra*), vagyis a legrövidebb idejű mozgás mindvégig az erdőben halad.

Szakály Marcell (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata felhasználásával



3. ábra

III. megoldás. Jelöljük az A és B pont távolságát L-lel, azt a pontot pedig, ahol elérjük az ösvényt, C-vel (*3. ábra*). Az A és C, valamint a C és B pontok között nyilván egyenes utat érdemes választanunk. Az erdőben megtett út irányát a BA iránytól mért β szöggel, vagy az ösvény irányához viszonyított $\varphi = \alpha + \beta$ szöggel jellemezhetjük.

Az erdőben megtett út hossza (a szinusztétel alapján) $L_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} L$, az ösvényen megtett út hossza pedig $L_2 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} L$. A teljes menetidő a β szög függvényében:

$$t(\beta) = \frac{L_1}{u} + \frac{L_2}{ku} \equiv \frac{L}{u} \cdot \frac{\sin\alpha + \frac{1}{k}\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

A függvény (számunkra érdekes) értelmezési tartománya $0 \leqslant \beta \leqslant 90^\circ - \alpha$, hiszen nyilván nem éri meg az ösvényt (az ábrán vázolt elrendezés esetén) az A ponttól jobbra, vagy a B-hez legközelebbi ponttól balra elérni.

A menetidő minimumát a $t(\beta)$ függvény deriváltjának eltűnése határozhatja meg. Ha létezik olyan β szög az értelmezési tartomány belsejében, ahol

$$0 = t'(\beta) = \frac{L}{u} \cdot \frac{\frac{1}{k}\cos\beta\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big(\sin\alpha + \frac{1}{k}\sin\beta\Big)}{\sin^2(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{L}{u} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} \left[\frac{1}{k} - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

ott a haladási időnek szélsőértéke (esetünkben minimuma) lehet. Mivel sem $(L/u)\sin\alpha$, sem pedig $\sin(\alpha+\beta) \equiv \sin\varphi$ nem lehet nulla, a derivált csak akkor válhat nullává, ha

$$\frac{1}{k}=\cos(\alpha+\beta),\quad \text{vagyis}\quad k\cos\varphi=1.$$

Mivel $\beta\geqslant 0$, vagyis $\varphi\geqslant\alpha$, a derivált nullává válásának feltétele csak

$$1=k\cos\varphi\leqslant k\cos\alpha$$

esetben teljesülhet.

Amennyiben $k\cos\alpha<1$ áll fenn, a $t(\beta)$ függvény monoton növekszik, így a legrövidebb idő a $\beta=0$ szöghöz tartozik. Ilyen esetben (vagyis amikor az ösvényen haladás sebessége nem „elég nagy") érdemes mindvégig az erdőben haladjunk, egyenes vonalban B-től az A pontig.

Kondákor Márk (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

59 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 30, hiányos (1–3 pont) 9, hibás 2 dolgozat.

P. 4935. *Egy fotonnak és egy elektronnak azonos a hullámhossza. Melyiknek nagyobb a mozgási energiája?*

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Budapest

Megoldás. Egy f frekvenciájú, λ_{f} hullámhosszúságú foton energiája:

$$E_{\mathrm{f}}=hf=h\frac{c}{\lambda_{\mathrm{f}}},$$

ahonnan a hullámhossz kifejezhető

$$\lambda_{\mathrm{f}}=\frac{hc}{E_{\mathrm{f}}}.$$

(h a Planck-állandó, c pedig a fénysebesség vákuumban.)

Atomfizikában gyakran használt összefüggés a relativisztikus energia-impulzus reláció:

$$E^2=(Ic)^2+E_0^2, \tag{1}$$

ahol E az elektron összenergiája, E_0 a nyugalmi energiája, I pedig a lendülete (impulzusa). Az elektron lendületét a de Broglie-féle anyaghullám hullámhossza segítségével is kifejezhetjük:

$$I=\frac{h}{\lambda_{\mathrm{e}}}.$$

$\lambda_{\mathrm{e}}=\lambda_{\mathrm{f}}=\lambda$ miatt a foton hullámhosszát be tudjuk helyettesíteni az elektron lendületének képletébe:

$$I=\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{\frac{hc}{E_{\mathrm{f}}}}=\frac{E_{\mathrm{f}}}{c}.$$

Ezt az (1) összefüggésbe beírva a következőt kapjuk: $E^2 = E_\mathrm{f}^2 + E_0^2$, ebből a foton mozgási energiája (ami az összes energiája) kifejezhető:

$$E_\mathrm{f} = \sqrt{E^2 - E_0^2},$$

az elektron mozgási energiája pedig $E_\mathrm{m} = E - E_0$.

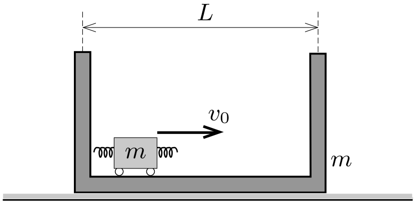
A két mozgási energiát egymással elosztva látszik, hogy

$$\frac{E_\mathrm{f}}{E_\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{E + E_0}{E - E_0}} > 1,$$

vagyis azonos hullámhosszúság esetén a *fotonnak nagyobb* a mozgási energiája.

Csuha Boglárka (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 11. évf.)

44 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 21, hibás 2 dolgozat.



P. 4946. *Egy m tömegű kiskocsi szabadon mozoghat egy szintén m tömegű doboz belsejében. A doboz vékony olajréteggel borított asztalon mozoghat, a súrlódási erő csak a doboz sebességétől függ: $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v}$. Kezdetben a doboz áll, a kiskocsi a bal oldali faltól indulva v_0 nagyságú sebességgel kezd mozogni jobbra. Hányszor fog rugalmasan ütközni az ℓ hosszúságú kiskocsi az L hosszú dobozzal? (A rugalmas ütközést a kiskocsin lévő rugók biztosítják, ezek hossza sokkal kisebb, mint ℓ.)*

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

Megoldás. Először a kiskocsi elindul v_0 sebességgel és $p_0 = mv_0$ impulzussal. Amikor a kiskocsi eléri a doboz falát, akkor a doboz és a vele megegyező tömegű kiskocsi „sebességet cserél", vagyis a kiskocsi megáll, a doboz pedig elindul p_0 impulzussal az olajon. A kiskocsi a következő ütközésig áll, a doboz viszont az olajon való súrlódástól lassul. A doboz mozgásegyenlete:

$$\Delta p = F\Delta t = -kv\Delta t = -k\Delta s.$$

Látható, hogy a doboz impulzusának csökkenése kifejezhető a doboz által megtett úttal, azzal arányos. Az egyes ütközések közt a doboz $L - \ell$ utat tesz meg, ezután átadja impulzusát a kiskocsinak, amely a következő ütközést követően visszaadja az impulzust a doboznak. Ezért a doboz impulzusváltozása két-két ütközésenként: $\Delta p = -k(L - \ell)$.

A folyamat elején 1 ütközés biztosan történik: a kiskocsi nekimegy a doboznak. Ha a továbbiakban még n-szer ütközik a doboz és a kiskocsi, majd a kiskocsi és a doboz, akkor összesen $N = 1 + 2n$ ütközés következik be. (Ha a doboz meglöki a kiskocsit, akkor az egyenletesen mozgó kiskocsi biztosan ütközni fog még a dobozzal.) Az ütközéspárok n számát (vagyis azt, hogy hányszor löki meg a doboz a kiskocsit) a doboz egyre csökkenő impulzusa határozza meg.

Az utolsó ütközés akkor történik, amikor a megmaradt impulzus már nem elég ahhoz, hogy a doboz megtegyen $(L-\ell)$ utat, de eggyel kevesebb n-nél a doboz az üközés után még képes $(L-\ell)$ út megtételére:

$$mv_0 - nk(L-\ell) < k(L-\ell), \qquad \text{de} \qquad mv_0 - (n-1)k(L-\ell) > k(L-\ell),$$

azaz

$$n < \frac{mv_0}{k(L-\ell)} < n+1.$$

Ezek szerint az ütközések száma az egészrész-függvény segítségével így adható meg:

$$N = 2\left[\frac{mv_0}{k(L-\ell)}\right] + 1.$$

Nagy Botond (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

24 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 2 dolgozat.

Versenyfelhívás a 2018-as Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyének* magyarországi válogatójára

Ha szereted a fizikát, a kísérletezést, jól beszélsz angolul, és egy életre szóló élményre vágysz, akkor itt a helyed!

A Fizika Világbajnokságnak is nevezett IYPT közel 30 ország csapatának nyújt lehetőséget, hogy összemérjék tudásukat, rátermettségüket és kommunikációs készségüket 17 előre megadott, ún. nyílt végű fizikai problémán keresztül.

Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell! A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be két rivális csapatnak. A másik két csapat közül az egyik megvizsgálja az előadás fizikai tartalmát egy kulturált vita formájában, a másik pedig komplex értékelést ad az elhangzottakról. A három csapat teljesítményét fizikusokból és fizikatanárokból álló nemzetközi zsűri bírálja el.

Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (HYPT) a `hypt.elte.hu` oldalon való regisztráció határideje: **2017. október 24. éjfél.**

A jelentkező diákoknak egy kiválasztott problémáról 2017. november 24-ig kell elküldeni egy *magyar nyelvű* dolgozatot. Ezen dolgozatok alapján a legjobb

*International Young Physicists' Tournament, IYPT.