KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

67. évfolyam 7. szám — Budapest, 2017. október

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Az 58. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap*

1. *Minden $a_0 > 1$ egész számra definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatot a következőképpen. Minden $n \geqslant 0$-ra legyen*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}\,, & \text{ha } \sqrt{a_n} \text{ egész szám,} \\ a_n + 3 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az összes olyan a_0 értéket, amihez van olyan A szám, amire $a_n = A$ teljesül végtelen sok n-re.

Gáspár Attila megoldása.

1. állítás: *Ha $a_0 \equiv 0 \pmod 3$, akkor a sorozat tartalmazza a 3-at.*

Bizonyítsunk a_0 szerinti teljes indukcióval. Ha $a_0 = 3$, akkor az állítás triviális. Ha $a_0 = 6$, akkor $a_1 = 9$, és $a_2 = 3$, ezért az állítás igaz. A továbbiakban feltételezhetjük, hogy $a_0 \geqslant 9$.

Látható, hogy az $a_0, a_0 + 3, a_0 + 6, \ldots$ számtani sorozatban van az első négyzetszám a sorozatból. A sorozat összes eleme 3-mal osztható, ezért ez a négyzetszám $x^2 = (3k)^2$ alakú. Végtelen sok 3-mal osztható négyzetszám van, ezért a sorozat tartalmaz négyzetszámot. A $\big(3(k-1)\big)^2 = (x-3)^2$ nem szerepel a sorozatban, ezért $a_0 > (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 = x(x-6) + 9 > x + 9 > x$. Az x^2 szerepel a sorozatban, ezért az x is szerepel. $x < a_0$, ezért az indukciós feltevés miatt az állítás igaz.

Látható, hogy ha $a_0 = 3$, akkor $a_1 = 6$, $a_2 = 9$ és $a_3 = 3$. Ha $3 \mid a_0$, akkor az 1. állítás miatt a 3 végtelen sokszor szerepel a sorozatban.

2. állítás: *Ha $a_0 \equiv 1 \pmod 3$, akkor a sorozat tartalmaz $3k + 2$ alakú számot.*

Bizonyítsunk a_0 szerinti teljes indukcióval. Ha $a_0 = 1$, akkor $a_1 = 4$, és $a_2 = 2$. Ebből látható, hogy az állítás $a_0 = 4$ esetén is igaz. A továbbiakban feltételezhetjük, hogy $a_0 \geqslant 7$.

Látható, hogy az $a_0, a_0 + 3, a_0 + 6, \ldots$ számtani sorozatban van az első négyzetszám a sorozatból. Ilyen biztosan van, mert végtelen sok $3k + 1$ alakú négyzetszám van. Legyen ez a négyzetszám x^2. Az x^2 szerepel a sorozatban, ezért az x is szerepel.

*A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

Ha $x = 3k + 2$ alakú, akkor az állítás igaz.

Ha $x = 3k + 1$ alakú, akkor a $(3k - 1)^2 = (x - 2)^2$ nem szerepel a sorozatban, ezért $a_0 > (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 = x(x - 4) + 4 > x + 4 > x$. Az indukciós feltevés miatt az állítás igaz.

3. állítás: *Ha* $a_0 \equiv 2 \pmod 3$, *akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő.*

Egy négyzetszám nem lehet $3k + 2$ alakú. Így az $a_0, a_0 + 3, a_0 + 6, \dots$ sorozat nem tartalmaz négyzetszámot. Ekkor $a_1 = a_0 + 3$, $a_2 = a_0 + 6$, $\dots$, $a_n = a_0 + 3n$. Ezzel az állítást igazoltuk.

Látható, hogy ha a_0 nem osztható 3-mal, akkor a 2. és 3. állítás miatt a sorozat egy idő után szigorúan monoton növekvő. Így nincs olyan A, amit végtelen sokszor tartalmaz.

Tehát pontosan akkor van olyan A, amit végtelen sokszor tartalmaz a sorozat, ha $3 \mid a_0$.

2. *Legyen* $\mathbb{R}$ *a valós számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt, amire minden valós* x, y *szám esetén teljesül*

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x + y) = f(xy).$$

Matolcsi Dávid megoldása. Ha $f(0) = 0$, akkor $y = 0$-nál ezt kapjuk:

$$f\big(f(x)f(0)\big) + f(x + 0) = f(0 \cdot x).$$

Ebben az esetben $f(x) = 0$ minden x-re. Ez valóban megoldása a függvényegyenletnek.

Most nézzük azt az esetet, amikor $f(0) \neq 0$. Ha $x = 0$ és $y = 0$, akkor

$$f\big(f(0)^2\big) + f(0) = f(0), \quad f\big(f(0)^2\big) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $f(c) = 0$ és $c \neq 1$. Ha $y = 1 + \frac{1}{x-1}$, akkor $(x - 1)(y - 1) = 1$, azaz $x + y = xy$, ezért $f(x + y) = f(xy)$, így $f\big(f(x)f(y)\big) = 0$.

Legyen $x = c$ és $y = 1 + \frac{1}{c-1}$. Ekkor $f\Big(f(c)f\Big(1 + \frac{1}{c-1}\Big)\Big) = 0$. Mivel $f(c) = 0$, $f(0) = 0$, ez viszont ellentmond az elején kikötött feltételnek.

Azt kaptuk, hogy $f(c) = 0$ esetén $c = 1$, így $f(0)^2 = 1$, ezért $f(1) = f\big(f(0)^2\big) = 0$, továbbá $f(0) = 1$ vagy $f(0) = -1$.

Világos, hogy $f(x)$ akkor és csak akkor megoldása a függvényegyenletnek, ha $-f(x)$ is megoldása (mindkét oldal előjele megfordul). Ezért az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $f(0) = -1$.

Helyettesítsünk most az egyenletbe $y = 1$-et:

$$\begin{aligned} f\big(f(x)f(1)\big) + f(x + 1) &= f(1 \cdot x), \\ f(0) + f(x + 1) &= f(x), \\ f(x + 1) &= f(x) + 1. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy n egészekre $f(x + n) = f(x) + n$.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ injektív. Tegyük fel, hogy nem az, vagyis létezik olyan $A \neq B$, hogy $f(A) = f(B)$. Legyen n egy A-nál nagyobb egész, és legyen $A - n = a$ és $B - n = b$, ahol tudjuk, hogy a negatív.

Ha $f(A) = f(B)$, akkor $f(a) = f(b)$. Az $x^2 - bx + a - 1 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $b^2 - 4(a-1)$, ami pozitív (mivel $a - 1$ negatív), ezért az egyenletnek két gyöke van, r és s. A Viéte-formulákból tudjuk, hogy $r + s = b$ és $rs = a - 1$; így $x = r$ és $y = s$ választással $f\big(f(r)f(s)\big) + f(b) = f(a-1) = f(a) - 1$.

Az egyenletből kivonható $f(a) = f(b)$: $f\big(f(r)f(s)\big) = -1$, $f\big(f(r)f(s) + 1\big) = 0$, amiből $f(r)f(s) + 1 = 1$, azaz $f(r)f(s) = 0$. Feltehető, hogy $s = 1$, ekkor $a = 1 \cdot r + 1$ és $b = r + 1$, tehát $a = b$, ezzel ellentmondásra jutottunk; a függvény valóban injektív.

Legyen $y = 1 - x$. Ekkor $f\big(f(x)f(1-x)\big) + f(1) = f\big(x(1-x)\big)$,

$$f\big(f(x)f(1-x)\big) = f\big(x - x^2\big).$$

Az injektivitás miatt $f(x)f(1-x) = x - x^2$.

Legyen most $y = -x$. Ekkor $f\big(f(x)f(-x)\big) + f(0) = f\big(-x^2\big)$,

$$f\big(f(x)f(-x)\big) - 1 = f\big(-x^2\big),$$

$f\big(f(x)f(-x)\big) = f\big(1 - x^2\big)$.

Az injektivitás miatt $f(x)f(-x) = 1 - x^2$, ezért $f(x)f(1-x) - f(x)f(-x) = x - x^2 - \big(1 - x^2\big) = x - 1$. Másrészt

$$f(x)f(1-x) - f(x)f(-x) = f(x)\big(f(1-x) - f(-x)\big) = f(x).$$

Így $f(x) = x - 1$ minden x-re. Ez valóban jó megoldás: $(x-1)(y-1) - 1 + x + y - 1 = xy - 1$.

Ez volt a megoldás, amikor $f(0) = -1$, és ennek az ellentettje, $f(x) = 1 - x$ a megoldás, amikor $f(0) = -1$.

Tehát a függvényegyenletnek három megoldása van: $f(x) = 0$, $f(x) = x - 1$ és $f(x) = 1 - x$.

3. *Egy vadász és egy láthatatlan nyúl egy játékot játszik az euklideszi síkon. A nyúl A_0 kiindulópontja és a vadász B_0 kiindulópontja egybeesnek. A játék $(n-1)$-edik menete után a nyúl az A_{n-1} pontban, a vadász a B_{n-1} pontban van. A játék n-edik menetében a következő három dolog történik, ebben a sorrendben:*

(*i*) *A nyúl láthatatlan módon egy olyan A_n pontba megy, amire A_{n-1} és A_n távolsága pontosan* 1.

(*ii*) *Egy nyomkövető eszköz megad egy P_n pontot a vadásznak. Az eszköz által a vadásznak nyújtott információ mindössze annyi, hogy P_n és A_n távolsága legfeljebb* 1.

(*iii*) *A vadász látható módon egy olyan B_n pontba megy, amire B_{n-1} és B_n távolsága pontosan* 1.

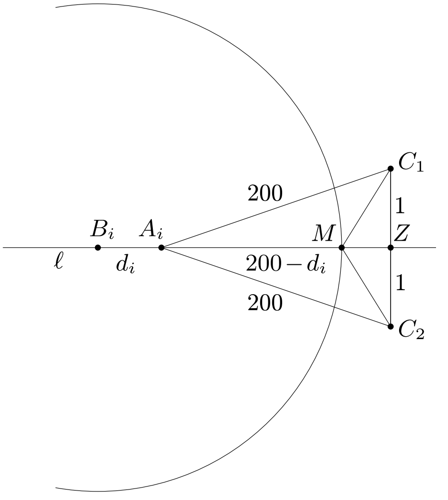
Igaz-e, bárhogyan mozogjon is a nyúl, és bármilyen pontokat jelezzen is a nyomkövető eszköz, hogy a vadász mindig meg tudja úgy választani a mozgását, hogy 10^9 *menet után a távolság közte és a nyúl között legfeljebb* 100 *legyen?*

Kovács Benedek megoldása. A feladat állítása nem igaz: belátjuk, hogy a vadász akármilyen stratégiája esetén a nyomkövető jelezheti $P_1, P_2, \ldots, P_{10^9}$ pontok olyan sorozatát, hogy a nyúlnak létezzen olyan, a szabályok szerinti $A_0A_1A_2\ldots A_{10^9}$ lehetséges mozgássorozata, amire $B_{10^9}A_{10^9} > 100$. Vagyis ha a nyúl maga jelölheti ki a nyomkövető jelzéseit a számára legkedvezőbb módon, akkor a vadász nem tudja garantálni, hogy 100-on belül kerüljön a nyúlhoz.

Legyen $d_i = A_iB_i$. A nyúl célja az, hogy $d_{10^9} > 100$ legyen. Nyilván az is elég számára, ha valamilyen $i < 10^9$-re $d_i > 100$, hiszen ha ekkor a nyúl a további lépésekben már mindig a vadásszal ellentétes irányban lép, akkor lépésével a vadásztól való távolságát 1-gyel növeli, a vadász pedig a saját lépésében legfeljebb 1-gyel csökkentheti, vagyis egy fordulón belül a távolság nem csökken, így a 10^9-edik forduló után is 100-nál nagyobb lesz.

Lemma. *Ha az i. fordulóban* $d_i < 100$*, a vadász nem tudja garantálni, hogy* $d_{i+200}^2 \leqslant d_i^2 + \frac{1}{2}$ *legyen.*

Bizonyítás. A nyúl tehát 200 forduló alatt szeretné a vadásztól vett távolságának négyzetét $\frac{1}{2}$-nél többel megnövelni. A vadásznak az i-edik forduló kezdetekor a nyúl mozgásáról rendelkezésére álló információt a $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ pontok jelentik. Ezen pontok alapján a nyúlnak akár több lehetséges helye is lehet, de most tegyük fel még azt is, hogy a nyúl konkrétan elárulja a helyzetét, az A_i pontot. A korábbi információk így feleslegessé válnak.



Jelöljük ℓ-lel az A_iB_i egyenest ($A_i = B_i$ esetén tetszőleges egyenest A_i-n keresztül). Mérjük fel az *ábra* szerint az l egyenesre az A_i pontból, B_i-vel ellentétes irányban $\sqrt{39999}$ egységet, így kapva a Z pontot. A Z pontban merőlegest állítva ℓ-re, ezen a merőlegesen vegyük fel a C_1 és C_2 pontokat Z-től 1 távolságra. Ekkor a Pitagorasz-tétel miatt $A_iC_1 = A_iC_2 = \sqrt{39999+1} = 200$ lesz.

A nyúl számára a következő 200 fordulóban az lesz a stratégia, hogy egyenesen elmegy a C_1 célpontba (ezt megteheti, hiszen $A_iC_1 = 200$). Mivel a teljes A_iC_1 szakasz 1 távolságon belül van az ℓ egyenestől, a nyúl minden fordulóban kijelölheti helyzetének az ℓ-re vett merőleges vetületét, mint a nyomkövető által adandó jelzést.

Természetesen ugyanezeket a jelzéseket megadhatná a nyúl akkor is, ha nem a C_1, hanem a C_2 pontba menne el hasonló módon, hiszen a két útvonal ℓ-re nézve szimmetrikus. A vadász így a 200 forduló alatt kapott jelzésekből nem fogja tudni, hogy a C_1 vagy a C_2 pont felé tart-e a nyúl. Nézzük azt a B_{i+200} pontot, ahova a vadász ezalatt eljutott. Ez a pont biztosan a B_i középpontú, 200 sugarú körön belül van, legyen ennek az ℓ-lel való (a nyúl irányába eső) metszéspontja M.

Osszuk fel ezt a kört két részre az ℓ egyenes (C_1C_2 felezőmerőlegese) mentén. Az egyik (az ábra szerint felső) részben lévő pontok a C_1 célponthoz, a másik (alsó) részben lévők C_2-höz vannak közelebb. A felső rész összes pontjára igaz, hogy legalább olyan távol vannak C_2-től, mint M, mert mind vízszintesen, mind függőlegesen legalább olyan távol vannak tőle (ha az ábra szerint, vagyis az ℓ egyenessel párhuzamosnak vesszük a vízszintes irányt). Ugyanígy az alsó rész összes pontja legalább olyan távol van C_1-től, mint M.

Így a két lehetséges célpont közül a távolabbi mindenképpen legalább olyan messze lesz a vadásztól, mint az $MC_1 = MC_2$ távolság. Számítsuk ki ezt a távolságot. $B_iA_i = d_i$, így $A_iM = 200 - d_i$. Így $MZ = A_iZ - A_iM = \sqrt{39999} - 200 + d_i$, és a Pitagorasz-tétel alapján

$$MC_1 = \sqrt{MZ^2 + C_1Z^2} = \sqrt{\left(\sqrt{39999} - 200 + d_i\right)^2 + 1}.$$

Azt kell belátnunk, hogy ez a távolság nagyobb, mint $\sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}}$:

$$\sqrt{\left(\sqrt{39\,999} - 200 + d_i\right)^2 + 1} > \sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}},$$

$$\left(\sqrt{39\,999} - 200 + d_i\right)^2 + 1 > d_i^2 + \frac{1}{2},$$

$$d_i^2 + 2\left(\sqrt{39\,999} - 200\right)d_i + 80\,000 - 400\sqrt{39\,999} > d_i^2 + \frac{1}{2},$$

$$2\left(\sqrt{39\,999} - 200\right)d_i - 400\sqrt{39\,999} + 80\,000 > \frac{1}{2},$$

$$2\left(\sqrt{39\,999} - 200\right)d_i + 400\left(200 - \sqrt{39\,999}\right) > \frac{1}{2},$$

$$(400 - 2d_i)\left(200 - \sqrt{39\,999}\right) > \frac{1}{2},$$

$$(200 - d_i)\left(200 - \sqrt{39\,999}\right) > \frac{1}{4}.$$

Mivel $d_i \leqslant 100$, azaz $200 - d_i \geqslant 100$, elég belátni, hogy

$$200 - \sqrt{39\,999} > \frac{1}{400},$$

$$80\,000 - 400\sqrt{39\,999} > 1,$$

$$79\,999 > 400\sqrt{39\,999}.$$

Négyzetre emelve:

$$79\,999^2 > 39\,999 \cdot 400^2.$$

Ez pedig igaz, mert

$$79\,999^2 - 1 = 80\,000 \cdot 79\,998 = 16\,0000 \cdot 39\,999 = 39\,999 \cdot 400^2.$$

Ekvivalens lépésekkel dolgoztunk, így a vadász számára rosszabbik távolság legalább $MC_1 > \sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}}$, így a lemmát beláttuk.

A lemmából már következik a bizonyítandó állítás: a játék elején $d_0^2 = 0$, és a lemma szerint (teljes indukcióval) a vadász számára legrosszabb esetben $d_{200n}^2 > \frac{1}{2}n$, amíg a távolság el nem éri a 100-at. Ez az elérés pedig legkésőbb $n = 2 \cdot 100^2 = 20\,000$-re bekövetkezik, azaz $200 \cdot 20\,000 = 4 \cdot 10^6$ fordulón belül. Vagyis $d_{4 \cdot 10^6}^2 > 10\,000$, azaz $d_{4 \cdot 10^6} > 100$. A nyúl ezzel elérte a célját, hiszen $4 \cdot 10^6 \leqslant 10^9$.

Diofantoszi számhalmazok*

Bevezetés

A számelmélet bővelkedik a hosszú időn át vagy akár a mai napig megoldatlan problémákban, ilyenek például a Goldbach-sejtés, az ikerprímsejtés vagy a már igazolást nyert Fermat-sejtés. Ezek közös jellemzője, hogy az általános iskolai tananyag ismeretében lényegében megérthetőek, nincs szükség hozzájuk felsőbb matematikai tudásra, a bizonyításuk mégis évszázadok óta várat vagy váratott magára.

A diofantoszi számötösökről szóló, kevésbé közismert sejtésről mindez ugyanígy elmondható, ráadásul a bizonyítását a közelmúltban jelentették be. Ennek apropóján a következőkben ezt a problémát járjuk körül, bemutatva a kérdéskörhöz kapcsolódó, kiterjedt kutatások aktuális állását és számos nyitott kérdését.

Először *Diophantosz* ókori görög matematikus adott meg négy olyan pozitív racionális számot, melyek közül bármelyik kettő szorzatához 1-et hozzáadva egy racionális szám négyzetét kapjuk. *Pierre de Fermat* volt az, akinek sikerült négy ugyanilyen tulajdonságú egész számot találnia, méghozzá az $\{1, 3, 8, 120\}$ számnégyest. Ezek valóban megfelelőek, ugyanis

$$1 \cdot 3 + 1 = 2^2, \qquad 1 \cdot 8 + 1 = 3^2, \qquad 1 \cdot 120 + 1 = 11^2,$$
$$3 \cdot 8 + 1 = 5^2, \qquad 3 \cdot 120 + 1 = 19^2, \qquad 8 \cdot 120 + 1 = 31^2.$$

*Az írás az OTKA 115479 pályázat támogatásával készült.

Leonhard Euler egy racionális szám, a $\frac{777\,480}{8\,288\,641}$ hozzávételével el tudta érni, hogy továbbra is fennálljon az elvárt tulajdonság, hiszen

$$1\cdot\frac{777\,480}{8\,288\,641}+1=\left(\frac{3011}{2879}\right)^2, \qquad 3\cdot\frac{777\,480}{8\,288\,641}+1=\left(\frac{3259}{2879}\right)^2,$$

$$8\cdot\frac{777\,480}{8\,288\,641}+1=\left(\frac{3809}{2879}\right)^2, \qquad 120\cdot\frac{777\,480}{8\,288\,641}+1=\left(\frac{10\,079}{2879}\right)^2,$$

viszont senkinek nem sikerült ilyen pozitív egész számot találnia. *Alan Baker* és *Harold Davenport* 1969-ben bizonyították be, hogy a Fermat-féle számnégyes pozitív egész számmal nem bővíthető megfelelő számötössé, sőt az $\{1,3,8\}$ számhármas a 120-on kívül nem egészíthető ki más pozitív egész számmal ilyen számnégyessé.

Diofantoszi számhalmazok létezése

A pozitív egész számok halmazának egy legalább kételemű A részhalmazát *diofantoszi számhalmaznak* nevezzük, ha bármely $a,b\in A$, $a\neq b$ esetén $ab+1$ négyzetszám. Ha egy diofantoszi számhalmaz n elemű véges halmaz, akkor *diofantoszi szám-n-esnek,* $n=2$ esetén *diofantoszi számpárnak* is hívjuk. Egyszerű észrevétel, mégis érdemes megfogalmazni, hogy egy diofantoszi számhalmaz minden legalább kételemű részhalmaza szintén diofantoszi számhalmaz.

A definíció és az ahhoz fűzött megjegyzés ismeretében az egyik legtermészetesebb kérdés az, hogy milyen elemszámú diofantoszi számhalmazok léteznek, különös tekintettel arra, hogy mi a legnagyobb lehetséges elemszám.

Végtelen diofantoszi számhalmazok. Kezdjük azzal a kérdéssel, hogy létezik-e végtelen diofantoszi számhalmaz, mivel ennek megválaszolása során be tudjuk mutatni a problémakör vizsgálatának egyik kulcsfontosságú ötletét.

Ha egy legalább négyelemű diofantoszi számhalmaznak három különböző eleme a, b, c, akkor tetszőleges további x eleme esetén $ax+1$, $bx+1$, $cx+1$ négyzetszámok, ezért szorzatuk is négyzetszám, azaz valamilyen y pozitív egész számmal

$$(ax+1)(bx+1)(cx+1)=y^2.$$

Ez egy elliptikus egyenlet, így nevezzük ugyanis az $f(x)=y^2$ alakú diofantoszi egyenleteket, ahol $f(x)$ egy harmadfokú polinom.

Louis J. Mordell 1922-ben bebizonyította, hogy ha ennek a polinomnak a gyökei egyszeresek, akkor az elliptikus egyenletnek csak véges sok megoldása lehet. Alan Baker 1968-ban ennél egy még erősebb állítást igazolt, a gyökökre vonatkozó feltétel megtartása mellett megadott az elliptikus egyenlet megoldásainak abszolút értékére egy felső korlátot. Meg kell jegyeznünk, hogy ezek igen komoly matematikai eredmények, Baker ezt megalapozó munkájáért, valamint annak különböző diofantoszi egyenletekre történő alkalmazásaiért elnyerte az egyik legrangosabb matematikai díjat, a Fields-medált.

Visszatérve a mi kérdésünkre, akár Mordell, akár Baker tételéből következik, hogy csak véges sok lehetséges x létezik, tehát minden diofantoszi számhalmaz véges halmaz.

Diofantoszi számpárok. Könnyedén tudunk végtelen sok diofantoszi számpárt konstruálni. Egyszerűen egy tetszőlegesen választott, 1-nél nagyobb négyzetszámnál 1-gyel kisebb számnak kell vennünk egy osztópárját. De meg tudunk adni diofantoszi számpárokat paraméteresen is, például $\left\{1, k^2 + 2k\right\}$ és $\{k, k+2\}$ diofantoszi számpárok minden k pozitív egész szám esetén.

Diofantoszi számpárokat a Fibonacci-számok segítségével is kaphatunk. A Cassini-azonosság szerint minden k pozitív egész szám esetén $F_k F_{k+2} + (-1)^k = F_{k+1}^2$, így ha k még ráadásul páros is, akkor $\{F_k, F_{k+2}\}$ diofantoszi számpár.

Diofantoszi számhármasok. Euler megmutatta, hogy minden diofantoszi számpár kiegészíthető diofantoszi számhármassá. Legyen ugyanis $\{a, b\}$ egy tetszőleges diofantoszi számpár, ahol $ab + 1 = r^2$. Ekkor $\{a, b, a + b + 2r\}$ diofantoszi számhármas, ugyanis

$$a(a + b + 2r) + 1 = (a + r)^2, \qquad b(a + b + 2r) + 1 = (b + r)^2.$$

Érdekességként megemlítjük, hogy ha a Fibonacci-számok segítségével fent megadott $\{F_k, F_{k+2}\}$ ($k \geqslant 2$ páros) diofantoszi számpárt bővítjük ezen a módon, akkor az $\{F_k, F_{k+2}, F_{k+4}\}$ diofantoszi számhármashoz jutunk, melynek tehát harmadik eleme is Fibonacci-szám.

Diofantoszi számnégyesek. Euler ennél tovább is tudott menni, a diofantoszi számpárokból nyert diofantoszi számhármasokat sikerült kiegészítenie diofantoszi számnégyesekké. *Joseph Arkin, Verner E. Hoggatt Jr.* és *Ernst G. Straus* 1979-ben megmutatta, hogy ez általánosabban is megtehető, bármelyik diofantoszi számhármashoz megadható egy negyedik pozitív egész szám, aminek hozzávételével diofantoszi számnégyeshez jutunk. Vegyünk ehhez egy tetszőleges $\{a, b, c\}$ diofantoszi számhármast, ahol $ab + 1 = r^2$, $ac + 1 = s^2$, $bc + 1 = t^2$. Ekkor $\{a, b, c, a + b + c + 2abc + 2rst\}$ diofantoszi számnégyes, mivel

$$a(a + b + c + 2abc + 2rst) + 1 = (at + rs)^2,$$
$$b(a + b + c + 2abc + 2rst) + 1 = (bs + rt)^2,$$
$$c(a + b + c + 2abc + 2rst) + 1 = (cr + st)^2.$$

A konstrukcióból az is következik, hogy végtelen sok diofantoszi számnégyes létezik. Ugyanakkor meglepő lehet, de az összes eddig ismert diofantoszi számnégyes ilyen, ún. reguláris alakú, azaz a legnagyobb eleme a másik háromból ezzel a szabállyal áll elő. Nyitott azonban az a kérdés, hogy van-e másfajta diofantoszi számnégyes.

Diofantoszi számötösök. Sokáig tartotta magát az a sejtés, miszerint nem létezik diofantoszi számötös. Ez nem független az előbb említett problémától sem, hiszen ha létezne diofantoszi számötös, akkor a három legkisebb eleméhez a negyedik vagy az ötödik elem hozzávételével nem reguláris diofantoszi számnégyest kapnánk. Bo He, Alain Togbé és Volker Ziegler egy megjelenésre váró cikkben igazolták ezt a sejtést, tehát nincs diofantoszi számötös.

A probléma általánosításai, változatai

Ahogyan láttuk, a diofantoszi számötösökről szóló sejtés bizonyításával a diofantoszi számhalmazokról már majdnem mindent tudunk. A definíció különféle általánosításaival és változataival azonban kifogyhatatlan problémakörhöz jutunk, melyből a teljesség igénye nélkül szemezgetünk néhány eredményt.

ℓ-diofantoszi számhalmazok. Rögtön az első gondolat a definíció módosítására, hogy 1 helyett valamilyen más ℓ egész számot adjunk hozzá az elemek szorzatához. Ennek megfelelően egy legalább kételemű, pozitív egészekből álló A halmazt ℓ-diofantoszi számhalmaznak hívunk, ha minden $a, b \in A$, $a \neq b$ esetén $ab + \ell$ négyzetszám.

Kezdjük annak bizonyításával, hogy ha ℓ 4-gyel osztva 2-t ad maradékul, akkor nem létezik ℓ-diofantoszi számnégyes. Ha ugyanis egy négyelemű, egész számokból álló halmaznak van 4-gyel osztható eleme, akkor annak bármelyik másik elemmel vett szorzata is osztható 4-gyel; ha pedig nincs 4-gyel osztható eleme a halmaznak, akkor a skatulyaelv szerint van két elem, melyek ugyanannyit adnak maradékul 4-gyel osztva, így szorzatuk 4-gyel vett osztási maradéka 0 vagy 1. Tehát mindenképpen található a halmazban két elem, melyek szorzatához ℓ-et adva olyan számhoz jutunk, melynek 4-gyel vett osztási maradéka 2 vagy 3, a négyzetszámok viszont 4-gyel osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhatnak. Érdekesség, hogy ezt a viszonylag egyszerű észrevételt három egymástól független cikkben publikálták, melyek mindegyike 1985-ben jelent meg.

Andrej Dujella 1993-ban megmutatta, hogy ha ℓ 4-gyel osztva nem 2-t ad maradékul és $\ell \notin \{-4, -3, -1, 3, 5, 8, 12, 20\}$, akkor létezik ℓ-diofantoszi számnégyes. A kimaradó nyolc szám esetén viszont jelenleg megválaszolatlan az ℓ-diofantoszi számnégyesek létezésének kérdése. Ugyanakkor azt is igazolta, hogy ha ℓ négyzetszám, akkor végtelen sok ℓ-diofantoszi számnégyes van. Itt kell még megemlíteni, hogy bizonyos ℓ értékekre léteznek ℓ-diofantoszi számötösök és számhatosok, és érdekes módon nem minden ilyen ℓ négyzetszám, például sikerült megadni (-255)-diofantoszi számötöst.

m-edik hatvány diofantoszi számhalmazok. A probléma egy másik általánosításához jutunk, ha a legalább kételemű, pozitív egészekből álló A halmaztól azt várjuk el, hogy minden $a, b \in A$, $a \neq b$ esetén $ab + 1$ négyzetszám helyett teljes m-edik hatvány legyen.

Yann Bugeaud és Andrej Dujella 2003-ban vizsgálták az m-edik hatvány diofantoszi számhalmazokat, és bebizonyították, hogy elemszámuk rendre legfeljebb 7, 5, 4 illetve 3 lehet, ha $m = 3$, $m = 4$, $5 \leqslant m \leqslant 176$, $177 \leqslant m$. Viszont ezek a felső korlátok nem feltétlenül pontosak, sőt $m \geqslant 5$ esetén még m-edik hatvány diofantoszi számhármast sem ismerünk.

Racionális diofantoszi számhalmazok. A diofantoszi számhalmazok problémája az egész számok helyett vizsgálható a racionális számok körében is, ahogyan azt eredetileg Diophantosz és Euler is tette. Meg kell jegyezni, hogy egy racionális diofantoszi számhalmaz elemeinek d közös nevezőjével megszorozva a számokat egy d^2-diofantoszi számhalmazhoz jutunk, és viszont.

Az első racionális diofantoszi számhatost *Philip Gibbs* találta, 2017-ben pedig Andrej Dujella, *Matija Kazalicki, Miljen Mikić* és *Szikszai Márton* megmutatta, hogy a racionális diofantoszi számhatosok száma végtelen. Azonban azt nem tudjuk, hogy létezik-e nagyobb elemszámú racionális diofantoszi számhalmaz.

Ha a racionális esetben kiegészítjük a definíciót azzal, hogy a halmaz bármely a eleme esetén a^2+1 is egy racionális szám négyzete legyen, azaz a definícióbeli követelményt nem feltétlenül különböző halmazbeli elemek szorzatának 1-gyel történő megnövelésére írjuk elő, akkor az erős racionális diofantoszi számhalmaz fogalmához jutunk. (Az egész számok körében ennek a módosításnak természetesen nincs értelme.) Andrej Dujella és Vinko Petričević 2008-ban igazolták, hogy végtelen sok erős racionális diofantoszi számhármas létezik, de nem ismert, hogy van-e erős racionális diofantoszi számnégyes.

A fent leírt változatok természetesen szabadon kombinálhatók, vagy vizsgálhatók más számhalmazokon, például a Gauss-egészekre (olyan komplex számok, melyeknek valós és képzetes része is egész szám), vagy akár az egész együtthatós polinomok körében, így az ismertetést is végeláthatatlanul folytathatnánk.

Ehelyett zárszóként szeretnénk kiemelni, hogy Dujellának elévülhetetlen érdemei vannak a témakör népszerűsítésében, melyhez számottevő eredményekkel maga is hozzájárult. Valamint honlapján fenntart egy folyamatosan frissülő, teljességre törekvő irodalomjegyzéket is tartalmazó oldalt, melyet jó szívvel ajánlunk az érdeklődők figyelmébe.

Irodalomjegyzék

[1] Andrej Dujella, *Diophantine m-tuples,* `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/dtuples.html`.

[2] Andrej Dujella, *What is a Diophantine m-tuple?,* Notices of the American Mathematical Society, **63** (2016), 772–774.

Nyul Gábor
Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem
`e-mail: gnyul@science.unideb.hu`

57. Rátz László Vándorgyűlés

Székesfehérvár, 2017. július 4–7.

Idén a matematikatanárokat Székesfehérvár, azon belül a Teleki Blanka Gimnázium látta vendégül, bár a helyszínt az Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar Geoinformatikai Intézete biztosította.

A megnyitón az egybegyűlteket *Cser-Palkovics András* polgármester, *Györök György* dékán és *Katona Gyula,* a Bolyai János Matematikai Társulat elnöke köszöntötte, majd szokásosan a Beke Manó-emlékdíjak átadása következett. Ezt követően először *Csíkos Csaba* érdekes előadását hallgathattuk meg a szöveges feladatokról, majd *Vancsó Ödönét* a XXI. századi matematikaoktatásról, végül a 2016. évi Rátz Tanár Úr Életműdíjas *Tarcsay Tamásét* az életművéről. Vacsora előtt a Szent Imre templomban *Moharos Sándor* orgona- és fagott-, *Szarka Andrea* orgona-, valamint *Kiss Barnabás* fuvolajátékában gyönyörködhettünk.

Idén már másodszor folytak bőséges választékban négy szekcióban az előadások és a szemináriumok: a tavalyi sikeres bemutatkozás után idén is szerepelt a speciális matematika tagozat szekciója. A tanárverseny egyre növekvő népszerűsége indokolttá tette, hogy már állandó helyet kapjon délelőtt a régebbi szerda délutáni sáv helyett. A megoldások és a végeredmény ismertetése csütörtök délelőtt volt, amikor nagy erőkkel, végül sikerrel keresték a szervezők „bambusz”-t, aki a verseny során csak ezt a jeligét adta meg. A tanárversenyt ezúttal is az Akadémiai Kiadó, a Műszaki Kiadó, a MATEGYE Alapítvány és a TypoTex Kiadó támogatta, a középiskolás verseny feladatait és az eredményeket külön közöljük.

Székesfehérvár sok látnivalót ad a látogatóinak, így sokan a szervezett kirándulások helyett a városban maradtak csütörtök délután, legtöbben a Bory-várat látogatták meg. Akik kirándulni mentek, Fehérvárcsurgó és Tác, illetve a Velencei tó között választhattak.

A vándorgyűlés megnyitójáról egy hosszabb beszámoló olvasható Székesfehérvár honlapján*. Az előadások anyagai megtekinthetők a vándorgyűlés honlapján (`http://rlv.berzsenyi.hu/2017`), amelyet a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium matematika munkaközössége gondoz.

A 2018-as vándorgyűlés Győrött lesz, ahova ismét nagy létszámban várja a matematikatanárokat a Bolyai János Matematikai Társulat.

Miklós Ildikó

A középiskolai tanárok versenyének feladatai

A verseny időtartama 90 perc. A feladatok pontozása: minden helyes válasz 5 pontot ér; helytelen válaszra 0 pont, válasz nélkül hagyott kérdésekre 1-1 pont jár. A versenyen íróeszközön, papíron, körzőn és vonalzón kívül semmilyen más segédeszköz nem használható.

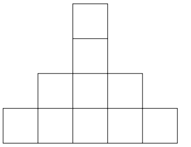
1. A 19 az 1 híján 20. Hány híján 20 az 1?
(A) -21; (B) -20; (C) -19; (D) 19; (E) 21.

2. Mennyi annak a számrendszernek az alapszáma, amelyben ez a feladatsor 42 feladatból áll? (A) 5; (B) 6; (C) 7; (D) 8; (E) 9.

3. Az x és az y olyan 0-tól különböző valós számok, amelyekre $x-y=xy$. Mennyi az $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ különbség?
(A) -1; (B) 0; (C) 1; (D) $-\frac{1}{xy}$; (E) Az előzőek közül egyik sem.

*`http://www.szekesfehervar.hu/fehervaron-rendezik-a-matematikatanarok-orszagos-konferenciajat`.

4. Hány olyan négyzet van, melynek a csúcsai az *ábrán* látható rácspontok közül kerülnek ki?
(A) 10; (B) 15; (C) 16; (D) 17; (E) 18.*



5. Hat különböző természetes szám összege 20. Mennyi a hat szám szorzata? (A) 0; (B) 120; (C) 360; (D) 720; (E) Egyértelműen nem határozható meg.

6. Hány olyan állítás van az alábbiak között, amely nem teljesül egyetlen olyan a, b és c számhármas esetén sem, melyre $a < b < c$?

$$a + b < c, \qquad a + c < b, \qquad a \cdot b < c, \qquad a \cdot c < b, \quad b : c = a.$$

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

7. Hány szakaszt határoznak meg azok a derékszögű koordinátarendszerben lévő pontok, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám és a két koordináta szorzata 2017?
(A) 1; (B) 4; (C) 6; (D) 8; (E) 10.

8. Hány olyan p prímszám van, melyre a $\left[\frac{3p-15}{11}\right] = 3$?
(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

9. Mennyi a $\frac{2\cdot3\cdot5+4\cdot6\cdot10+\ldots+100\cdot150\cdot250}{2\cdot4\cdot6+4\cdot8\cdot12+\ldots+100\cdot200\cdot300}$ tört?
(A) $\frac{5}{8}$; (B) $\frac{6}{7}$; (C) $\frac{7}{8}$; (D) 1; (E) $\frac{8}{7}$.

10. Melyik az A, B és C kifejezések értékének növekvő sorrendje, ha

$$A = \left(\sqrt[3]{8} + 4^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad B = \sin^2\frac{\pi}{5} \quad \text{és} \quad C = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}?$$

(A) ABC; (B) BAC; (C) BCA; (D) CAB; (E) CBA.

11. Hány olyan n egész szám van, melyre a $2017^n + 2017^{n-1} + \ldots + 2017^2 + 2017 - 1$ összeg osztható 2016-tal? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 2017; (E) végtelen sok.

12. Öt egymást követő egész szám összege $\overline{1ab5c}$ ötjegyű szám. Hány ilyen szám van?
(A) 0; (B) 5; (C) 162; (D) 198; (E) 200.

13. Mennyi az $1! + 2! + 3! + \ldots + 2017!$ összeg 2017-dik hatványának az egyes helyiértékén álló számjegye? (A) 1; (B) 3; (C) 7; (D) 8; (E) 9.

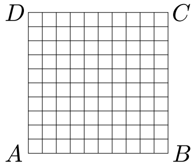
14. Egy verseny előtt öt versenyző, Anna, Bea, Cili, Dóri és Emese a következőket állította:
Anna: Az első három között végzek a versenyen.
Bea: Én nyerek.
Cili: Legyőzöm Annát.
Dóri: Nem tudom Beát megelőzni.
Emese: Cili vagy Dóri lesz az első.

Mi lett a versenyzők sorrendje, ha egyiküknek sem lett igazuk? (A válaszokban a versenyzőket nevük kezdőbetűivel jelöljük.)
(A) $ECBDA$; (B) $EBDAC$; (C) $EBCDA$; (D) $BDECA$; (E) $EDBAC$.

15. Egy egyenlő szárú trapéz oldalai 1; 1; 1 és 2 egység hosszúak. Hány egység a trapéz köré írt kör sugara?
(A) 1; (B) $\sqrt{2}$; (C) 1,5; (D) 2; (E) Az előzőek közül egyik sem.

---

*A helyes válasz 20, mely nem szerepelt a válaszlehetőségek között.

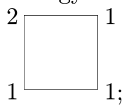


16. Hányféleképpen tölthető ki egy 10×10-es négyzetrács úgy, hogy a négyzetrács minden négyzetébe az 1 vagy a -1 számot írjuk, és a sorokban és az oszlopokban álló számok összege különböző? (A) 0; (B) 4; (C) 8; (D) 12; (E) 16.

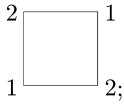
17. Mennyi x_{2017}, ha $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$?
(A) $\frac{2016}{2018}$; (B) $\frac{2015}{2017}$; (C) $\frac{2016}{2017}$; (D) $1 - \frac{1}{2018}$; (E) 1.

18. Mennyi az $x+y$ összeg, ha x és y olyan természetes számok, melyekre teljesül az $x^2 + x = 2^y + 1259$ egyenlet? (A) 0; (B) 32; (C) 35; (D) 36; (E) 71.

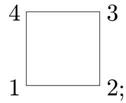
19. Egy négyzet csúcsaihoz számokat írunk, majd kiválasztunk két olyan csúcsot, amelyek egy oldalra illeszkednek, és mindkét csúcsnál lévő számhoz 1-et adunk. Ezután a két csúcs kiválasztását és a csúcsoknál lévő számokhoz az 1 hozzáadását egymás után többször megismételjük. Melyik esetben érhető el, hogy mind a négy csúcsnál ugyanaz a szám legyen?

(A) 

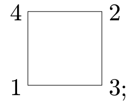
;

(B) 

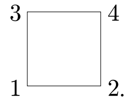
;

(C) 

;

(D) 

;

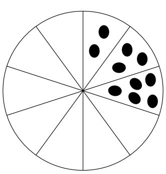
(E) 

.

20. Egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Melyik összefüggés igaz a két szemben fekvő a és c oldalhossza és a körülírt körének r sugara között?
(A) $a^2 = cr$; (B) $r^2 = ac$; (C) $c^2 = ar$; (D) $a^2 = r^2 + c^2$; (E) $a^2 = 4r^2 - c^2$.

21. Egy dobozban piros, zöld és kék golyók vannak. Legkevesebb 6 golyót kell kihúzni a dobozból, hogy biztosan legyen a kihúzott golyók között piros. Legkevesebb 7 golyót kell kihúzni a dobozból, hogy biztosan legyen a kihúzott golyók között zöld. Legkevesebb 8 golyót kell kihúzni a dobozból, hogy biztosan legyen a kihúzott golyók között kék. Hány piros golyó van a dobozban? (A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 7; (E) 8.

22. Hány olyan 2017-nél nem nagyobb pozitív egész szám írható az n helyére, hogy a $2^n - 1$ különbség osztható legyen 7-tel? (A) 0; (B) 1; (C) 672; (D) 673; (E) 2017.



23. Egy kör alakú, tíz részre osztott tábla három részében kezdetben 10 kavics van (lásd *ábra*). A tábla melletti halombólráteszünk egyszerre egy-egy kavicsot két egymás melletti részre, majd ezt többször megismételjük azért, hogy mind a tíz részben ugyanannyi kavics legyen. Hány kavics lesz akkor a táblán, amikor mind a tíz részben ugyanannyi lesz, és a táblán a kavicsok száma a lehető legkevesebb? (A) 50; (B) 80; (C) 100; (D) 120; (E) Soha nem lehet ugyanannyi kavics mind a tíz részben.

24. Hány olyan b természetes szám van, melyre a $b^4 + 3b^2 + 1$ és a $b^3 + 2b$ legnagyobb közös osztója 1?
(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) végtelen sok; (E) Az előzőek közül egyik sem.

25. A Bakancsos túraszakosztály öt túrát szervezett az év során. A szakosztály 50 tagja közül 41-en vettek részt az első, 46-an a második, 43-an a harmadik, 31-en a negyedik és 39-en az ötödik túrán. Hányan vettek részt a szakosztály tagjai közül a negyedik és az ötödik túrán is, ha mind az öt túrán a szakosztály egyetlen tagja sem vett részt? (A) 14; (B) 15; (C) 20; (D) 25; (E) Ezekből az adatokból nem lehet meghatározni.

26. Feri a háromjegyű és négyjegyű páros számokat vizsgálta. Először kiszámolta a vizsgált számok számtani közepét. Utána kiválasztott a számok közül 150-et, és a többi szám számtani közepét is meghatározta. Mennyi a kiválasztott 150 szám összege, ha a két

kiszámolt átlag egyenlő?
(A) 100 000; (B) 250 510; (C) 457 030; (D) 700 125; (E) 757 350.

27. Egy nagy kockát ragasztunk össze 27 db szabályos dobókockából, majd a nagy kocka tetszőleges öt lapjának mindegyikéből kivesszük a középső dobókockát. Mennyi lehet az így kapott test felületén látható pöttyök száma, ha az a lehető legkevesebb? (A szabályos dobókocka lapjai 1-től 6-ig pöttyözöttek, és a szemközti lapokon lévő pöttyök számának összege 7.) (A) 187; (B) 194; (C) 208; (D) 210; (E) 215.

28. Egy háromszög egyik oldala a, az a oldalhoz tartozó magasság m. Melyik kifejezés adja meg a háromszög kerületének a lehető legkisebb értékét bármely lehetséges a és m esetén? (A) $a+4m$; (B) $\sqrt{a^2+m^2}$; (C) $\sqrt{2a^2+m^2}$; (D) $\sqrt{4m^2+a^2}$; (E) $a+2\cdot\sqrt{m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

29. Egy bogár az A pontból indul és egyenes vonal mentén haladva 16 cm megtétele után a B pontba érkezik. A B pontban az eredeti haladási irányához képest α szöggel elfordul, az új irányban szintén egyenes vonalban folytatja útját, és 10 cm megtétele után a C pontba érkezik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az AC távolság kisebb 14 cm-nél, ha az α szöget radiánban mérjük, és véletlenszerűen választjuk ki a $]0;\pi[$ intervallumból?
(A) $\frac{1}{5}$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{3}$; (D) $\frac{2}{5}$; (E) $\frac{3}{5}$.

30. Egy téglalap két szomszédos oldalának a hossza 6 cm és 2 cm. A téglalap hosszabb középvonalának P egy olyan pontja, amelyből az egyik 2 cm hosszú oldal kétszer akkora szögben látszik, mint a másik 2 cm hosszú oldal. Hány centiméterre lehet a P pont a téglalap egyik rövidebb oldalától?
(A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; (B) $\frac{\sqrt{10}}{3}$; (C) $\frac{1+\sqrt{8}}{2}$; (D) $\sqrt{5}$; (E) $\frac{6+\sqrt{39}}{3}$.

A feladatsort **Csordásné Szécsi Jolán** állította össze

A középiskolai tanárok versenyének eredménye

1–2. Fonyó Lajos (Keszthelyi Vajda János Gimn.) .... 150 pont
1–2. Fridrik Richárd (Szegedi Tudományegyetem) .... 150 pont
3. Károlyi Gergely (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn.) .... 140 pont
4. Baloghné Cseh Judit (Szolnok, Varga Katalin Gimn.) .... 133 pont
5. Kórus Péter (Szeged, SZTE JGYPK TÓKI) .... 131 pont
6. Fonyóné Németh Ildikó (Keszthelyi Vajda János Gimn.) .... 125 pont
6. Mahler Attila (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn.) .... 125 pont
8. „bambusz” .... 124 pont
9. Nagy Piroska Mária (Dunakeszi, Radnóti Miklós Gimn.) .... 122 pont
10. Nádháziné Borbola Éva (Kecskemét, Katona József Gimn.) .... 121 pont.

Az általános iskolai tanárok versenyének* eredménye

1. B. Varga József (Temerin, Petar Kocsity Ált. Isk.) .... 129 pont
2. Csanády Gáborné (Budapest, Baár-Madas Ref. Ált. Isk. és Gimn.) .... 125 pont
3. Egyed László (Bajai III. Béla Gimn.) .... 124 pont
4. Paróczay Eszter (Gödöllői Premontrei Szent Norbert Ált. Isk. és Gimn.) 115 pont
5. „Domb” .... 107 pont
6. „Tomi01” .... 99 pont.

*Az általános iskolai tanárok versenyének feladatait nem közöljük.

A 2017. évi Beke Manó Emlékdíjasok

A Beke Manó Emlékdíj Bizottság döntése alapján 2017-ben a díj első fokozatát kapta **Katz Sándor,** a bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium tanára. A díj második fokozatában részesült **Árvainé Libor Ildikó, Bere Lászlóné, Fenyvesi Mária, Jakucs Erika, Stallenberger Józsefné, Szomódi Zsuzsanna** és **Tóthné Berzsán Gabriella.**

A részletes indoklás honlapunkon (`www.komal.hu`) olvasható.

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget, illetve egyenletet:

a) $\log_4\left(x^2-3x\right)\leqslant 1$; (*5 pont*)

b) $x^2\cdot|\sin x|=\sin x$. (*6 pont*)

2. Egy ismert hazai társasjáték játéktábláján körben egymás után 40 sorszámozott mező található. A játékosok az 1. sorszámú START mezőről indulnak, és mindig annyit lépnek előre, amennyit egy szabályos dobókockával dobnak. Ha egy játékos bábujával olyan mezőre lép, ahol már áll egy másik bábu, akkor kiüti azt, és a kiütött bábut a START mezőre visszahelyezi. A játékosok a játékot játékpénzzel játsszák, és annak megkezdésekor mindenki 20 000 Ft kezdőösszeggel indul.

a) Hányféle sorrendben számolhat le a pénztáros Csabának 2 db 5000 Ft-os, 8 db 1000 Ft-os, 3 db 500 Ft-os és 5 db 100 Ft-os játékpénzt? (*3 pont*)

b) Hányféle különböző címletezésben kaphatja meg Csaba a kezdőösszeget, ha csak a három nagy címlet (5000 Ft, 1000 Ft és 500 Ft) mindegyikéből kap? (*4 pont*)

c) Csaba első tizenöt dobásának átlaga 4,2 volt, és közben egyszer sem ütötték ki. Hányas sorszámú mezőn áll most Csaba figurája? (*3 pont*)

d) László figurája kettő mezővel áll Csabáé mögött, miután Csaba lépett. Mekkora annak a valószínűsége, hogy László a következő dobásával kiüti Csabát? (*2 pont*)

3. Egy körhöz az O középpontjától 7 cm-re levő külső P pontból szelőt húzunk. A szelő körrel vett A és B metszéspontjai P-től rendre 4 cm, illetve 8 cm távolságra vannak.

a) Milyen hosszú érintőszakasz húzható P-ből a körhöz? (*3 pont*)

b) Mekkora szögben látszik az OB szakasz a P pontból? (*4 pont*)

c) Számítsuk ki az ODE háromszög területét, ahol D az AB húr felezőpontja, E pedig az érintési pont. (*7 pont*)

4. Egy $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja 3, differenciája 5, egy $\{b_n\}$ számtani sorozat első tagja 2, differenciája 1.

a) Határozzuk meg, hogy hány darab háromjegyű köbszám szerepel az $\{a_n\}$ sorozat első 100 tagja között. (*4 pont*)

b) A $\{b_n\}$ sorozat első 85 tagja közül hányféleképpen lehet 5 különböző számot kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott számok mértani sorozatot alkossanak? (*10 pont*)

II. rész

5. Adott a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x - x\sqrt{x}$ függvény.

a) Adjuk meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis): (*8 pont*)

Az $A(-1;5)$ és $B(4;0)$ pontokra illeszkedő egyenes éppen az f függvény B pontbeli érintője.

b) Számítsuk ki az f függvény grafikonja és az x tengely által határolt korlátos síkidom területét. (*8 pont*)

6. Az alábbi táblázatban egy nagyáruházban dolgozók havi bruttó bérének gyakorisága látható.

Bruttó bér (ezer Ft)	95	110	120	125	160	200	230
Gyakoriság	7	4	2	5	3	2	1

a) Melyik az a bérérték, amelynél a dolgozók legalább fele nem keres kevesebbet, legalább fele pedig nem keres többet? (*2 pont*)

b) Mennyivel változik a havi bruttó bérek szórása, ha a dolgozók egységesen 10%-os béremelést kapnak? (*4 pont*)

Az áruházban számos furfangos trükköt alkalmaznak a termékek elhelyezésére azért, hogy a vásárlók pontosan azokat az árucikkeket vegyék meg, amelyeken a bolt a legtöbbet keresi. Az egyik ilyen trükk a polcok különböző zónákra osztása, melyet az alábbi táblázatban láthatunk.

Zónák	**Vásárlási valószínűség az adott polcról**	**A polcon található termékek átlagára**
Nyújtózkodási zóna	0,1	1400 Ft
Szemmagassági zóna	0,5	900 Ft
Kézzel elérhető zóna	0,3	700 Ft
Lehajló zóna	0,1	400 Ft

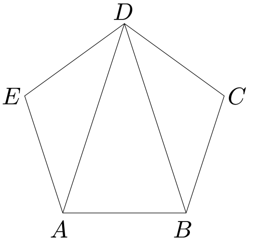
c) Mekkora a vásárlási összeg várható értéke egy áru fenti polcrendszerről történő vásárlása esetén? (*2 pont*)

A nagyáruházban az egyik délután megfigyelték, hogy 65% annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott vásárló nő. Ebben az időszakban a nőknél 70% az esélye, hogy kártyával fizetnek, míg a férfiak csak 40%-ban fizetnek kártyával.

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a pénztárnál sorban álló 8 ember közül pontosan 5 nő? (*3 pont*)

e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott vásárló kártyával fizet? (*5 pont*)

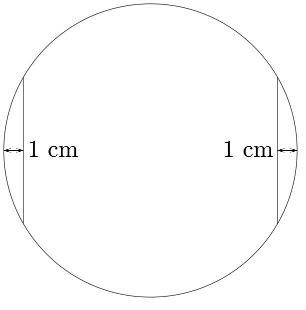
7. Adott az *ábrán* látható szabályos ötszög.

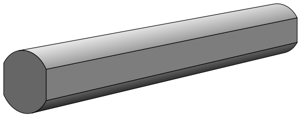


a) Igazoljuk, hogy az ötszögben $AB^2 = AP \cdot AD$, ha P az AD átló és az ABD háromszög B csúcsából induló belső szögfelezőjének metszéspontja. (*8 pont*)

b) Hány különböző kört határoznak meg egy 5 pontú teljes gráf élei? (*8 pont*)

(Két kört azonosnak tekintünk, ha mindkettőben ugyanazok a csúcsok és ugyanazok az élek szerepelnek.)





8. Egy erdei turistautat átszelő patak fölött az erdészet hidat készít, amihez 22 db 15 cm átmérőjű, henger alakú farönköt használnak, melyek hossza 1,2 m. A jobb illesztés érdekében a rönköket a forgástengelyükkel párhuzamosan, 1-1 cm-es maximális mélységben, teljes hosszukban az *ábra* szerint mindkét oldalon legyalulják, és ezeknek az egyenes felületeknek a mentén fogatják össze a darabokat. A híd két végénél lévő két farönköt csak az egyik oldaluknál gyalulják le.

a) Mennyi faanyagot tartalmaz a híd elkészített állapotában? (*8 pont*)

A farönkök legyalulása után azok mindegyikének teljes felületét egyesével lefestik.

b) Mekkora lesz az összes lefestett felület nagysága? (*8 pont*)

9. Tekintsük az

$$a_n = \left\{ \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right\}$$

sorozatot, ahol $n \in \mathbb{N}^+$.

a) Igazoljuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat első n tagjának összege $S_n = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$. (*9 pont*)

b) Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right)$ határértéket, majd adjuk meg, hogy a sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon = 0{,}01$ sugarú környezetébe. (*7 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2017/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a) Egy gyorsvonat két város közötti útját a menetrend szerint* 80 km/h *átlagsebességgel szokta megtenni. A vonat azonban egyik nap – pályafelújítási munkák miatt – az útja első egyharmadán csak* 40 km/h *átlagsebességet ért el. Az út második kétharmad részét a menetrend szerint előírt* 80 km/h *átlagsebességgel tette meg. Az út befejező egyharmad részén – hogy csökkentse a késést – gyorsított, így ezt a szakaszt* 100 km/h *átlagsebességgel tette meg. A célállomásra így is* 12 *perc késéssel érkezett. Hány* km *a távolság a két város között?*

b) Egy vasúti jegy árát először p százalékkal felemelték, majd később $2p$ százalékkal csökkentették. Így a jegy eredeti árához képest végül 19,5 *százalékkal olcsóbb lett. Határozzuk meg p értékét.* (*13 pont*)

Megoldás. *a)* A két város közti távolságot jelölje s. Az adatok alapján a következő egyenlet írható fel (a távolságokat km-ben, az időt órában, a sebességet km/h-ban mérjük):

$$\frac{s}{80}+0{,}2=\frac{\frac{1}{3}s}{40}+\frac{\frac{1}{3}s}{80}+\frac{\frac{1}{3}s}{100}.$$

1200-zal beszorozva az egyenletet:

$$15s+240=10s+5s+4s,$$

ahonnan $s=60$, a két város távolsága tehát 60 km.

Ellenőrzés: A vonat a menetrend szerinti 80 km/h átlagsebességgel 45 perc alatt teszi meg a két város közti utat. Ezen az úton az első 20 km-t (40 km/h átlagsebességgel) 30 perc, a második 20 km-t (80 km/h átlagsebességgel) 15 perc, az utolsó 20 km-t pedig (100 km/h átlagsebességgel) 12 perc alatt tette meg, így összesen valóban 12 perc késéssel (57 perc alatt) ért a célállomásra.

b) Az adatok alapján felírható egyenlet a jegy árának változására:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{2p}{100}\right)=0{,}805.$$

10 000-rel beszorozva és rendezve:

$$0=2p^2+100p-1950.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei $p_1=15$ és $p_2=-65$. A negatív gyök nem ad megoldást, tehát $p=15$.

Ellenőrzés: Egy 15 százalékos emelés után egy 30 százalékos csökkentés $1{,}15\cdot 0{,}7=$ $=0{,}805$-szeresére változtatja az eredeti árat, ami valóban 19,5 százalékos csökkenésnek felel meg.

2. *a) Határozzuk meg az $(x+1)^2(2+cx)^4$ kifejezésben c értékét, ha a műveletek elvégzésével nyert polinomban az elsőfokú tag együtthatója -64.*

b) Határozzuk meg az A, B és C kijelentések lehetséges logikai értékeit, ha tudjuk, hogy az $(A\wedge B)\to(\neg B\vee C)$ állítás logikai értéke hamis. (*13 pont*)

Megoldás. a) $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Elsőfokú tagot kapunk, ha az innen kapott $2x$-et szorozzuk a $(2+cx)^4$ hatvány konstans tagjával, vagy az innen kapott 1-et szorozzuk a hatvány elsőfokú tagjával.

A binomiális tétel szerint $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, tehát

$$(2+cx)^4=16+4\cdot 8\cdot cx+6\cdot 4\cdot c^2x^2+\ldots .$$

Ezért a szorzatban az elsőfokú tag együtthatója $2\cdot 16+1\cdot 32c=32+32c=-64$, ahonnan $c=-3$.

b) A következtetés akkor és csak akkor hamis, ha az előzmény igaz és a következmény hamis. Tehát $(A\wedge B)=i$-nek és $(\neg B\vee C)=h$-nak kell egyszerre teljesülnie.

Ha $(A\wedge B)=i$, akkor az A és B kijelentések logikai értéke is igaz. Ha $B=i$, akkor $\neg B=h$. $(\neg B\vee C)=h$ akkor teljesül, ha $\neg B$ és C logikai értéke is hamis. Már láttuk, hogy $\neg B=h$, ezért kell, hogy $C=h$ is teljesüljön.

A feladatban szereplő következtetés logikai értéke tehát egyetlen esetben lesz hamis: $A=i$, $B=i$, $C=h$.

3. a) *Három teljes gráf közül az elsőnek* 5*-tel kevesebb, a másodiknak* 6*-tal több pontja van, mint a harmadiknak. A két kisebb pontszámú gráfnak együtt összesen annyi éle van, mint a legnagyobb pontszámúnak. Határozzuk meg a három teljes gráf pontjainak számát.*

b) *Egy gráfban* cseresznyének *nevezzük a két egymáshoz csatlakozó élből álló részgráfot. Igazoljuk, hogy egy hétpontú teljes gráfban a cseresznyék száma megegyezik a négypontú körök számával.* (*13 pont*)

Megoldás. a) A legkisebb pontszámú gráf pontjainak számát k-val jelölve a megoldandó egyenlet:

$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(k+5)(k+4)}{2}=\frac{(k+11)(k+10)}{2},$$

$$\left(k^2-k\right)+\left(k^2+9k+20\right)=k^2+21k+110,$$

$$k^2-13k-90=0,$$

$k=18$ vagy $k=-5$. Ez utóbbi nem megoldása a feladatnak.

A három teljes gráfnak 18, 23, illetve 29 pontja van.

Ellenőrzés: K_{18}-nak 153, K_{23}-nak 253, K_{29}-nek 406 éle van, és valóban $153+253=$ $=406$.

b) *I. megoldás.* Egy cseresznye három pontját $\binom{7}{3}=35$-féleképpen választhatjuk ki. A három pont közül 3-féleképpen választható ki a cseresznye csúcsa. A hétpontú teljes gráfban a cseresznyék száma tehát $35\cdot 3=105$.

Egy négypontú kör pontjait $\binom{7}{4}=35$-féleképpen választhatjuk ki. Négy adott pont esetén 3-féleképpen választhatjuk ki azt, hogy közülük melyik 2–2 pont legyen a körben „szemben”. A négypontú körök száma tehát $35\cdot 3=105$.

K_7-ben tehát valóban megegyezik a cseresznyék és a négypontú körök száma.

II. megoldás. Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést adunk a hétpontú teljes gráfban található cseresznyék és a négypontú körök között.

Számozzuk meg a gráf csúcsait 1-től 7-ig. Egy tetszőlegesen kiválasztott négypontú kör pontjai legyenek $1\leqslant a<b<c<d\leqslant 7$, a körben nem szereplő pontok pedig $1\leqslant e<$ $<f<g\leqslant 7$. Három olyan négypontú kör van, mely az a, b, c, d pontokat tartalmazza

($abcda$, $abdca$ és $acbda$), és három cseresznye, mely az e, f, g pontokat tartalmazza (efg, egf és gef). Ezt a 3-3 kört és cseresznyét rendre feleltessük meg egymásnak.

Ezzel minden négypontú körhöz pontosan egy cseresznyét, és minden cseresznyéhez pontosan egy kört rendeltünk, tehát a négypontú körök és a cseresznyék száma valóban egyenlő.

4. *Egy nyolc valós számból álló adatsor öt eleme ismert:* 5; 5,5; 10; 12,5 *és* 15,5. *A maradék három elem elveszett, de tudjuk, hogy legalább az egyik egész szám, és a három elem közül kettő egyforma volt. Azt is tudjuk, hogy a teljes adatsor átlaga* 10,5, *szórása pedig* 3,5 *volt. Határozzuk meg a hiányzó három elem értékét.* (*12 pont*)

Megoldás. Legyen a hiányzó elemek értéke a, a és b. Ekkor az átlag alapján $\frac{5+5{,}5+10+12{,}5+15{,}5+2a+b}{8}=10{,}5$, ahonnan $2a+b=35{,}5$. A szórás alapján

$$\sqrt{\frac{(5-10{,}5)^2+(5{,}5-10{,}5)^2+(10-10{,}5)^2+(12{,}5-10{,}5)^2+(15{,}5-10{,}5)^2+2(a-10{,}5)^2+(b-10{,}5)^2}{8}}=$$

$$=\sqrt{\frac{84{,}5+2(a-10{,}5)^2+(b-10{,}5)^2}{8}}=3{,}5,$$

ahonnan $2(a-10{,}5)^2+(b-10{,}5)^2=13{,}5$. ahonnan $2(a-10{,}5)^2+(b-10{,}5)^2=13{,}5$.

Az első egyenletből $b=(35{,}5-2a)$-t ebbe behelyettesítve:

$$2(a-10{,}5)^2+(25-2a)^2=13{,}5.$$

Rendezve:

$$6a^2-142a+832=0.$$

Ennek megoldásai: $a_1=13$ és $a_2=\frac{32}{3}$, melyekhez tartozó b értékek rendre $b_1=9{,}5$ és $b_2=\frac{85}{6}$.

A második esetben nem kapunk megoldást, mert a három hiányzó érték egyike sem egész szám, tehát a hiányzó három adat 13, 13 és 9,5.

Ellenőrzés: a nyolc számból álló adatsor átlaga valóban 10,5, szórása pedig valóban 3,5.

II. rész

5. *a*) *Egy háromszög egyik oldala* 7 cm *hosszú, az egyik ezen fekvő szög* 18 *fokos, az oldallal szemközti szög pedig* 108 *fokos. Határozzuk meg a háromszög területét és a háromszögbe írható kör sugarát.*

b) *Egy vízszintes terepen álló torony talppontját megközelíteni nem tudjuk. A torony magasságára árnyékának hosszából szeretnénk következtetni, de a torony megközelíthetetlensége miatt az árnyék pontos hosszát sem tudjuk megmérni.*

Ezért megjelöljük a torony árnyékának végpontját akkor, amikor a Nap sugarai 75°*-os szögben érik a talajt. Néhány órával később, amikor a Nap sugarai már csak* 60°*-os szögben érik a talajt, a torony árnyékát ennél* 8 *méterrel hosszabbnak találjuk.*

Milyen magas a torony? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje a háromszög 18 fokos szöggel szemközti oldalát a, az 54 fokos szöggel szemközti oldalát pedig b. A háromszög ismeretlen oldalainak hosszát szinusztétellel határozzuk meg:

$$\frac{a}{7}=\frac{\sin 18^\circ}{\sin 108^\circ},\quad \text{ahonnan}\quad a\approx 2{,}27\ \text{cm},$$

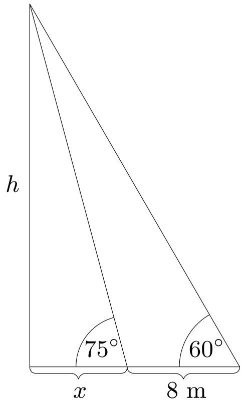
$$\frac{b}{7}=\frac{\sin 54^\circ}{\sin 108^\circ},\quad \text{ahonnan}\quad b\approx 5{,}95\ \text{cm}.$$

A háromszög területe:

$$T=\frac{7\cdot a\cdot \sin 54^\circ}{2}\approx 6{,}44\ \text{cm}^2$$

(a két tizedesjegyre kerekített értékével számolva 6,43 cm^2).

A beírható kör r sugara a $T=rs$ képlet segítségével határozható meg, ahol $s=\frac{K}{2}\approx$ $\approx 7{,}61$ cm. Innen $r=\frac{T}{s}\approx 0{,}85$ cm.



b) Jelölje a torony magasságát h, árnyékának hosszát az első mérés alkalmával x.

$$\operatorname{tg} 75^\circ=\frac{h}{x}\quad \text{és}\quad \operatorname{tg} 60^\circ=\frac{h}{x+8},$$

$$h=\operatorname{tg} 75^\circ\cdot x=\operatorname{tg} 60^\circ\cdot(x+8).$$

Ebből (kihasználva, hogy $\operatorname{tg} 75^\circ=2+\sqrt{3}$),

$$x=\frac{8\cdot\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 75^\circ-\operatorname{tg} 60^\circ}\left(=4\sqrt{3}\right)\approx 6{,}9\ \text{méter},$$

majd $h=\operatorname{tg} 75^\circ\cdot x\left(=12+8\sqrt{3}\right)\approx 25{,}9$ méter.

Másképp:

$$x=\frac{h}{\operatorname{tg} 75^\circ},\quad \text{majd ezzel}\quad \operatorname{tg} 60^\circ=\frac{h}{\frac{h}{\operatorname{tg} 75^\circ}+8}.$$

Ebből

$$h=\frac{8\cdot\operatorname{tg} 60^\circ}{1-\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 75^\circ}}\left(=12+8\sqrt{3}\right)\approx 25{,}9\ \text{méter}.$$

6. *Öt osztálytárs: Anna, Balázs, Cili, Dénes és Elemér négynapos közös nyaralásra mennek. Mind a négy napon sorsolással választják ki maguk közül azt az egy embert, akinek aznap reggel be kell vásárolnia (egy-egy emberre akár többször is sor kerülhet).*

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy napon más-más ember megy bevásárolni?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy napon ugyanannak az embernek kell bevásárolnia?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Annát a négy nap alatt legalább kétszer kisorsolják?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a nyaralás során két ember intézi mind a négy bevásárlást (mindkettőre legalább egyszer sor kerül)? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A kérdezett valószínűséget a kedvező esetek és az összes eset számának hányadosaként kapjuk:
$$p=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5^4}=0{,}192.$$

b) Annak a valószínűsége, hogy pl. Annát sorsolják ki mind a négy napon, $\left(\frac{1}{5}\right)^4$. Mivel bármelyik osztálytárs esetén ugyanennyi ez a valószínűség, és ezek egymást kizáró események, ezért
$$p=5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{1}{125}=0{,}008.$$

Másképp: Az első nap bárkit kisorsolhatnak. Annak a valószínűsége, hogy a hátralevő három napon is ugyanezt az embert fogják kisorsolni:
$$p=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}=0{,}008.$$

c) Binomiális eloszlást használunk.
$$P(\text{legalább 2-szer kisorsolják Annát})=$$
$$=1-P(\text{0-szor})-P(\text{1-szer})=1-\left(\frac{4}{5}\right)^4-\binom{4}{1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3=$$
$$=1-0{,}4096-0{,}4096=0{,}1808\left(=\frac{113}{625}\right).$$

d) Először kiszámítjuk annak a valószínűségét, hogy mind a négy bevásárlásra Annát és Balázst sorsolják ki. A négy bevásárlás közül Anna intézhet egyet, kettőt vagy hármat, a többit pedig Balázs.
$$P(3A,1B)=P(1A,3B)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{4}{625}=0{,}0064,$$
$$P(2A,2B)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{6}{625}=0{,}0096.$$
Tehát
$$P(A\text{ és }B\text{ vásárol minden nap})=\frac{14}{625}=0{,}0224.$$
Mivel hatféleképpen választható ki az a két ember, aki mind a négy bevásárlást intézi, azért a kérdezett valószínűség az előbbi érték hatszorosa:
$$P(\text{ketten vásárolnak minden nap})=\frac{84}{625}=0{,}1344.$$

7. *a*) *Határozzuk meg az* $a_n=\frac{4n-1}{n}$ *sorozat legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátját.*

b) *Egy számtani sorozat első* 11 *tagjának összege* 660. *A sorozat első tagja, hatodik tagja, és első nyolc tagjának összege (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagját adja. Határozzuk meg a számtani sorozat első tagját és differenciáját.*

(*16 pont*)

Megoldás. *a)* $a_n = \frac{4n-1}{n} = 4 - \frac{1}{n}$. Mivel az $\frac{1}{n}$ sorozat szigorúan monoton csökken és 0-hoz tart, ezért az $a_n = 4 - \frac{1}{n}$ sorozat szigorúan monoton nő és 4-hez tart, tehát legkisebb felső korlátja a 4, legnagyobb alsó korlátja pedig az első tagja: $a_1 = 4 - \frac{1}{1} = 3$.

b) Az első 11 tag összege: $\frac{(2a_1+10d)\cdot 11}{2} = 660$, innen

$$(1) \qquad 2a_1 + 10d = 120,$$

azaz $a_1 = 60 - 5d$.

A mértani sorozatból:

$$\frac{a_1+5d}{a_1} = \frac{\frac{(2a_1+7d)\cdot 8}{2}}{a_1+5d},$$

$$a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = 8a_1^2 + 28a_1d,$$

$$0 = 7a_1^2 + 18a_1d - 25d^2.$$

$(*)$ Az a_1-re kapott összefüggést ide beírva:

$$0 = 7(60-5d)^2 + 18(60-5d)d - 25d^2 =$$
$$= (25\,200 - 4200d + 175d^2) + (1080d - 90d^2) - 25d^2 =$$
$$= 60d^2 - 3120d + 25\,200 = 60(d^2 - 52d + 420).$$

Innen $d = 10$ vagy 42.

Ellenőrzés: Az első esetben $a_1 = 10$, $a_6 = 60$ és $S_8 = 360$ valóban egy mértani sorozat ($q = 6$) három szomszédos tagja, továbbá $S_{11} = 660$.

A második esetben $a_1 = -150$, $a_6 = 60$ és $S_8 = -24$ szintén valóban egy mértani sorozat ($q = -0{,}4$) három szomszédos tagja, továbbá $S_{11} = 660$.

II. megoldás a $(*)$-gal jelölt résztől kezdve: d^2-tel osztva legyen $c = \frac{a_1}{d}$, ezzel $0 = 7c^2 + 18c - 25$. Innen $c = 1$ vagy $-\frac{25}{7}$, azaz $a_1 = d$ vagy $a_1 = -\frac{25}{7}d$.

Ezt visszaírva az (1) egyenletbe:

vagy $2a_1 + 10d = 12d = 120$, ahonnan $d = 10$ és $a_1 = 10$;
vagy $2a_1 + 10d = \frac{20}{7}d = 120$, ahonnan $d = 42$ és $a_1 = -150$.

III. megoldás: Az első 11 tag összegéből kapjuk, hogy $a_1 + 5d = 60$, ez éppen a számtani sorozat 6. tagja. Ezzel a mértani sorozatból:

$$\frac{60}{60-5d} = \frac{\frac{(120-3d)\cdot 8}{2}}{60},$$

$$3600 = (60-5d)(480-12d),$$

$$0 = 60d^2 - 3120d + 25\,200 = 60(d^2 - 52d + 420).$$

Innen pedig az 1. megoldásnál látottak szerint folytatható a gondolatmenet.

8. *a*) *Határozzuk meg n értékét úgy, hogy az alábbi egyenlőség teljesüljön:*

$$\int_2^n 2x+5\,\mathrm{d}x=\int_1^7 10n-2x-3x^2\,\mathrm{d}x.$$

b) *Mekkora területű síkidomot vág ki az $f(x)=\frac{4}{(x+1)^2}-1$ függvény grafikonja az első síknegyedből?*

c) *Írjuk fel az f grafikonjához az 1 abszcisszájú pontjában húzott érintőegyenes egyenletét.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Elvégezzük az egyenlet két oldalán kijelölt integrálásokat a Newton–Leibniz-tétel alapján:

$$\left[x^2+5x\right]_2^n=\left[10nx-x^2-x^3\right]_1^7,$$

$$\left(n^2+5n\right)-(4+10)=(70n-49-343)-(10n-1-1),$$

$$n^2-55n+376=0.$$

Innen $n_1=47$ vagy $n_2=8$.

Mindkét n-re valóban teljesül az egyenlőség: az első esetben 2430, a második esetben pedig 90 az integrálok értéke az egyenlet mindkét oldalán.

b) Megkeressük, hogy az f grafikonja hol metszi az x tengely pozitív félegyenesét: $\frac{4}{(x+1)^2}-1=0$, ebből (az $x>0$ feltétel mellett) $x=1$.

Mivel az f grafikonja az y tengelyt metszi (+3-ban), ezért az első síknegyedből levágott síkidom területét az

$$\int_0^1 \frac{4}{(x+1)^2}-1\,\mathrm{d}x$$

integrál értéke adja meg:

$$T=\int_0^1 \frac{4}{(x+1)^2}-1\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{4}{x+1}-x\right]_0^1=(-3)-(-4)=1.$$

A kérdéses síkidom tehát éppen egységnyi területű.

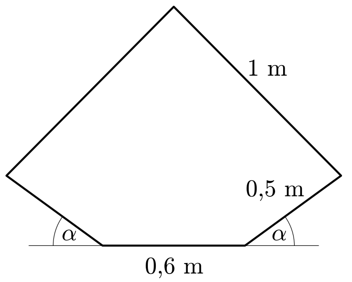
c) Az érintőegyenes meredekségét az f deriváltfüggvényének az $x=1$-ben felvett értéke adja:

$$f'(x)=-\frac{8}{(x+1)^3},\quad \text{tehát}\quad f'(1)=-1.$$

Az 1 abszcisszájú pont második koordinátája:

$$f(1)=\frac{4}{(1+1)^2}-1=0.$$

Az érintőegyenes egyenlete $y=1-x$.

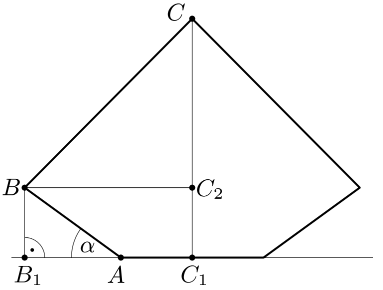


9. *Egy villanymozdony áramszedőjét két ponton rögzítették a mozdony tetejéhez, ezek távolsága* 0,6 *méter. Az áramszedő négy, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból áll. A két rövidebb szakasz* 0,5 *méter, a két hosszabb szakasz* 1 *méter hosszú (lásd az* ábrát*). Az áramszedő egyes szakaszai a mozdony tetejéhez és egymáshoz képest csuklósan szabadon elmozdulhatnak. Jelölje* $h(\alpha)$ *az áramszedő legmagasabb pontjának magasságát a mozdony tetejéhez képest akkor, amikor mindkét rövidebb ág* α *szöget zár be a mozdony tetejének síkjával.*

a) Igazoljuk, hogy $h(\alpha)=\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cos\alpha)^2}+0{,}5\sin\alpha$.

b) Milyen magasan lesz az áramszedő legmagasabb pontja $\alpha=25^\circ$ *esetén?*

c) Mekkora α *szög esetén lesz az áramszedő legmagasabb pontja éppen* 1 *méter magasságban?* (*16 pont*)



Megoldás. *a*) Az *ábra* jelöléseit használjuk.

Az áramszedő egyik rövidebb ága $AB=0{,}5$ (m), ez az A pontban csatlakozik a mozdony tetejéhez. A B pont merőleges vetülete a mozdony tetősíkjára B_1. Ekkor $BAB_1\sphericalangle=\alpha$, $AB_1=0{,}5\cos\alpha$, $BB_1=0{,}5\sin\alpha$.

Az áramszedő hosszabbik ága $BC=1$ (m). A C pont merőleges vetülete a mozdony tetősíkjára C_1. A B pont merőleges vetülete a CC_1 egyenesre C_2.

$$h(\alpha)=CC_1=CC_2+C_2C_1=\sqrt{1-C_2B^2}+BB_1=\sqrt{1-(C_1A+AB_1)^2}+0{,}5\sin\alpha=$$
$$=\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cos\alpha)^2}+0{,}5\sin\alpha,$$

ami éppen a bizonyítandó volt.

b) $\alpha=25^\circ$ esetén

$$h(\alpha)=\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cos 25^\circ)^2}+0{,}5\sin 25^\circ\approx$$
$$\approx\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}9063)^2}+0{,}5\cdot 0{,}4226\approx 0{,}869,$$

tehát ebben az esetben az áramszedő csúcs kb. 87 cm magasan lesz a mozdony tetejéhez képest.

c) Megoldandó a $\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cos\alpha)^2}+0{,}5\sin\alpha=1$ egyenlet. A négyzetre emelést elvégezve és átrendezve:

$$\sqrt{0{,}91-0{,}3\cos\alpha-\frac{\cos^2\alpha}{4}}=1-0{,}5\sin\alpha.$$

Emeljük négyzetre most az egyenletet:

$$0{,}91-0{,}3\cos\alpha-\frac{\cos^2\alpha}{4}=1-\sin\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{4}.$$

Átrendezve:
$$\sin\alpha - 0{,}09 - \left(\frac{\sin^2\alpha}{4} + \frac{\cos^2\alpha}{4}\right) = 0{,}3\cos\alpha.$$
Kihasználva, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, kapjuk, hogy $\sin\alpha - 0{,}34 = 0{,}3\cos\alpha$.

($*$) Ismét négyzetre emelünk:
$$\sin^2\alpha - 0{,}68\sin\alpha + 0{,}1156 = 0{,}09\cos^2\alpha.$$
$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ helyettesítéssel:
$$1{,}09\sin^2\alpha - 0{,}68\sin\alpha + 0{,}0256 = 0,$$
$$\sin\alpha_{1,2} \approx \frac{0{,}68 \pm \sqrt{0{,}68^2 - 4\cdot 1{,}09\cdot 0{,}0256}}{2\cdot 1,09} = \frac{0{,}68 \pm \sqrt{0{,}350\,784}}{2{,}18} \approx \frac{0{,}68 \pm 0{,}5923}{2{,}18}.$$
Azaz $\sin\alpha \approx 0{,}5836$, tehát $\alpha \approx 35{,}705^\circ$, vagy $\sin\alpha \approx 0{,}0402$, tehát $\alpha \approx 2{,}306^\circ$.

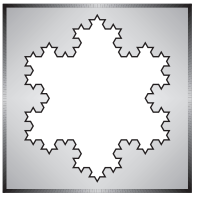
Ez utóbbi a második négyzetre emelésnél keletkezett hamis gyök (a négyzetre emelés előtt az egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldala pozitív). Előbbi érték viszont valóban megoldása a feladatnak, hiszen könnyű meggyőződni róla, hogy ebben az esetben mindkét négyzetre emelésnél az egyenlőség mindkét oldala pozitív.

Tehát $\alpha \approx 36^\circ$ esetén lesz a mozdony áramszedőjének csúcsa éppen 1 méter magasan.

II. megoldás a ($*$)-gal jelölt résztől kezdve:
$$\sin\alpha - 0{,}3\cos\alpha = 0{,}34.$$
$\sqrt{1^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{1{,}09}(\approx 1{,}044)$-gyel osztva:
$$\frac{1}{\sqrt{1{,}09}}\sin\alpha - \frac{0{,}3}{\sqrt{1{,}09}}\cos\alpha = \frac{0{,}34}{\sqrt{1{,}09}}.$$
Mivel $\frac{1}{\sqrt{1{,}09}} \approx \cos 16{,}699^\circ$ és $\frac{0{,}3}{\sqrt{1{,}09}} \approx \sin 16{,}699^\circ$, ezért ez (az ismert addíciós tétel segítségével) így írható:
$$\sin\alpha\cos 16{,}699^\circ - \cos\alpha\sin 16{,}699^\circ = \sin(\alpha - 16{,}699^\circ) = \frac{0{,}34}{\sqrt{1{,}09}} \approx \sin 19{,}006^\circ,$$
ahonnan (mivel α hegyesszög) $\alpha - 16{,}699^\circ \approx 19{,}006^\circ$, azaz $\alpha \approx 35{,}705^\circ$.

Koncz Levente
Budapest

C gyakorlat megoldása



C. 1404. *Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának F felezőpontjából a BC oldalra bocsátott merőleges talppontja D. Az FD szakasz felezőpontja G. Mutassuk meg, hogy AD merőleges CG-re.*

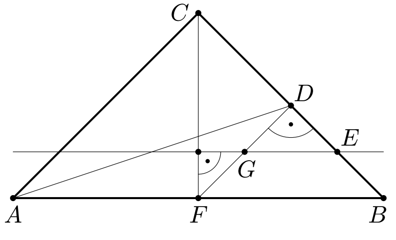
I. megoldás. Legyen E a BD szakasz felezőpontja. Mivel G az FD szakasz a felezőpontja, azért EG a BDF háromszögnek középvonala, és így $EG \parallel BF$. Mivel BF merőleges CF-re, azért EG is merőleges CF-re (*1. ábra*).

Továbbá, mivel FD merőleges BC-re, EG pedig CF-re, azért a G pont az FEC háromszög magasságpontja. Ebből következik, hogy CG merőleges az EF szakaszra.

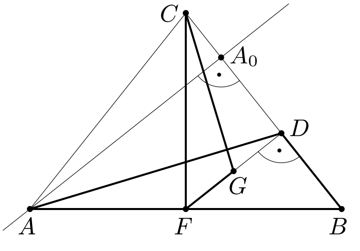
Az ABD háromszögben E a BD oldal, F pedig az AB oldal felezőpontja, így EF az ABD háromszög középvonala, amiből következik, hogy $EF \parallel AD$.

Mivel CG merőleges EF-re, azért merőleges az EF-fel párhuzamos AD szakaszra is.

Szillágyi Éva (Újvidék, Jovan Jovanović Zmaj Gimn., 11. évf.)



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. $AFC\sphericalangle = BFC\sphericalangle = 90°$. Az A pontból állítsunk merőlegest a BC oldalra, talppontját nevezzük A_0-nak.

$ABC\sphericalangle = CFD\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Így az AA_0B és a CFD derékszögű háromszögeknek két szöge is megegyezik, így hasonlóak. Az AB oldal merőleges a CF-re, ha ezeket azonos szöggel forgatjuk azonos (pozitív vagy negatív) irányba, az általuk bezárt szög $90°$ marad (*2. ábra*).

Mivel F az AB oldal felezőpontja és $FD \parallel AA_0$, azért az FD az ABA_0 háromszög középvonala és D a BA_0 szakasz felezőpontja. Tehát AD az AA_0B háromszög A csúcsából a szemközti oldal felezőpontjába megy, hasonlóan a CG a CFD háromszög C csúcsából az FD felezőpontjába. Így az ABD háromszög hasonló a CFG háromszöghöz. Emiatt $BAD\sphericalangle = FCG\sphericalangle$. Tehát ha ezzel a szöggel forgatjuk el az AB, illetve a CF szakaszokat, melyekről tudjuk, hogy merőlegesek egymásra, akkor pontosan az AD szakasz, illetve a CG szakasz egyenesére jutunk, azaz ezek is merőlegesek egymásra.

Takács Réka (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Bizonyítandó, hogy az AD szakasz merőleges a CG-re. Vektorokkal ez úgy írható fel, hogy a skaláris szorzatuk 0, tehát $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$. Ezt szeretnénk belátni. Alakítsuk a bal oldalt:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD}) \cdot \frac{\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CD}}{2} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CD}}{2}.$$

Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CF}$ és $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{CD}$, tehát skaláris szorzatuk 0. Így a kifejezést tovább alakítva, az egyenlő lesz az alábbival:

$$\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{CF}}{2}=\frac{\overrightarrow{AF}(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FD})+\overrightarrow{FD}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF})}{2}.$$

Mivel $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CF}$ és $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{CB}$, azért ez egyenlő az alábbival:

$$\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{BF}}{2}=\frac{\overrightarrow{FD}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF})}{2}.$$

Mivel $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}=\mathbf{0}$, így ezzel beláttuk, hogy az $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CG}$ szorzat valóban zérus, tehát az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{CG}$ szakaszok derékszöget zárnak be egymással.

Tatai Mihály (Szekszárd, Garay János Gimn., 12. évf.)

IV. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordinátarendszerben a következőképpen: $F(0;0)$, $A(-b;0)$, $B(b;0)$, $C(0;c)$. Ekkor $\overrightarrow{CB}(b;-c)$, az FD egyenes egyenlete $bx-cy=0$, másképp $x=\frac{c}{b}y$; a CB egyenes egyenlete pedig $cx+by=cb$.

Mivel a két egyenes metszéspontja D, ezért a CB egyenletébe behelyettesítve $x=\frac{c}{b}y$-t, megkapjuk D koordinátáit:

$$D\left(\frac{c^2b}{c^2+b^2};\frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

G az FD felezőpontja:

$$G\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2b}{c^2+b^2};\frac{1}{2}\cdot\frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

Ebből

$$\overrightarrow{CG}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2b}{c^2+b^2};\frac{1}{2}\cdot\frac{-cb^2-2c^3}{c^2+b^2}\right)\quad \text{és}\quad \overrightarrow{AD}\left(\frac{2c^2b+b^3}{c^2+b^2};\frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

A merőlegesség szükséges és elégséges feltétele az, hogy a skaláris szorzat 0 legyen:

$$\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2b}{c^2+b^2}\cdot\frac{2c^2b+b^3}{c^2+b^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-cb^2-2c^3}{c^2+b^2}\cdot\frac{cb^2}{c^2+b^2}=0.$$

Ezzel állításunkat beláttuk.

Németh Csilla Márta (Budapest, Puskás T. Távközlési Techn., 11. évf.)

33 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 20 versenyző: Agócs Katinka, Édes Lili, Horváth László, Kocsis Júlia, Komoróczy Ádám, Kormányos Hanna Rebeka, Magyar Boglárka, Mészáros Melinda, Nagy Olivér, Németh Csilla Márta, Rittgasszer Ákos, Surján Anett, Szécsi Adél Lilla, Szilágyi Éva, Takács Réka, Tanács Viktória, Tatai Mihály, Thuróczy Mylan, Török Boldizsár, Zsombó István. 4 pontos 2, 2 pontos 6, 0 pontos 5 dolgozat.

Matematika feladat megoldása

B. 4806. *Adott egy K körlemez, és rajta két pont, amelyek távolsága nagyobb, mint 2 egység. Mutassuk meg, hogy K-ban van olyan, egységsugarú körlemez, amely a két pont egyikét sem tartalmazza.*

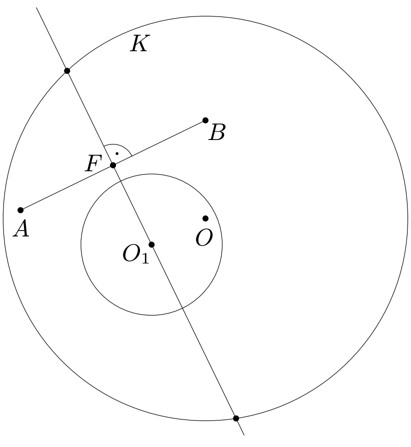
(*3 pont*) Javasolta: *Károlyi Gyula* (Budajenő)

Megoldás. A K körlemez középpontja legyen O, a két adott pont pedig A és B (*1. ábra*). Húzzuk meg az AB szakasz felezőmerőlegesét. Az így keletkezett húr felezőpontja legyen O_1.

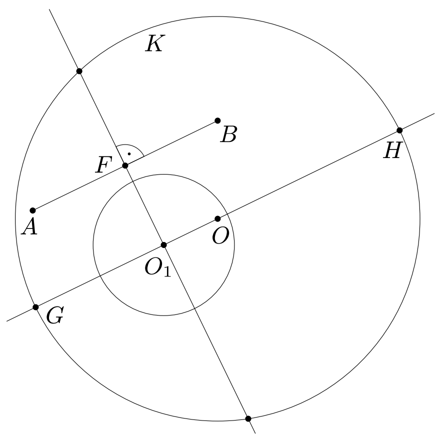
Állítás. *Az O_1 középpontú egységsugarú körlemez rajta van a K körlemezen és nem tartalmazza az A és B pontokat.*

Bizonyítás. Az O_1 középpontú egységsugarú körlemez nem tartalmazhatja az A és B pontokat, mert

$$AO_1 = BO_1 \geqslant AF = \frac{AB}{2} > 1.$$



1. ábra



2. ábra

Mivel az O_1 pont rajta van az AB szakasszal párhuzamos GH átmérőn (*2. ábra*), ahol $GO_1 \geqslant AF > 1$ és $HO_1 \geqslant BF > 1$, így az O_1 középpontú egységsugarú körlemez biztosan a K-ban fog elhelyezkedni.

Asztalos Ádám (Budapest, XIII. ker. Berzsenyi D. Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

161 dolgozat érkezett. 3 pontos 86, 2 pontos 29, 1 pontos 23, 0 pontos 21 dolgozat. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

Mi a matematika és kik a matematikusok?

2017. november 20-án, hétfőn, 15:30-tól az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet és a Bolyai János Matematikai Társulat szervezésében a Magyar Tudomány Ünnepe alkalmából kötetlen beszélgetés lesz matematika iránt érdeklődő középiskolásokkal matematikai karrierlehetőségekről, oktatásról, tehetséggondozásról.

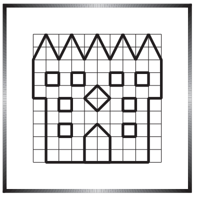
A program során több, karrierje különböző fokán álló matematikussal ismerkedhetnek meg az érdeklődők. Az előadók kiválasztásának egyik szempontja a matematika, illetve a matematikus közösség sokszínűségének „felvillantása", ezzel is közelebb hozva mindkettőt a fiatalokhoz.

Helyszín: MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapest, V. ker., Reáltanoda utca 13–15., Nagyterem.

Kapcsolattartó: Patkós Balázs, e-mail: `patkos.balazs@renyi.mta.hu`.

További információ a `http://www.renyi.hu` honlapon olvasható.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (553–558.)



K. 553. András és Vili egy zsákból húznak, amiben cetliken a számok vannak 1-től 200-ig. Felváltva kihúzzák az összeset, majd a végén összeadják számaikat. Ha első húzásra András 3-at, Vili 170-et húzott, akkor legfeljebb mennyivel lehet András összege nagyobb Vili összegénél?

K. 554. Leírjuk az egész számokat 1-től 2017-ig a következőképpen. Először leírjuk növekvő sorrendben azokat, amelyek nem oszthatók 3-mal. Majd pedig, amelyek oszthatók 3-mal, de nem oszthatók 9-cel, utána azokat, amelyek oszthatók 9-cel, de nem oszthatók 27-tel, és így tovább.

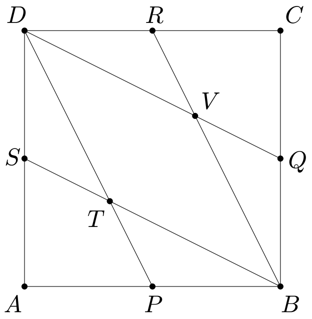
a) Mi az utolsóként leírt szám?

b) Hányadikként írtuk le a 2017-et?

c) Hányadikként írtuk le a 2016-ot?

K. 555. Melyik az a három szomszédos egész szám, amelyek szorzata éppen az összegük ötszöröse?

K. 556. Az egységoldalú négyzetekből álló négyzetrácson lehet-e olyan ötszöget készíteni, amelynek minden csúcsa rácspont és minden oldala $\sqrt{5}$ hosszúságú?



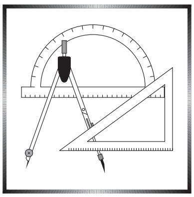
K. 557. Egy $ABCD$ négyzet P, Q, R és S oldalfelező pontjait összekötöttük a négyzet csúcsaival az *ábrán* látható módon. Bizonyítsuk be, hogy $AT = TV$.

K. 558. Mely n pozitív egész számok esetén lesz $n^4 + n^2 + 1$ prímszám?

❄

Beküldési határidő: 2017. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1434–1440.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1434. Egy Münchenben megrendezett futóversenyen a versenyzők egyszerre rajtoltak és kijelölt pályán haladtak. A rajt után 30 perccel, a rajtvonalról utánuk indult egy elfogó autó, állandó sebességgel. Egy versenyző számára akkor ért véget a verseny, ha az elfogó autó utolérte. A női győztest 68 km-nél érte utol az autó, a férfi győztest pedig 1 óra 36 perccel később 92 km-nél. Milyen sebességgel haladt a két győztes futó és az elfogó autó, ha feltételezzük, hogy a futók sebessége is végig állandó volt?

C. 1435. Egy 2 egység oldalú négyzet két szomszédos oldala, mint átmérő fölé befelé félköröket rajzolunk. Határozzuk meg az egyik félkört és a négyzet oldalát belülről érintő, a másik félkört pedig kívülről érintő kör sugarát.

Javasolta: *Fülöp Dóra* (Pécs)

Feladatok mindenkinek

C. 1436. Nyolc piros és nyolc fehér színű egybevágó kiskockából kiválasztunk nyolcat, és ezekből egy nagy kockát rakunk össze. Hányféle színezésű nagy kockát kaphatunk? Két kocka különböző színezésű, ha forgatással nem vihetők egymásba.

Matlap (Kolozsvár)

C. 1437. Kilenc különböző egyenes mindegyike 2 : 3 arányban osztja egy négyzet területét. Igazoljuk, hogy az egyenesek között van három olyan, amelyek egy ponton mennek keresztül.

C. 1438. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^3=z^4$ egyenletnek nincs megoldása az x, y, z prímszámok körében.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1439. Milyen c érték esetén lesz az

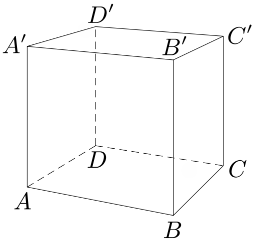
$$(x-5)^2+(y-1)^2=c,$$

$$(x-1)^2+(y-5)^2=c$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása?

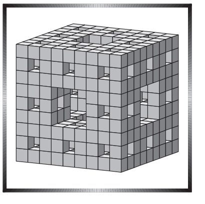
C. 1440. Az $ABCDA'B'C'D'$ egységkockában legyenek M és N a D' és B pontok merőleges vetületei a $B'D$ testátlóra. Határozzuk meg a $BND'M$ négyszög területét.

Matlap (Kolozsvár)



Beküldési határidő: 2017. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4894–4902.)

B. 4894. Hét rabló a zsákmányolt aranytallérokat úgy osztja el, hogy névsor szerint haladva annyit vesznek el, amennyi a még nem szétosztott aranytallérok számában a számjegyek összege. Két teljes kör után az arany elfogy. Mindenkinek ugyanannyi jutott, csak a vezérnek lett több. Hányadik volt a vezér a névsorban?

(*4 pont*) *Matlap* (Kolozsvár)

B. 4895. Bizonyítsuk be, hogy ha $n-1$ és $n+1$ egyaránt prímszámok, és $n>6$ egész szám, akkor $n^2(n^2+16)$ osztható 720-szal.

(*3 pont*)

B. 4896. Az $ABCD$ konvex négyszög oldalfelező pontjai legyenek A_1, B_1, C_1, D_1. Az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög oldalfelező pontjai legyenek A_2, B_2, C_2, D_2 és ezt folytatjuk tovább. Bizonyítsuk be, hogy ha $A_1B_1C_1D_1$ húrnégyszög, akkor $A_{2017}B_{2017}C_{2017}D_{2017}$ is húrnégyszög.

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 4897. Adott a síkon n darab pont. Mutassuk meg, hogy kiválasztható közülük három – mondjuk A, B és C – úgy, hogy $ABC\sphericalangle \leqslant 180°/n$.

(*4 pont*)

B. 4898. Bizonyítsuk be, hogy ha A egy pozitív egész számokból álló négyelemű halmaz, hogy bármely $a, b \in A$, $a \neq b$ esetén $ab + 13$ négyzetszám, akkor A elemei 4-gyel osztva 2-t adnak maradékul. (Lásd *Diofantoszi számhalmazok* című cikkünket a 391. oldalon.)

(*4 pont*) Javasolta: *Nyul Gábor* (Debrecen)

B. 4899. A G egyszerű síkgráf minden csúcsa harmadfokú, és tudjuk, hogy létezik G-nek olyan síkba rajzolása, ahol G élei egymást nem metsző egységnyi hosszú szakaszok. Mutassuk meg, hogy G-nek legalább 8 csúcsa van.

(*5 pont*)

B. 4900. Legyen K egy origóra szimmetrikus konvex lemez, e egy origóra illeszkedő egyenes, e' pedig egy tetszőleges, e-vel párhuzamos egyenes. Jelölje továbbá $\#H$ a H halmazba eső rácspontok számát. Igazoljuk, hogy $\#(K \cap e) + 1 \geqslant \#(K \cap e')$.

(*5 pont*)

B. 4901. Törpfalván járvány ütötte fel a fejét azt követően, hogy csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Az állapot megváltozása mindig éjszaka, alvás közben következik be. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha egy beteg törp egy nem immunis, egészséges törppel találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101. napon már biztosan vége van.

(*6 pont*) *BME VIK folklór*

B. 4902. Adott a síkon négy különböző hosszúságú, egymással párhuzamos szakasz, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 és A_4B_4. Tetszőleges $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ esetén legyen M_{ij} az A_iB_j és A_jB_i egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy az $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$ és $M_{14}M_{23}$ egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

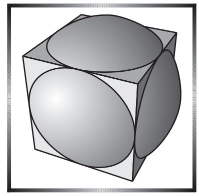
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2017. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (704–706.)



A. 704. Egy n hosszú oldalakkal rendelkező szabályos háromszög oldalainak n-edelőpontjain át behúztuk az oldalakkal párhuzamos egyenesek háromszögbe eső szakaszait. Tekintsük az így létrejövő $1+2+\ldots+(n+1)$ darab metszéspont alkotta pontrácsot. Melyek azok az n pozitív egészek, melyekre ez a pontrács olyan ponthármasokba partícionálható, melyek egy-egy egységnyi oldalú szabályos háromszög csúcsai?

Javasolta: *Alexander Gunning* (Cambridge, Egyesült Királyság)

A. 705. Legyen az ABC háromszög magasságpontja H, és legyen D egy, a csúcsoktól különböző pont a háromszög körülírt körén. Tegyük fel, hogy a BHD kör az AB egyenest $P\neq B$-ben, illetve a CHD kör az AC egyenest $Q\neq C$-ben metszi. Mutassuk meg, hogy a D pontot a körülírt körön mozgatva, D-nek PQ-ra vonatkozó tükörképe is egy rögzített körön mozog.

Javasolta: *Michael Ren* (Andover, Massachusetts, USA)

A. 706. Jelölje $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egészek halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ függvényt, melyre a következők teljesülnek:

- $f(mn)=f(m)f(n)$ minden $m,n\in\mathbb{Z}^+$-ra, illetve
- $f^{(n)}(n)=n$ minden $n\in\mathbb{Z}^+$-ra (azaz $f\Big(f\big(\ldots\big(f(n)\big)\ldots\big)\Big)=n$, ahol a zárójelpárok száma n).

(*Koreai feladat*)

Beküldési határidő: 2017. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 436 (É). Ha egy szabályos dobókockát feldobunk, leesés után ugyanakkora valószínűséggel lesz a kocka tetején az első hat pozitív egész szám valamelyikének megfelelő számú pont. Erre a továbbiakban arab számjegyekkel hivatkozunk: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ebben a feladatban szabályos dobókockával történő dobást szimulálunk, illetve az így kapott sorozatot elemezzük. Készítsünk programot *dobokocka* néven a következő feladatok megoldására.

1. Kérjünk be a felhasználótól egy tippet, majd szimuláljunk egy kockadobást szabályos dobókockával. Írassuk ki a képernyőre a felhasználó tippjét és a dobás eredményét is, majd tájékoztassuk a felhasználót az eredményről a következő formában: „Ön eltalálta." vagy „Ön nem találta el.". (Az ékezetmentes kiírás is elfogadott.)
2. Szimuláljunk egy $N(\leqslant 10\,000)$ dobásból álló kísérleti dobássorozatot, és az eredményt tároljuk el egy megfelelő típusú változóban. Az N értékét a felhasználótól kérjük be. Írassuk ki a dobássorozatot (elválasztójelek nélkül) a `kiserlet.txt` szöveges állomány első sorába is, ezt egy szóközzel elválasztva kövesse N értéke. A továbbiakban az így kapott sorozatot elemezzük.
3. Számoljuk meg, hogy a kísérlet során hányszor dobtuk az egyes számokat. Írassuk ki relatív gyakoriságukat két tizedesjegy pontossággal a `kiserlet.txt` fájl második sorába, egy-egy szóközzel elválasztva (pl. 1-16,51% 2-17,23% ...).
4. Hányszor fordult elő a kísérlet során, hogy egymás után pontosan két hatost dobtunk? Az eredményt írassuk a `kiserlet.txt` fájl harmadik sorába.
5. Hányszor fordult elő a kísérlet során, hogy a kocka két egymást követő dobás esetén két egymással szemben lévő oldalára esett? (Közismert, hogy a szabályos dobókocka szemben lévő oldalain szereplő számok összege 7.) A választ írassuk a `kiserlet.txt` fájl 4. sorába. (Például a 21612 sorozat kettőnek számít.)
6. Előfordult-e a kísérlet során, hogy hat egymást követő dobás során mind a hat lehetséges értékre sor került? Írassuk a választ (Igen vagy Nem) a `kiserlet.txt` fájl 5. sorába. Ha a válasz Igen, adjuk meg egy ilyen sorozat kezdetének a helyét is az Igen után egy szóközzel elválasztva. (A minta tagjainak számozását eggyel kezdjük.)
7. Előfordult-e a kísérlet során legalább M tagú palindrom? (Olyan részsorozat, amely elölről hátulra és hátulról előre olvasva megegyezik, például: 2345432.) Az M értékét kérjük be a felhasználótól. Írjuk a választ és M értékét egy szóközzel elválasztva a `kiserlet.txt` fájl 6. sorába (például: Nem 12). Ha a válasz Igen, adjuk meg egy ilyen sorozat kezdetének a helyét is egy szóközzel elválasztva.
8. Milyen hosszú volt a leghosszabb, azonos számjegyekből álló sorozat? Írassuk ki a választ a `kiserlet.txt` fájl 7. sorába, továbbá egy szóközzel elválasztva írassuk mellé egy ilyen részsorozat első tagjának helyét is.

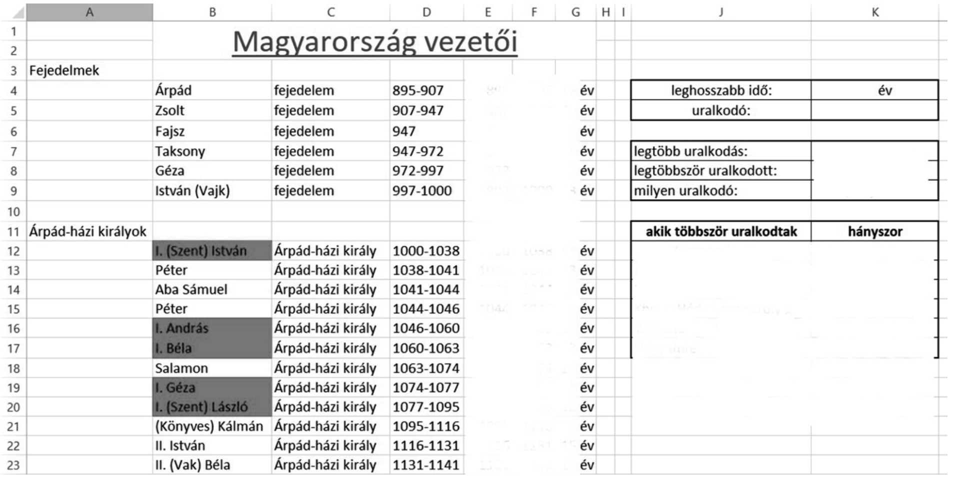
Beküldendő egy `i436.zip` tömörített állományban a program forráskódja és dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 437. Magyarország fejedelmeit, királyait, uralkodóit, államfőit és miniszterelnökeit sorolja fel a MEK kisokos*. A feladat ezen adatok feldolgozása lesz táblázatkezelő program segítségével. A táblázat tartalmazza, melyik házból való uralkodóról van szó, vagy fejedelemről, államfőről, esetleg miniszterelnökről, a nevet, az uralkodóházat vagy egyéb megnevezést és hogy mettől meddig tartotta fenn a tisztséget. Vannak olyan személyek, akik megszakításokkal, de többször voltak hivatalban, ők többször szerepelnek a listában. A táblázatban szereplő utolsó államfő Göncz Árpád, utolsó miniszterelnök pedig Horn Gyula, egészítsük ki a táblázatot napjainkig.

1. Töltsük be a `magyarvezetok.txt` szövegfájlt a táblázatkezelő egy munkalapjára az A1-es cellától kezdődően. Munkánkat `i437` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Az E oszlop celláiban írassuk ki, mikor kezdte meg az uralkodását, mikor lépett hivatalba az adott személy. Másolható képletet használjunk és ügyeljünk arra, hogy vannak üres sorok a táblázatban.
3. Az F oszlop celláiba írassuk ki, meddig uralkodott, volt hivatalban az éppen aktuális ciklusában az adott személy.
4. A G oszlopban számítsuk ki, hány évig volt hivatalban az adott személy összesen élete során.
5. A minta alapján számítsuk ki a K oszlop adott celláit! K4-ben adjuk meg, hány évig volt vezető a leghosszabb időt ott töltő személy, a K5-ben pedig, hogy ki volt az.
6. A K7-es cellában adjuk meg ki volt, aki legtöbbször töltött be vezetői tisztséget, a K8-ba ki volt ez, a K9-be pedig, hogy milyen hivatalt töltött be. Ha több azonos is van, elég az elsőt kiírni.
7. A I12-es cellától lefelé gyűjtsük ki azokat a királyokat, vezetőket, akik többször voltak hivatalban, mellé, hogy összesen hányszor.
8. Feltételes formázással a B oszlopban azoknak az uralkodóknak a nevét piros háttérszínnel emeljük ki, akiknek a keresztneve először szerepel az ország történetében. Például: I. Béla.
9. Hasonlítsuk össze diagram segítségével a Habsburg-ház és a Habsburg–Lotaringiai-ház uralkodóinak trónon töltött évei számát, amelyből kiderül, mely ház uralkodói töltöttek több évet összesen a trónon.
10. Az első sorban lévő „Magyarország vezetői” cím link legyen, és a `http://mek.niif.hu/00000/00056/html/240.htm` oldalra mutasson.

Beküldendő egy tömörített `i437.zip` állományban a megoldást adó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja a felhasznált táblázatkelő nevét és verzióját.

*Forrás: `http://mek.niif.hu/00000/00056/html/240.htm`, utolsó letöltés: 2017-09-20.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		Magyarország vezetői									
3	Fejedelmek										
4		Árpád	fejedelem	895-907			év			leghosszabb idő:	év
5		Zsolt	fejedelem	907-947			év			uralkodó:	
6		Fajsz	fejedelem	947			év				
7		Taksony	fejedelem	947-972			év			legtöbb uralkodás:	
8		Géza	fejedelem	972-997			év			legtöbbször uralkodott:	
9		István (Vajk)	fejedelem	997-1000			év			milyen uralkodó:	
10											
11	Árpád-házi királyok									akik többször uralkodtak	hányszor
12		I. (Szent) István	Árpád-házi király	1000-1038			év				
13		Péter	Árpád-házi király	1038-1041			év				
14		Aba Sámuel	Árpád-házi király	1041-1044			év				
15		Péter	Árpád-házi király	1044-1046			év				
16		I. András	Árpád-házi király	1046-1060			év				
17		I. Béla	Árpád-házi király	1060-1063			év				
18		Salamon	Árpád-házi király	1063-1074			év				
19		I. Géza	Árpád-házi király	1074-1077			év				
20		I. (Szent) László	Árpád-házi király	1077-1095			év				
21		(Könyves) Kálmán	Árpád-házi király	1095-1116			év				
22		II. István	Árpád-házi király	1116-1131			év				
23		II. (Vak) Béla	Árpád-házi király	1131-1141			év				

I. 438. Készítsünk táblázatkezelő alkalmazásban táblázatot vagy írjunk programot, amely egy kavicsot terítő robot munkáját vezérli.

A robot egy 10×10 cellás négyzetrácson mozoghat a szövegesen megadott utasítások szerint. A robot mozgása a lehető legegyszerűbb, mert egyszerre előre, hátra, illetve jobbra vagy balra (E, H, J és B) egy egységet tud lépni. Amikor a robot új cellába lép, köveket vesz fel, ha a kövek száma az adott cellában 1-nél több, és köveket tesz le, ha van nála kő, a cellában pedig éppen nincs. A robot a bal felső sarok cellájából indul, felfelé néz és nincs nála kavics. Működése során először lép és utána változtathatja a cellában a kavicsok számát. A vezérlés utasításainak száma legfeljebb 100.

A 10×10 cellás négyzetrács celláinak kavicsszáma és a robotot vezérlő utasítássor áll rendelkezésre a `terep.txt` állományban. Vagy töltsük be a táblázatkezelőbe az A1-es cellától kezdődően, vagy a program standard bemenetén adjuk meg a szóközökkel tagolt `terep.txt` állományt. A megoldás során a forrásadatok módosulása esetén is helyes eredményt kell kapnunk.

A táblázatkezelő az L1-es cellában, vagy a program a standard kimeneten jelenítse meg, hogy a vezérlés befejezése után hány kő van a robotnál.

Példa a bemenetre: **(amely 5×5 cellás a tömörség kedvéért)**	**Kimenet**
2 1 2 0 1 **0 2 0 3** 1 2 3 0 **0** 2 1 1 2 **2** 3 3 2 1 1 0 HJJJHHE	1

Beküldendő egy tömörített `i438.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, vagy a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja a táblázatkezelő alkalmazás nevét és verziószámát, illetve azt, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

A megoldáshoz szükséges letölthető állomány: `terep.txt`

I/S. 20. Egy elektromos terepjáró autóval szeretnénk eljutni egy dimbes-dombos területen az egyik helyről a másikra. A területet gondolatban $N \times M$ egyforma négyzetre osztjuk, és minden egyes négyzethez egy magassági adatot rendelünk. A négyzetek számozása a bal felső saroktól indul jobbra, illetve lefelé. Az autó útját úgy modellezzük, mintha egy-egy oldalukkal egymással érintkező négyzeteken haladna keresztül. Az egyik négyzetről a másikra történő mozgáskor az autó 1 egységnyit meríti az akkumulátorát, ha a két négyzet azonos magasságban van. Alacsonyabb magasságban lévő négyzetről magasabban lévő négyzetre mozgáskor a szintkülönbség kétszerese plusz 1 egységnyit merül az akkumulátor. Amikor az autó lefelé halad, akkor a szintkülönbség számértékének megfelelő egységnyit töltődik az akkumulátor, miközben 1 egységet merül. Az autó indulási pontja a térkép (s_i, s_j) négyzete, a cél a térkép (c_i, c_j) négyzete.

Kérdés, hogy legkevesebb hány egységnyi töltéssel kell rendelkeznie az autónak a kiindulási négyzetben, hogy eljusson a cél négyzetbe úgy, hogy közben egyszer sem kell külső energiával tölteni, csupán a szintkülönbség csökkenésekor kap energiát. Az autó nem tud továbbmenni, ha egy négyzetbe érve nem pozitív az energiája, ezért az csak a cél négyzetben lehet 0.

A feladatot megoldó program olvassa be a standard bemenetről a térképhez tartozó N és M értékét, majd a következő N sor mindegyikében M pozitív egész $h_{i,j}$ számot, melyek a térkép i-edik sorában és j-edik oszlopában lévő négyzet szintértékét adják, illetve a következő sorban az induló és cél négyzetek adatait: s_i, s_j, c_i, c_j. A program írja a szabványos kimenetre a legkisebb akkumulátor töltöttséget, amellyel az autó a kiindulási helyről a célba érhet.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
4 5 1 2 4 3 4 1 1 3 5 2 1 3 2 3 4 1 2 1 1 3 3 2 1 4	6

Korlátok: $1 \leqslant N, M \leqslant 100$, $1 \leqslant h_{i,j} \leqslant 1000$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb N és M értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `is20.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

S. 119. Ifjú hercegünk egy hegyi ösvényen készül átkelni. Az ösvény mentén manók állnak lesben, akikkel semmiképp nem jó találkozni. Szerencsére a manók mindegyike olyan, hogy egy bizonyos színt nem lát. Hercegünk ezért varratott magának mindegyik színből egy-egy köpenyt, így ha a megfelelő manó előtt elhaladva azt viseli, akkor a manó nem veszi észre. A köpenyek mindegyike karra terítve is könnyen vihető, és emellett tetszőleges számú köpeny – akár az összes – egymásra fölvéve hordható. Ha a herceg már visel egy vagy több köpenyt, akkor a következőt azok fölé tudja venni. Vetkőzéskor mindig a legfelső köpenyt tudja levenni, tehát ha szüksége van egy most nem legfelül viselt köpenyre, akkor az összes fölötte lévőt le kell vennie.

A herceg azt is megtudta, hogy milyen sorrendben következnek az egyes manók az ösvény mentén. Mivel nem szeretne sokszor öltözni, ezért szeretné tudni, hogy hogyan juthat túl a lehető legkevesebb számú öltözéssel az ösvényen. Az út megkezdése előtt nem viseli egyik köpenyt sem, és az ösvény után sem, tehát leveszi, ami még rajta van. Minden köpeny föl- vagy levétele egy öltözésnek számít.

A feladatot megoldó program olvassa be a standard bemenetről a manók N számát, illetve az általuk nem látott színek Z számát, majd a következő sorból N számú pozitív egészet: az i-edik szám az i-edik manó által nem látott szín m_i sorszáma. A program írja a standard kimenetre az ösvényen való áthaladáshoz szükséges legkevesebb öltözések számát.

Példák:

Bemenet	**Kimenet**
6 4 1 2 2 3 4 3	8
10 5 1 3 2 3 2 1 3 2 2 1	12

Korlátok: $1 \leqslant Z \leqslant N \leqslant 30$, $1 \leqslant m_i \leqslant Z$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb N értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `s119.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2017. november 10.

❄

Gyakorló feladatsor emelt szintű fizika érettségire

Tesztfeladatok*

1. Péter és Pál egy budapesti kollégium lakói. Arról vitatkoznak, hogy az íróasztalukon nyugvó fizikakönyv sebességének nagysága éjjel vagy nappal nagyobb-e az állócsillagokhoz rögzített koordináta-rendszerben. A felmerült válaszok közül melyik a *helyes?*

A) A könyv se éjjel, se nappal nem mozog.

B) Nappal a könyv gyorsabban mozog.

C) Éjjel a könyv gyorsabban mozog.

D) A válasz attól függ, hogy nyár van vagy tél.

2. Tegyük fel, hogy egy autó úgy fékez, hogy az autóra állandó súrlódási erő hat. A következő állítások közül melyik a *helyes?*

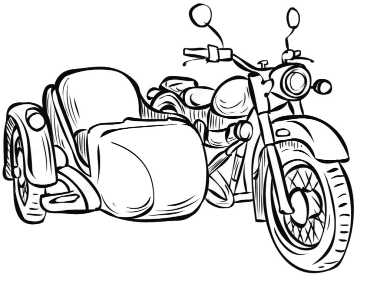
A) Az autó mozgási energiája időben egyenletesen csökken.

B) Az autó megállásáig megtett út arányos az autó kezdeti sebességével.

C) Az autó megállásáig megtett út arányos az autó kezdeti sebességének négyzetével.

D) Az autó mozgási energiája fordítottan arányos a fékezéstől eltelt idővel.

3. Az európai kontinensen, így hazánkban is jobb oldali közlekedés van, ezért az oldalkocsis motorkerékpárokon az oldalkocsi a vezetőhöz képest a jobb oldalon helyezkedik el. Egy ilyen oldalkocsis motorkerékpár nagy sebességgel vesz be egy kanyart vízszintes felületű úton. Mikor emelkedhet fel az oldalkocsi kereke?



A) Csak balkanyarkor emelkedhet fel.

B) Csak jobbkanyarkor emelkedhet fel.

C) Balkanyarkor is, jobbkanyarkor is felemelkedhet az oldalkocsi kereke.

D) Az oldalkocsi kereke sohasem emelkedhet fel.

4. Egy toronyból egyszerre eldobunk négy golyót; kettőt vízszintesen egymással ellentétes irányban, kettőt pedig függőlegesen, szintén egymással ellentétes irányban. Mind a négy golyó kezdősebességének nagysága megegyezik. A közegellenállás nem számottevő. Az indulás után valamekkora t idővel még mind a négy golyó a levegőben van. A vízszintesen vagy a függőlegesen elhajított párok között nagyobb-e a távolság ebben az időpillanatban?

A) A vízszintesen elhajítottak között.

B) A függőlegesen elhajítottak között.

*A válaszok közül minden esetben pontosan egy a helyes.

C) Mindkét pár között ugyanakkora a távolság.
D) Nincs elegendő adat megadva a megoldáshoz.

5. Egy matematikai ingát 90°-nál kisebb szöggel kitérítünk, majd elengedünk. Lehet-e az ingatest gyorsulása vízszintes?

A) Nem, ingamozgáskor a gyorsulásvektor soha nem lesz vízszintes irányú.
B) Csak akkor, ha a kitérítés legalább 45°-os.
C) Igen, bármekkora szöggel is térítjük ki az ingát.
D) Csak akkor lehet a gyorsulás vízszintes, ha az inga 9,81 m-nél hosszabb.

6. A Jupiter egyik holdja a *Ganümédész* (latinul: Ganymedes). Csillagászati mérések alapján jól ismerjük a Ganümédész pályaméreteit és a Jupiter körüli keringési idejét. Ezeknek a csillagászati adatoknak a birtokában, valamint az univerzális gravitációs törvény ismeretében lehetséges-e meghatároznunk a Jupiter, illetve a Ganümédész tömegét?

A) Igen, mindkét tömeg meghatározható.
B) Csak a Ganümédész tömege határozható meg, a Jupiteré nem.
C) Csak a Jupiter tömege határozható meg, a Ganümédészé nem.
D) Egyik tömeg sem határozható meg.

7. Egy zárt üvegcső folyadékkal van tele. Az üvegcsövet vízszintes síkban, az egyik végén átmenő függőleges tengely körül egyenletesen forgatjuk. A cső melyik végénél *nagyobb* a folyadék nyomása?

A) A forgástengely közelében a folyadék sebessége elhanyagolhatóan kicsi, a nyomás tehát – a Bernoulli-törvény értelmében – ott nagyobb.

B) A cső külső végénél nagyobb a nyomás, mert a folyadék nekinyomódik a cső végének.

C) Csak a folyadék sűrűségének ismeretében dönthető el a kérdés.
D) Csak a forgás szögsebességének ismeretében dönthető el a kérdés.

8. Egy fémből készült rugót összenyomunk, és összenyomott helyzetében egy saválló, műanyag szállal rögzítjük. A rugót erős savba helyezzük, amiben a rugó feloldódik. Hová tűnik a rugóban tárolt rugalmas energia?

A) A sav egy picit melegebb lesz ahhoz képest, mintha nem összenyomott rugót oldottunk volna fel benne.

B) Kémiai folyamatok esetén nem érvényes a fizikában tanult energiamegmaradás.

C) A rögzítő műanyag szál veszi át a rugalmas energiát.

D) A rugóban tárolt energia az oldódást kísérő erős sistergés alatt hanghullámok formájában kisugárzódik.

9. A korszerű rozsdamentes lábosok alja réteges szerkezetű: a külső és a belső rozsdamentes acél réteg között egy másféle fémből készült réteg is található. Milyen fémből készül ez a közbülső réteg?

A) Alumíniumból, mert könnyű és jó a hővezető képessége, tehát egyenletes belső hőmérsékletet biztosít.

B) Ólomból, mert a nagy sűrűsége nagy hőkapacitást jelent, tehát az edény jobban tartja a hőt.

C) Titánból, mert könnyű és erős, tehát jobb mechanikai jellemzőket biztosít a lábosnak.

D) Volfrámból, mert nagyon magas az olvadáspontja, tehát még akkor sem lyukad ki a lábos, ha véletlenül a tűzhelyen felejtjük.

10. Két egyforma ceruzaelemet egyszer sorosan, máskor párhuzamosan kapcsolunk. Mikor keletkezik időegységenként több hő, ha a sorosan vagy ha a párhuzamosan kapcsolt összeállítást zárjuk rövidre?

A) Ha sorosan kapcsoljuk őket.

B) Ha párhuzamosan kapcsoljuk őket.

C) Azonos mennyiségű hő keletkezik mindkét esetben.

D) Mindhárom válasz helyes lehet attól függően, hogy a ceruzaelemekben milyen anyagi minőségű elektrolit található.

11. Melyik állítás *igaz* egy fémes vezetőről?

A) Fémes vezetőnek nem lehet eredő töltése.

B) Ha egy fémes vezetőnek eredő töltése van, akkor az egyenletesen oszlik el a térfogatában.

C) Ha egy fémes vezetőnek eredő töltése van, akkor az a vezető felületén oszlik el.

D) Egy fémes vezető elektrosztatikus potenciálja mindig nulla.

12. Előfordulhat-e, hogy egy telep kapocsfeszültsége nagyobb, mint az elektromotoros ereje?

A) Nem.

B) Csak rövidzár esetén egy pillanatra.

C) Csak abban a pillanatban, ha szakadást hozunk létre.

D) Ha a telepet (tölthető akkumulátort) töltjük, akkor megvalósul a leírt helyzet.

13. Egy függőleges rézcsőben elejtünk egy (benne épphogy elférő) erős mágnest, majd a kísérletet megismételjük egy, a mágnessel azonos méretű alumíniumdarabbal. Ha a légellenállás elhanyagolható, akkor melyik tárgy esik le rövidebb idő alatt?

A) A mágnes, mert nehezebb az alumíniumnál.

B) Egyforma idő alatt érnek le, mert mindkettő szabadesést végez.

C) Az alumínium, mert a mágnes a mozgását fékező hatású örvényáramokat hoz létre a rézcsőben.

D) Attól függ, hogy a mágnes melyik pólusa áll lefelé, mert a Föld mágneses tere taszíthatja és vonzhatja is a mágnest.

14. Melyik radioaktív bomlási folyamat *növeli* a rendszámot?

A) A β^--bomlás.

B) A β^+-bomlás.

C) Az α-bomlás.

D) A γ-sugárzással járó folyamat.

15. Folytassuk a félbehagyott mondatot úgy, hogy az állítás *igaz* legyen! A moderátor szerepe az atomreaktorban az, hogy

A) a keletkezett energiát elvezesse;

B) a keletkezett neutronok egy részét elnyelje;

C) a keletkezett gyors neutronokat lelassítsa;

D) a keletkezett radioaktív anyagokat semlegesítse.

Számolásos feladatok

1. Ugyanabból a pontból, egyszerre két egyforma tömegű testet hajítunk el vízszintesen, egymással ellentétes irányban. Az egyik test kezdősebessége 3 m/s, a másiké 4 m/s. (A légellenállás elhanyagolható.)

a) Mekkora szöget zárnak be egymással a sebességvektorok 1 másodperc múlva?

b) Mekkora a két test mozgási energiájának aránya ebben a pillanatban?

c) Milyen messze volt egymástól a két test, amikor sebességvektoraik éppen derékszöget zártak be egymással?

2. Egy vékony, függőleges szigetelő szál felső vége rögzített, az alsó végéhez erősített, kis méretű test elektromos töltése $Q = 100$ nC. A szálon súrlódásmentesen mozoghat egy 0,1 g tömegű, 10 nC töltésű, kis méretű gyöngy.

a) Egyensúlyi helyzetben mekkora lesz a közöttük lévő távolság?

b) Ha kezdetben a gyöngyöt a rögzített test felett 27 cm távolságban tartjuk, majd elengedjük, akkor milyen irányban és mekkora gyorsulással indul el a gyöngy?

3. Egy utcai kereszteződésben nagy méretű domború tükör segíti az autósokat abban, hogy jobban láthassák a közeledő járműveket. Ha egy gépkocsi 45 méterre van a tükörtől, akkor a tükörben háromszoros kicsinyítésben látjuk a képét.

a) Mekkora a gömbtükör görbületi sugara?

b) Hány méterre van a gépkocsi a tükörtől, ha a tükörképe csak kétszeres kicsinyítésű?

4. Az urán 235-ös izotópjának felezési ideje 0,71 milliárd év.

a) Hányszor több 235-ös urán izotóp volt a Földön 4,5 milliárd évvel ezelőtt, amikor a Föld kialakult?

b) Mekkora a ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ atommag α-bomlását követően a reakciótermékek összesített teljes mozgási energiája?

c) Mekkora a ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ atommag bomlását követően az α-részecske mozgási energiája?

Adatok: $m\big({}^{235}_{92}\mathrm{U}\big) = 235{,}043\,92$ u, $m\big({}^{231}_{90}\mathrm{Th}\big) = 231{,}036\,30$ u, $m\big({}^{4}_{2}\mathrm{He}\big) = 4{,}002\,603$ u, az atomi tömegegység: $\mathrm{u} = 1{,}660\,5656 \cdot 10^{-27}$ kg.

Honyek Gyula
Budapest

Nyári matematika- és fizikatábor 2017.
Dombóvár

Egyéves kihagyás után, 2017. június 25. és július 1. között újra megrendezésre került a KöMaL nyári fizikatábora Dombóvár-Gunaras kempingjében. Ezúttal azonban kibővült a tábor a matematikai olimpiákra (IMO és MEMO) komolyabban készülő csapat tagjaival is. A táborozók közül 18 diák Erdélyből, Felvidékről, illetve Délvidékről érkezett. Ők tanári ajánlásokkal, ismertebb versenyeredményekkel bizonyították, hogy helyük van a rendezvényen. A többiek a KöMaL fizika pontversenyeiben nyújtott teljesítményük alapján kerültek be a 32 fős fizikus keretbe.

A tábor szervezője és vezetője *Gnädig Péter,* a KöMaL fizikus szerkesztője, a tábor matematikus koordinátora pedig *Dobos Sándor,* a magyar IMO csapat helyettes vezetője volt. Mellettük fizikából *Részeg Anna, Vladár Károly, Szász Krisztián* és *Baranyai Klára* (a KöMaL munkatársai, feladatjavítói) segédkeztek a két egyetemi hallgató KöMaL feladatjavítóval, *Asztalos Bogdánnal* és *Olosz Balázzsal* kiegészülve. A matematikusok felkészítésében *Kiss Viktor* (Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet) és *Lenger Dániel* (MEMO csapat vezetője) is meghatározó szerepet vállaltak. A táborban folyó sportéletet *Vonyó Veronika* egyetemi hallgató is segítette.

A tábort a Nemzeti Kulturális Alap pályázati támogatása (NTP-TÁB-17-0043) tette lehetővé. A pénzügyeket és a szervezés jelentős részét *Nagyné Szokol Ágnes,* a KöMaL projektvezetője intézte.

Az alábbiakban három rövid beszámolóval idézzük fel az utóbbi évek egyik legjobban sikerült, remek hangulatú nyári diáktáborának légkörét. Az első a tábor matematikus felét idézi fel, a második a fizikusok élményeit mutatja be, míg az utolsóban arról olvashatunk, hogyan élték meg ezt a hetet egy határon túli iskolából érkező diákok. Nehéz lenne eldönteni, hogy kik érezték jobban magukat ebben az – immár Kárpát-medencei rendezvénnyé terebélyesedett – KöMaL-táborban.

A szervezők

Matekolimpiai edzőtábor Dombóváron

A matek diákolimpiára komolyabban készülő diákok már ismerik egymást. Látják egymás nevét a KöMaL-ban, találkoznak olimpiai szakkörön, versenyeken. A 2016/17-es tanévben az utolsó olimpiai válogatót Kecskeméten szervezték a Mategye Alapítványnak köszönhetően. Ott az IMO, MEMO csapatok kialakultak, emellett körvonalazódott az utánpótlás gerincét adó társaság is. Ez a 20 diák kapott meghívást a június végén Dombóváron rendezett olimpiai edzőtáborba.

A matematika szakmai program reggelente egyéni feladatmegoldással indult, ami után a leírt megoldásokat le kellett adni. Ezeket Kiss Viktor, a Matematikai Kutatóintézet fiatal kutatója és Lenger Dániel, az ELTE doktorandusz hallgatója, a MEMO csapat vezetője javították, értékelték. Ezt követően csapatban lehetett dolgozni, majd közös megbeszélésen néztük át a megoldásokat. Ezeket az alkalmakat az említett két vezető, vagy Dobos Sándor, a budapesti Fazekas Gimnázium tanára, az IMO csapat helyettes vezetője irányította. A kiadott feladatok megbeszélésére még délután is volt egy hosszabb, közös alkalom. A résztvevő diákok román, belorusz és iráni versenyek, válogatók feladataiból hoztak magukkal 3-3 példát. Ezeket témák és nehézség szerint válogatott feladatsorokba rendezve dolgoztuk fel a héten.

A táborban a matekosok a KöMaL fizikatáborán résztvevő diákokkal együtt voltak. Így esti előadásokon, szabadidős programokon lehetett beszélgetni, barátkozni, játszani. A tábor melletti fürdőben az egyik délután kiadós pancsolásra, úszásra nyílt lehetőség. A remek csúszdáknak és a jó társaságnak köszönhetően ez is szuper programnak bizonyult.

Reméljük jövőre is lesz hasonló tábor, ahol lehetőség van a komoly munkára és a vidám kikapcsolódásra egyaránt. Nagy ajándék, hogy a táborban az ország különböző helyeiről érkezett, közös érdeklődésű társaság jobban összekovácsolódhat.

Dobos Sándor
matematikus táborvezető

Fizika a KöMaL nyári táborában

A 9–11. évfolyamos résztvevők 8 négyfős csapatot alkottak úgy, hogy lehetőség szerint két-két határon túli magyar szerepeljen a csapatokban, és minden évfolyam képviseltesse magát egy-egy csapaton belül.

Az érkezés napján, még aznap este meg is alakultak a csapatok, melyek a következő héten hétfőtől péntekig vállvetve küzdöttek a szebbnél szebb és munkásabbnál munkásabb, többé-kevésbé szellemes mérési, becslési és elméleti feladatokkal. Sok feladatmegoldási stratégia adódott: voltak, akik végig közösen oldottak meg minden feladatot, voltak, akik szétosztották egymás közt valamennyi problémát. A mérési feladatot jellemzően a többitől külön, együtt oldottuk meg, itt kiemelkedően fontos volt a jó csapatmunka. Közvetlenül a reggeli után kaptuk meg a napi feladatokat, és azokon egészen a vacsoráig dolgozhattunk. Ennek ellenére nem mondhatjuk, hogy az idő mindig maradéktalanul elég volt egy-egy csapat számára. Helyes időbeosztás és a precíz munka nélkül senkinek nem volt esélye jó eredmény elérésére.

A pontverseny izgalmasan alakult, habár az első helyezett csapat egyértelműen kiemelkedett a mezőnyből, így a többieknek inkább a második hely megszerzése lebegett a szemük előtt. A versenyt – az előző táborokhoz hasonlóan – egy „konstrukciós verseny” zárta, amelyben a hét során felhasznált piszkozatpapírokból kellett (más anyagok és ragasztó felhasználása nélkül) a lehető legnehezebben széttszakítható „kötelet” készíteni. Végül következett a táborzárás: kihirdették a végeredményt, és mindenki valamilyen kisebb jutalomban – csoki, könyv, folyóirat – részesült.

Szerencsére a mérés és feladatmegoldás mellett jutott idő a szórakozásra és az ismerkedésre is. Bár szinte mind különböző iskolákból, különböző városokból, sőt különböző országokból érkeztünk, nem kellett sok idő, hogy megtaláljuk a közös hangot.

Néha szünetet tartottunk a feladatmegoldásban, és egy-másfél óráig társasjátékozással, esetleg sportolással múlattuk az időt. Esténként, a programok befejezte után pedig az ismerkedésre helyeződött a hangsúly: mi leginkább az egyik Romániából érkezett „csapattal" barátkoztunk össze, sok érdekességet megtudtunk róluk és országukról. Ennek eredményeképp a tábor végére igazi közösséggé váltunk, a közös feladatmegoldás és közös beszélgetések, játékok összekovácsoltak minket.

Mindennek a tetejébe kiváló előadásokat is hallhattunk minden este elismert előadóktól. Ezek többféle témát vettek górcső alá. Közülük a legérdekesebb talán a gravitációs hullámok felfedezéséről, kutatásáról szóló előadás volt (előadó: *Frei Zsolt,* az ELTE Atomfizikai Tanszékének vezetője), és Olosz Balázs saját készítésű, a Föld elektrosztatikus terének mérésére alkalmas szerkezete is sokaknak elnyerte a tetszését.

Csütörtökön meglátogattuk a helyi strandot is (az aznapi mérési feladat is ehhez kapcsolódott: víz alá nyomott strandlabda repülési magasságát kellett mérni a lenyomás mélységének függvényében), pénteken pedig kitöltöttük a tábori totót.

Összességében remek hetet töltöttünk Gunarason, amiért köszönet jár a szervezőknek. Titeket is biztatunk, hogy oldjátok a KöMaL P és M feladatait, amiért ez a csodálatos tábor lehet a „ jutalmatok"!

Kondákor Márk, Fajszi Bulcsú
Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

Miért éri meg KöMaL feladatokat megoldani?

A tavalyi tanév elején hatalmas lelkesedéssel fogtunk a KöMaL fizika feladatainak megoldásához. Mivel egész évben kitartóan küldtük be a feladatokat, ezért lehetőségünk nyílt arra, hogy magunkat nyári körülmények között is hasonló módon próbára tegyük – azaz, hogy részt vegyünk a Dombóvár-Gunarasfürdőn megrendezett KöMaL fizikatáborban.

Mint ahogy a pontversenyben való részvétel, úgy a tábor is áldozathozatallal járt számunkra; tudniillik egybeesett az évvégi osztálykirándulásokkal. Az előbbire esett a választásunk – nem is bántuk meg!

Június végén szembesültünk az első megpróbáltatással, nevezetesen, hogy eljussunk a tábor helyszínére. Révkomáromból indultunk, és mire Gunarasra érkeztünk, már a közlekedési eszközök számos fajtáját próbálhattuk ki, a vonatpótló busztól kezdve a személygépkocsiig. Nem minden érkezett meg maradéktalanul – egy szürke kockás kalapról azóta sem hallottunk ...

A táborban rögtön egy kiadós eső fogadott bennünket, de a fénytörés vizsgálata helyett inkább bevonultunk a megnyitóra. Négyfős csapatokra oszlottunk, amelyek szigorú szervezési feltétételeit többé-kevésbé sikerült is betartani. Minden csapatba került határon túli diák is, így alkalmunk nyílt – kötelező alapon? – egymással ismerkedni. A programon túl éjszakánként beszélgettünk, összeültünk egy közös társasjátékos estére; valamint – ha az égbolt engedte – egy kicsit csillagászkodtunk.

Másnap kezdetét vette a sokunk számára már megszokott stílusban zajló csapatverseny. Mindennap több feladatot kaptunk, melyeket szétoszthattunk a csapatunk tagjai között. Gyakran együttes erővel kellett megoldanunk a problémákat, melyek tartalmaztak becslési és mérési feladatokat is. Meglepően érdekfeszítőnek bizonyult megtippelni egy fa leveleinek számát (rájöttünk, nem kellett volna százas pontossággal megadni), valamint megsaccolni, mennyivel többet fordul a vonat kereke télen, mint nyáron (a MÁV-infovonal segítségül hívásával). A gunarasi strandon (ahol nemcsak úsztunk) megmértük egy műanyag flakon felugrási magasságát, lehetőség szerint vigyázva arra, hogy ne verjük ki a társaink szemét, ez ugyanis ellehetetlenítette volna a „pontos” érték leolvasását. A gyakorlati és elméleti tudásunk egyesítésének eredményét egy papírkötél tükrözte, aminek a kijavított és archivált dolgozataink (bocsánat, piszkozataink) szolgáltattak alapanyagot. Volt, kinek kreálmányával a szakítópróbát végző egykarú emelő hamar végzett, de akadt olyan hágcsó is, amin akár két megtermett középiskolás diák is biztonságosan függhetett.

Esténként, a sok számolás-mérés-becslés után, pihenésképp, egy-egy elgondolkodtató előadást hallgattunk végig. Érdekes ismeretekkel gazdagodtunk a szupernehéz fekete lyukakról (előadó: *Kocsis Bence,* ELTE Atomfizikai Tanszékén alapított kutatócsoport vezetője, régi KöMaL-megoldó és -táborozó), valamint a megújuló energiaforrásokról és a BME villamosmérnök hallgatók gondjairól, sikerélményeiről (előadó: *Kazsóki Attila,* BME és MTA EK). Bőven nyílt alkalmunk kérdezni is.

Sajnos, az utolsó esti tábortűz helyett csupán a lelkünket melengethettük a nem várt csapadék miatt. Ez azonban egy cseppet sem keserített el minket. Az eső nem tudta elmosni az egy hét alatt összegyűlt lelkesedést, azt egy végigbeszélgetett éjszaka után magunkkal vittük egészen hazáig ...

Molnár Mátyás, Morvai Orsolya, Pszota Máté
Révkomárom, Selye János Gimnázium

Támogatók:

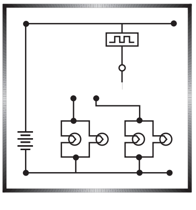
Emberi Erőforrások Minisztériuma

Nemzeti Tehetség Program

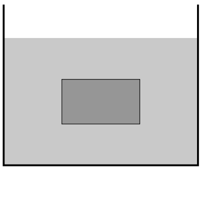
mta EK

WIGNER

Ri



Fizika gyakorlat megoldása



G. 597. *Egy folyadékkal telt edényben egy tömör kocka lebeg. Az egész rendszert lassan melegíteni kezdjük. Kapkó Dóra azt mondja, hogy a kocka lassan le fog süllyedni. Hirte Lenke azonnal rávágja, hogy épp az ellenkezője igaz, fel fog emelkedni. Kinek lehet igaza?*

(*3 pont*)

Megoldás. Kezdetben a kocka sűrűsége megegyezik a folyadék sűrűségével. A kocka további mozgását a hőtágulás mértéke fogja befolyásolni.

Ha a kocka hőtágulása nagyobb, mint a folyadéké, akkor a melegítés hatására a sűrűsége kisebb lesz, mint a folyadék sűrűsége, tehát úszni fog. Ekkor Lenkének lenne igaza.

Ha viszont a kocka hőtágulása kisebb, mint a folyadéké, akkor a sűrűsége nagyobb lesz a folyadék sűrűségénél, így le fog süllyedni. Ekkor Dórának lenne igaza.

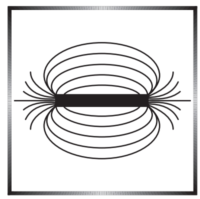
Amennyiben a kocka és folyadék hőtágulása (közelítőleg) egyforma mértékű, akkor semmi se fog történni, a kocka továbbra is lebegni fog.

Tehát bármelyiküknek igaza lehet, de az is előfordulhat, hogy mindketten tévednek.

Csóti Kristóf (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.)

37 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 13, hibás 8 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 4910. *Egy erdő belsejében a B pontból szeretnénk az A pontba eljutni. A fák között u sebességgel tudunk haladni tetszőleges irányban. Van azonban az erdőben egyetlen nyílegyenes és jól járható ösvény, amin ku $(k>1)$ sebességgel tudnánk haladni. Ez az ösvény elkerüli a B pontot, de átmegy az A ponton, és az AB egyenessel α szöget zár be. Milyen úton haladjunk, hogy a legrövidebb idő alatt jussunk el az A pontba?*

(*5 pont*) Közli: *Gáspár Merse Előd,* Budapest

A feladat többféle módszerrel is megoldható. Az alább bemutatott eljárások közül kettő fizikai (optikai, illetve hangtani) megfontolásokra épül, a harmadik a differenciálszámítás matematikai apparátusának felhasználásával jut el a végeredményig. (A három különböző gondolatmenetű megoldás jelöléseit úgy változtattuk meg, hogy az eredmények egymással könnyen összehasonlíthatóak legyenek. – A Szerk.)

I. megoldás. Oldjuk meg a feladatot fizikai eszközökkel! Használjuk a fényterjedést leíró *Fermat-elvet*: a fény két pont között olyan útvonalon terjed, amely mentén a fényterjedés ideje a szomszédos (a tényleges útvonaltól csak kicsit eltérő) útvonalak idejéhez képest a lehető legkisebb.

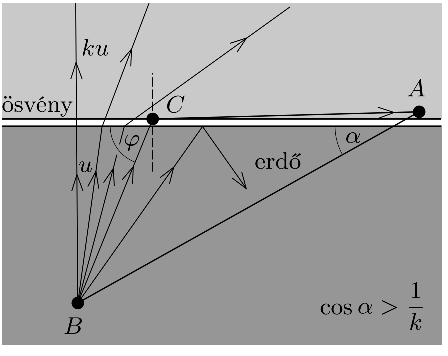
Tegyük fel, hogy az ösvény B-vel átellenes felén mindenhol ku sebességgel haladhatunk, és az A pont az ösvénytől egy „hajszálnyi” távolságra, de már az ösvény túloldalán helyezkedik el. (Ez érdemben nem módosítja a feladatot, hiszen ha már egyszer elértük az ösvényt, azon nyilván gyorsan és egyenesen érdemes haladjunk, nem pedig a túloldali erdőben görbe útvonal mentén és lassabban.)

Ebben az új megfogalmazásban a probléma a következő kérdéssel egyenértékű: Miként juthat el a fény egy optikailag sűrűbb közeg B pontjából az optikailag ritkább közeg A pontjába, ha a két közeget egy sík felület választja el egymástól és a relatív törésmutató (a fénysebességek aránya) k?

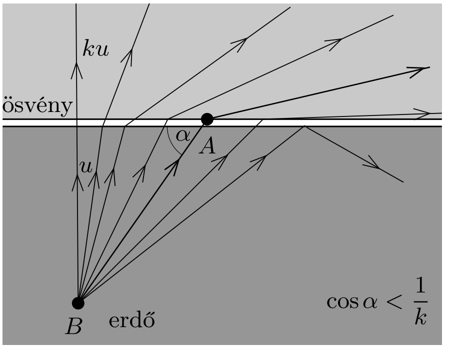
A B pontból kiinduló fénysugarak a két közeg határán megtörnek, illetve visszaverődnek. Ha a k törésmutató „elegendően nagy”, akkor a törési törvény szerint lesz egy olyan fénysugár, amelynek törési szöge $90°$, vagyis amelyik fénysugár a két közeg határán (az ösvény mentén) halad tovább és jut el az A pontig (*1a. ábra*). Ezen fénysugár beesési szöge az ábra jelöléseit használva éppen $90° - \varphi$, így a Snellius–Descartes-törvény szerint

$$\frac{\sin(90° - \varphi)}{\sin 90°} = \cos\varphi = \frac{1}{k}.$$

A közeghatárt a C ponttól balra elérő fénysugarak átjutnak az optikailag ritkább közegbe, a C-től jobbra érkező fénysugarak pedig teljes visszaverődést szenvednek. Az ábrán látható φ szög nyilván nagyobb, mint α, tehát a megadott k és α adatok között fenn kell álljon a $\cos\alpha > \frac{1}{k}$ egyenlőtlenség; ez adja meg az „elegendően nagy törésmutató” kifejezés pontos jelentését.



1a. ábra



1b. ábra

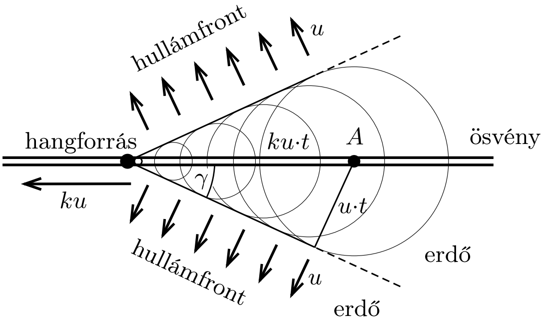
Amennyiben a törésmutató nem túl nagy (vagyis $\cos\alpha < 1/k$), a B-ből kiinduló fénysugarak egyike törésmentesen, mindvégig az optikailag sűrűbb közegben haladva jut el az A pontig (*1b. ábra*). Ilyen körülmények között az eredeti feladat megoldása: érdemes mindvégig az erdőben maradnunk, és ott egyenes úton haladva juthatunk el leghamarabb a B pontból az A pontig.

Németh Róbert (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Ha a B pontból valamilyen úton haladva a legrövidebb idő alatt jutunk az A pontba, akkor nyilván ugyanezen az útvonalon juthatunk leghamarabb az A pontból a B pontba. Vizsgáljuk a továbbiakban ezt a „megfordított” problémát!

Képzeljük el, hogy az A pontból indulva egy hangforrás mozog az ösvény mentén ku sebességgel, miközben folyamatosan olyan hanghullámokat kelt, amelyek

u sebességgel terjednek az erdőben ($k > 1$). Hol helyezkednek el azok a pontok, amelyeket a hanghullámok elérnek a hullámforrás indulásától számított t idő alatt? A különböző helyekről különböző időpillanatokban kiinduló gömbhullámok egy kúpot (az ún. *Mach-kúpot*) jelölnek ki (*2a. ábra*). A kúp csúcsa ku sebességgel



2a. ábra

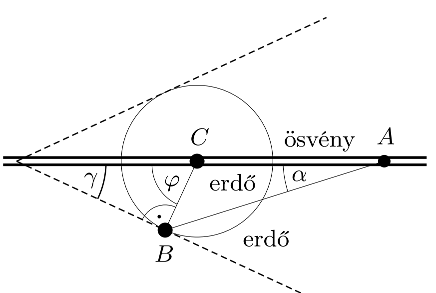
mozog, a kúp félnyílásszöge

$$\gamma = \arcsin\frac{u}{ku} = \arcsin\frac{1}{k},$$

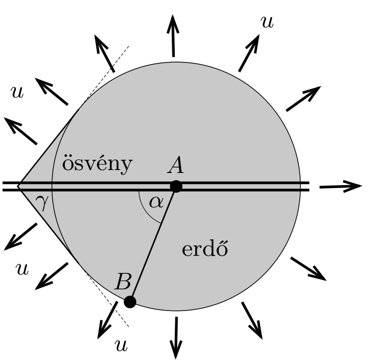
a kúp alkotói pedig u sebességgel mozogva távolodnak a szimmetriatengelytől (vagyis az ösvénytől). A γ szög (az ún. *Mach-szög*) egyértelműen meghatározható, hiszen a feladat szövege szerint $k > 1$.

Az idő múltával lesz egy olyan pillanat, amikor az egyre táguló kúp alkotója (vagyis a hullámfront) eléri a B pontot (*2b. ábra*). Tekintsük a B ponton átmenő, a hullámfrontra merőleges egyenes és az ösvény metszéspontját. Ezen C pontból kiinduló hullám éri el leghamarabb a B pontot, tehát ezen a ponton vezet át az eredeti feladat megoldása, a legrövidebb idejű útvonal is. Ezek szerint

$$\varphi = 90^\circ - \gamma, \quad \text{vagyis} \quad \cos\varphi = \sin\gamma = \frac{1}{k}.$$



2b. ábra



2c. ábra

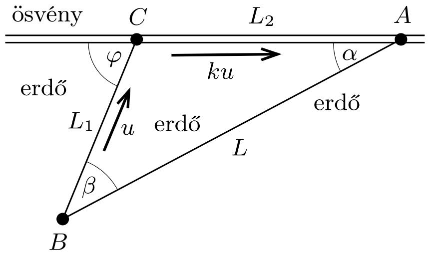
Természetesen (az ábrán választott mozgásirány esetén) a C pont nem lehet A-tól jobbra, vagyis $\varphi \geqslant \alpha$. Emiatt a fentebb leírt megoldás csak

$$\cos\alpha \geqslant \cos\varphi = \frac{1}{k}$$

teljesülése esetén helyes. A $k\cos\alpha = 1$ határesetben $\varphi = \alpha$, vagyis a C pont egybeesik A-val. Ilyenkor a legrövidebb idő, ami alatt eljuthatunk A-ból B-be (vagy B-ből A-ba) olyan útnak felel meg, amely mindvégig az erdőben halad.

Vajon melyik útvonalon haladó hullám éri el leghamarabb a B pontot, ha $k\cos\alpha < 1$? Ebben az esetben nem a Mach-kúp hullámfrontja, hanem az A pontból kiinduló gömbhullám éri el elsőként a B pontot (*2c. ábra*), vagyis a legrövidebb idejű mozgás mindvégig az erdőben halad.

Szakály Marcell (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata felhasználásával



3. ábra

III. megoldás. Jelöljük az A és B pont távolságát L-lel, azt a pontot pedig, ahol elérjük az ösvényt, C-vel (*3. ábra*). Az A és C, valamint a C és B pontok között nyilván egyenes utat érdemes választanunk. Az erdőben megtett út irányát a BA iránytól mért β szöggel, vagy az ösvény irányához viszonyított $\varphi = \alpha + \beta$ szöggel jellemezhetjük.

Az erdőben megtett út hossza (a szinusztétel alapján) $L_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} L$, az ösvényen megtett út hossza pedig $L_2 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} L$. A teljes menetidő a β szög függvényében:

$$t(\beta) = \frac{L_1}{u} + \frac{L_2}{ku} \equiv \frac{L}{u} \cdot \frac{\sin\alpha + \frac{1}{k}\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

A függvény (számunkra érdekes) értelmezési tartománya $0 \leqslant \beta \leqslant 90^\circ - \alpha$, hiszen nyilván nem éri meg az ösvényt (az ábrán vázolt elrendezés esetén) az A ponttól jobbra, vagy a B-hez legközelebbi ponttól balra elérni.

A menetidő minimumát a $t(\beta)$ függvény deriváltjának eltűnése határozhatja meg. Ha létezik olyan β szög az értelmezési tartomány belsejében, ahol

$$0 = t'(\beta) = \frac{L}{u} \cdot \frac{\frac{1}{k}\cos\beta\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta)\left(\sin\alpha + \frac{1}{k}\sin\beta\right)}{\sin^2(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{L}{u} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} \left[\frac{1}{k} - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

ott a haladási időnek szélsőértéke (esetünkben minimuma) lehet. Mivel sem $(L/u)\sin\alpha$, sem pedig $\sin(\alpha+\beta) \equiv \sin\varphi$ nem lehet nulla, a derivált csak akkor válhat nullává, ha

$$\frac{1}{k} = \cos(\alpha+\beta), \quad \text{vagyis} \quad k\cos\varphi = 1.$$

Mivel $\beta \geqslant 0$, vagyis $\varphi \geqslant \alpha$, a derivált nullává válásának feltétele csak

$$1 = k\cos\varphi \leqslant k\cos\alpha$$

esetben teljesülhet.

Amennyiben $k\cos\alpha < 1$ áll fenn, a $t(\beta)$ függvény monoton növekszik, így a legrövidebb idő a $\beta = 0$ szöghöz tartozik. Ilyen esetben (vagyis amikor az ösvényen haladás sebessége nem „elég nagy”) érdemes mindvégig az erdőben haladjunk, egyenes vonalban B-től az A pontig.

Kondákor Márk (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

59 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 30, hiányos (1–3 pont) 9, hibás 2 dolgozat.

P. 4935. *Egy fotonnak és egy elektronnak azonos a hullámhossza. Melyiknek nagyobb a mozgási energiája?*

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Budapest

Megoldás. Egy f frekvenciájú, λ_f hullámhosszúságú foton energiája:

$$E_\mathrm{f} = hf = h\frac{c}{\lambda_\mathrm{f}},$$

ahonnan a hullámhossz kifejezhető

$$\lambda_\mathrm{f} = \frac{hc}{E_\mathrm{f}}.$$

(h a Planck-állandó, c pedig a fénysebesség vákuumban.)

Atomfizikában gyakran használt összefüggés a relativisztikus energia-impulzus reláció:

$$E^2 = (Ic)^2 + E_0^2, \tag{1}$$

ahol E az elektron összenergiája, E_0 a nyugalmi energiája, I pedig a lendülete (impulzusa). Az elektron lendületét a de Broglie-féle anyaghullám hullámhossza segítségével is kifejezhetjük:

$$I = \frac{h}{\lambda_\mathrm{e}}.$$

$\lambda_\mathrm{e} = \lambda_\mathrm{f} = \lambda$ miatt a foton hullámhosszát be tudjuk helyettesíteni az elektron lendületének képletébe:

$$I = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\frac{hc}{E_\mathrm{f}}} = \frac{E_\mathrm{f}}{c}.$$

Ezt az (1) összefüggésbe beírva a következőt kapjuk: $E^2 = E_\mathrm{f}^2 + E_0^2$, ebből a foton mozgási energiája (ami az összes energiája) kifejezhető:

$$E_\mathrm{f} = \sqrt{E^2 - E_0^2},$$

az elektron mozgási energiája pedig $E_\mathrm{m} = E - E_0$.

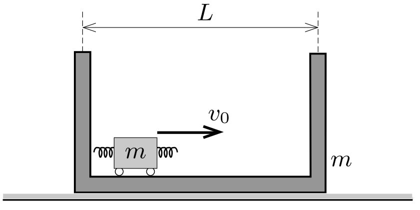
A két mozgási energiát egymással elosztva látszik, hogy

$$\frac{E_\mathrm{f}}{E_\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{E + E_0}{E - E_0}} > 1,$$

vagyis azonos hullámhosszúság esetén a *fotonnak nagyobb* a mozgási energiája.

Csuha Boglárka (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 11. évf.)

44 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 21, hibás 2 dolgozat.



P. 4946. *Egy m tömegű kiskocsi szabadon mozoghat egy szintén m tömegű doboz belsejében. A doboz vékony olajréteggel borított asztalon mozoghat, a súrlódási erő csak a doboz sebességétől függ: $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v}$. Kezdetben a doboz áll, a kiskocsi a bal oldali faltól indulva v_0 nagyságú sebességgel kezd mozogni jobbra. Hányszor fog rugalmasan ütközni az ℓ hosszúságú kiskocsi az L hosszú dobozzal? (A rugalmas ütközést a kiskocsin lévő rugók biztosítják, ezek hossza sokkal kisebb, mint ℓ.)*

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

Megoldás. Először a kiskocsi elindul v_0 sebességgel és $p_0 = mv_0$ impulzussal. Amikor a kiskocsi eléri a doboz falát, akkor a doboz és a vele megegyező tömegű kiskocsi „sebességet cserél”, vagyis a kiskocsi megáll, a doboz pedig elindul p_0 impulzussal az olajon. A kiskocsi a következő ütközésig áll, a doboz viszont az olajon való súrlódástól lassul. A doboz mozgásegyenlete:

$$\Delta p = F\Delta t = -kv\Delta t = -k\Delta s.$$

Látható, hogy a doboz impulzusának csökkenése kifejezhető a doboz által megtett úttal, azzal arányos. Az egyes ütközések közt a doboz $L - \ell$ utat tesz meg, ezután átadja impulzusát a kiskocsinak, amely a következő ütközést követően visszaadja az impulzust a doboznak. Ezért a doboz impulzusváltozása két-két ütközésenként: $\Delta p = -k(L - \ell)$.

A folyamat elején 1 ütközés biztosan történik: a kiskocsi nekimegy a doboznak. Ha a továbbiakban még n-szer ütközik a doboz és a kiskocsi, majd a kiskocsi és a doboz, akkor összesen $N = 1 + 2n$ ütközés következik be. (Ha a doboz meglöki a kiskocsit, akkor az egyenletesen mozgó kiskocsi biztosan ütközni fog még a dobozzal.) Az ütközéspárok n számát (vagyis azt, hogy hányszor löki meg a doboz a kiskocsit) a doboz egyre csökkenő impulzusa határozza meg.

Az utolsó ütközés akkor történik, amikor a megmaradt impulzus már nem elég ahhoz, hogy a doboz megtegyen $(L-\ell)$ utat, de eggyel kevesebb n-nél a doboz az üközés után még képes $(L-\ell)$ út megtételére:

$$mv_0 - nk(L-\ell) < k(L-\ell), \qquad \text{de} \qquad mv_0 - (n-1)k(L-\ell) > k(L-\ell),$$

azaz

$$n < \frac{mv_0}{k(L-\ell)} < n+1.$$

Ezek szerint az ütközések száma az egészrész-függvény segítségével így adható meg:

$$N = 2\left[\frac{mv_0}{k(L-\ell)}\right] + 1.$$

Nagy Botond (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

24 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 2 dolgozat.

Versenyfelhívás a 2018-as Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyének[*] magyarországi válogatójára

Ha szereted a fizikát, a kísérletezést, jól beszélsz angolul, és egy életre szóló élményre vágysz, akkor itt a helyed!

A Fizika Világbajnokságnak is nevezett IYPT közel 30 ország csapatának nyújt lehetőséget, hogy összemérjék tudásukat, rátermettségüket és kommunikációs készségüket 17 előre megadott, ún. nyílt végű fizikai problémán keresztül.

Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell! A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be két rivális csapatnak. A másik két csapat közül az egyik megvizsgálja az előadás fizikai tartalmát egy kulturált vita formájában, a másik pedig komplex értékelést ad az elhangzottakról. A három csapat teljesítményét fizikusokból és fizikatanárokból álló nemzetközi zsűri bírálja el.

Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (HYPT) a `hypt.elte.hu` oldalon való regisztráció határideje: **2017. október 24. éjfél.**

A jelentkező diákoknak egy kiválasztott problémáról 2017. november 24-ig kell elküldeni egy *magyar nyelvű* dolgozatot. Ezen dolgozatok alapján a legjobb

[*]International Young Physicists' Tournament, IYPT.

beküldők az ELTE TTK-n december közepén megrendezésre kerülő szóbeli fordulón vehetnek részt. Az induló diákoknak itt az általuk kidolgozott feladat *angol nyelvű* bemutatásában kell összevetniük tudásukat.

A decemberi fordulót idén 100 000 forint összdíjazással hirdetjük meg, amiben az (évfolyamonként) első helyezett versenyzők részesülnek.

A decemberben kiválasztott 8 diák az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékén végezheti a további felkészüléshez szükséges kutatásait. A felkészülés során nyújtott teljesítmény alapján 3 diák indulhat az osztrák AYPT versenyen, az 5 legjobb diák pedig bekerül a Pekingben megrendezésre kerülő 31. IYPT magyar csapatába.

Jelentkezés, a feladatok szövege és további információk a `hypt.elte.hu` weboldalon, illetve az `email@hypt.elte.hu` email címen.

Néhány példa a 2018-ra kitűzött IYPT feladatok közül

1. Találd fel magad! Készíts egy egyszerű szeizmográfot, amely mechanikus, optikai vagy elektromos úton képes lokális rezgések felerősítésére. Határozd meg a készüléked tipikus válaszgörbéjét, és vizsgáld meg a csillapítási állandót befolyásoló paramétereket. Milyen maximális erősítést tudsz elérni?

4. Hérón szökőkútja. Építs egy Hérón-szökőkutat, és magyarázd meg hogyan működik. Vizsgáld meg, hogy a releváns paraméterek hogyan befolyásolják a vízoszlop magasságát.

12. Curie-pont motor. Készíts egy saját tengelye körül könnyen forgó nikkel korongot. Helyezz egy mágnest a korong peremének közelébe, majd kezd el melegíteni ugyanezt az oldalt, ekkor a korong forgásba jön. Vizsgáld meg a forgást befolyásoló paramétereket, és optimalizáld az eszközt az egyenletes forgás eléréséhez.

A további feladatok megtalálhatók az `iypt.org` vagy a `hypt.elte.hu` oldalon.

Magyar aranyérem Szingapúrban (is)

Az idén 30. alkalommal megrendezett Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyén (eredetileg: International Young Physicists' Tournament, röviden: IYPT) a magyar csapat az aranyérmet jelentő 4. helyezést érte el Szingapúrban. Az egész éves felkészülés sikeres lezárása mellett sikerült érdekes élményekkel gazdagodni az ázsiai miniállamban.

Ebben az évben is nagyon sok munka és tanulás előzte meg a nemzetközi versenyt. Az ELTE TTK épületében található diáklaborunk mellett a felkészülés során idén két táborban és egy felkészülési versenyen is részt tudtunk venni. Már a felkészülési verseny is jól sikerült, hiszen a *Granning Sára, Hamliton-Meikle Phyllida,* és *Vavrik Márton* alkotta csapat az abszolút első helyezést érte el a leobeni Austrian Young Physicists' Tournament versenyen, 8 ország 16 csapatát utasítva maga mögé.

A magyar csapat felkészülését idén is az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszék két adjunktusa, *Ispánovity Péter Dusán* és *Jenei Péter,* valamint *Asbóth János* kutató, korábbi aranyérmes IYPT versenyző, valamint *Boross Péter, Széchenyi Gábor* doktoranduszok és *Hömöstrei Mihály* fizikatanár segítették. A magyar résztvevők a „Gee-HawWhammy Diddle”, a „Gyors lánc”, a „Metronómszinkonizálás”, a „Rezonáló poharak”, a „Lufi légkürt” és a döntőben a „Labda a csőben” című problémákat mutattatták be a zsűrinek és az ellenfél csapatoknak. A feladatokról és a megoldásokról, valamint a versenyről és a felkészülésről röviden a `hypt.elte.hu` oldalon, valamint a `facebook.com/hypt.elte.hu` csoportban kapható információ.

A verseny melletti programok idén sem maradhattak el, sőt a csapat a versenyt követően még maradt is néhány napot, hogy jobban megismerhesse Szingapúrt. Természetesen megnéztük Szingapúr nevezetességeit, mint pl. Merlion-szökőkutat vagy a Garden by the Bay-t. Egész napos szórakozást jelentettek még az Universal Studios nevű élménypark, a szingapúri állatkert és a tengerparti fürdőzés is. Versenyen kívüli legnagyobb teljesítményünk pedig talán az volt, amikor az egész csapat bátran kipróbálta a helyi ételkülönlegességet, a duriános fagyit – melynek leginkább fokhagymás fasírtra emlékeztető íze volt.

A 2017-es aranyérmes magyar IYPT csapat tagjai:

Bánóczki Tímea (Budapest, Német Nemzetiségi Gimn., 12 évf., felvételt nyert: BME mechatronika szakra);

Varga-Umbrich Eszter (Pápai Református Kollégium Gimn., 11. évf.);

Nagy Balázs Norbert (Budapest, Német Nemzetiségi Gimn., 12 évf., felvételt nyert: BME mechatronika szakra);

Svastits Áron (Budapest, Piarista Gimnázium, 12. évf., felvételt nyert: BME mechatronika szakra);

Szakály Marcell (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 11. évf.).

Hivatalos partnereink:

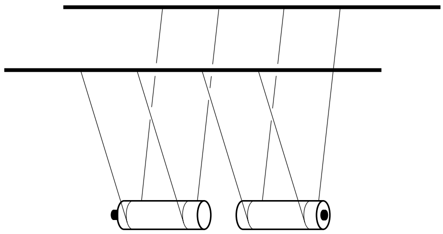
EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Eötvös Loránd Fizikai Társulat

ELTE TTK: Anyagfizikai Tanszék

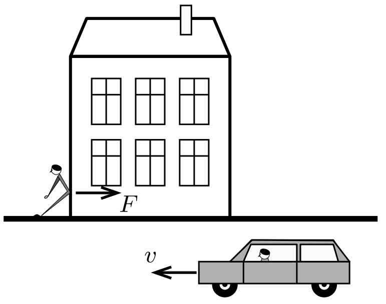
Hömöstrei Mihály, a HYPT szervezője

Fizikából kitűzött feladatok



M. 371. Ütköztessünk egymással két – bifilárisan felfüggesztett – (azonos fajtájú, AA-típusú) ceruzaelemet úgy, hogy az elemek a hossztengelyük mentén mozogjanak, és a negatív (laposabb) részük csapódjon össze. Határozzuk meg az *ütközési számot* (vagyis azt, hogy mekkora az ütközés utáni és az ütközés előtti relatív sebességek aránya). Végezzük el a mérést két új elemmel, egy új és egy lemerült elemmel, illetve két lemerült elemmel is!

(*6 pont*) Közli: *Härtlein Károly,* Budapest



G. 609. Az *ábrán* látható ember sajátos módon támaszkodik egy házfalnak, arra F erőt fejt ki. Ha a talajhoz rögzített koordináta-rendszerből nézzük, a falnak támaszkodó ember nem végez munkát, mivel az elmozdulása nulla. Az autóban v sebességgel utazó megfigyelő szerint az ember hosszú úton folyamatosan fejti ki az erőt, tehát munkát végez. Miért nem fárad ki az így pihenő ember?

(*3 pont*)

G. 610. Egy m tömegű, c fajhőjű, L olvadáshőjű és nagyon jó hővezető anyagból álló meteorit, amikor eléri a Föld légkörét, hőmérséklete ΔT-vel van az olvadáspontja alatt. A légkörben a súrlódás miatt P átlagos teljesítménnyel fejlődik benne hő. Mennyi idő alatt olvad el az egész meteorit?

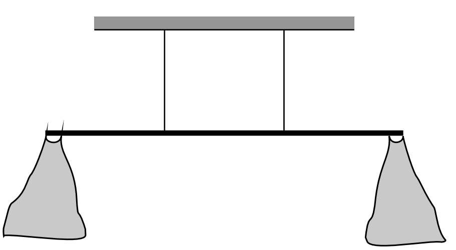
(*3 pont*) *Példatári feladat nyomán*

G. 611. Mekkora területű a 30 cm vastag, úszó jégtábla, ha elbír egy 80 kg-os embert?

(*3 pont*)

G. 612. Az M3-as autópálya budapesti bevezető szakaszához közeli ház ablakából látjuk, amint egy – Ferihegyen leszállni készülő – Boeing 737-es gép elsuhan felettünk. A gépet folyamatosan követi egy varjú (látszólag „mellette repül”), és a madár teljes szárnymérete ugyanakkorának látszik, mint a repülő egyik szárnya. Becsüljük meg, hogy milyen magasan és mekkora sebességgel repülhet a varjú! (A hiányzó adatoknak nézzünk utána!)

(*3 pont*)

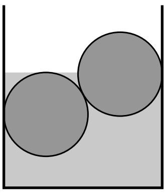


P. 4960. Egy 1 kg tömegű, homogén rudat két függőlegesen álló fonál segítségével vízszintes helyzetben a harmadolópontjaiban felfüggesztünk. A rúd két végére egy-egy könnyű zacskót akasztunk, majd először az egyiket, utána pedig a másikat is megtöltjük keksszel. A rúdnak mindvégig vízszintesen kell maradnia úgy, hogy közben nem érinthetjük meg. Mennyi kekszet tehetünk a két zacskóba összesen?

(*4 pont*) Közli: *Hilbert Margit,* Szeged

P. 4961. $T=0{,}2$ s periódusidejű harmonikus rezgőmozgást végző test $x=3$ cm-es kitérését $\Delta t=0{,}01$ s alatt duplázza meg. Mekkora a rezgés amplitúdója?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



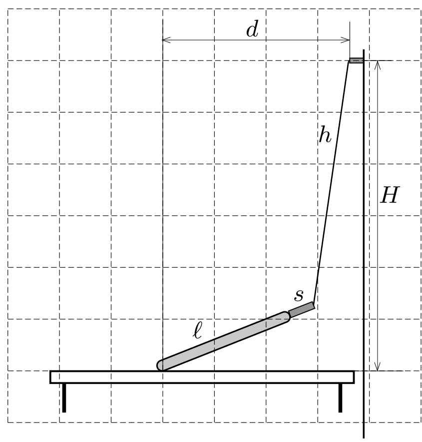
P. 4962. Egy függőleges falú, vizet tartalmazó csatornában két 45 kg tömegű, henger alakú farönk található. Méretük és anyagi minőségük azonos, egymással és a csatorna falával érintkeznek. Az egyiket éppen ellepi a víz, a másik félig merül be a vízbe. A súrlódás mindenhol elhanyagolható.

a) Mekkora a farönkök sűrűsége?

b) Mekkora erőkkel nyomják a farönkök a függőleges falakat?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 4963. Egy vízszintes asztallap felett H magasságban van egy konnektor. A mobiltelefonunk töltőjének h hosszú vezetéke hajlékony, a telefonhoz csatlakozó része s hosszú, könnyű és merev. A töltőhöz csatlakoztatott telefont az egyik rövidebb oldalával letámasztjuk az asztalra, de bizonyos helyzetekből – ha a d távolság nagyobb, mint a *méretarányos ábrán* látható érték – a telefon „magától” elcsúszik. A telefon hossza ℓ, vastagsága elhanyagolható, és a tömegeloszlása homogénnek tekinthető.



Határozzuk meg *szerkesztéssel,* hogy mekkora az asztallap és a telefon közötti tapadó súrlódási együttható számszerű értéke!

(*4 pont*)

P. 4964. Legalább mekkora erővel lehet felborítani egy jégen csúszó jégkockát? (A súrlódás elhanyagolható.)

(*5 pont*) *Példatári feladat*

P. 4965. Egy hajlékony, könnyen csúszó gyöngysornak éppen a fele egy vízszintes asztallapon fekszik, a másik fele függőlegesen lóg lefelé az asztal szélénél. Ha a gyöngysort kezdősebesség nélkül elengedjük, az – egyre gyorsabban mozogva – lecsúszik az asztalról. A gyöngysor bizonyos helyzetében az asztal szélén a gyöngyök nem hirtelen kanyarodnak be, hanem túlszaladnak az asztal szélén, és a lelógó részen ostorszerű hullámzás indul el. A gyöngysor hosszának hányad része van még az asztalon, amikor ez a hullámosodás beindul?

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 4966. Könnyű bebizonyítani, hogy egy H magasságú embernek legalább $H/2$ magasságú falitükörre van szüksége ahhoz, hogy tetőtől talpig láthassa magát benne. Persze a tükröt alkalmas magasságban kell a falon elhelyeznie. De mi a helyzet akkor, ha a tükör nem függőleges?

Mekkora a minimális tükörméret, ha a tükör síkja α szöget zár be a függőlegessel, és a H magasságú egyén szeme a tükörtől d távolságra van?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 4967. Egy nagy méretű síkkondenzátor fegyverzetei kezdetben függőlegesek. Az $\ell = 10$ cm hosszúságú fonálinga felső vége a fegyverzetektől egyenlő távolságban van rögzítve. A kis tömegű ingatest és a kondenzátor is elektromosan töltött. Ekkor a fonál a függőlegessel $\alpha = 30°$-os szöget zár be.

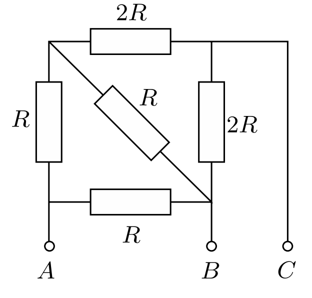
a) Mekkora és milyen irányú β szöggel kell a kondenzátort megdönteni, hogy a fonál a kondenzátor lemezeivel párhuzamos legyen?

b) A kondenzátor ilyen helyzetében legalább mekkora kezdősebességgel kell az ingatestet a fonálra merőlegesen elindítani, hogy végighaladjon a fonál által megengedett körpályán?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

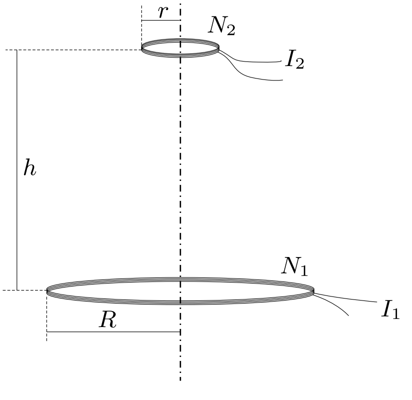
P. 4968. Egy elektromos főzőlap fűtőszálait az *ábra* szerint lehet kapcsolni. Ha az A–B pontokra adjuk a feszültséget, akkor m tömegű vizet lehet felforralni egy bizonyos idő alatt. Mennyi vizet lehet felforralni ennyi idő alatt, ha a feszültséget a B–C, illetve az A–C pontokra kapcsoljuk?

(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros



P. 4969. Két lapos tekercs közös szimmetriatengelyen, egymástól h távolságra az *ábrán* látható módon helyezkedik el. A tekercsek menetszáma N_1, illetve N_2, sugaruk R és r ($r \ll R$), valamint I_1, illetve I_2 erősségű áram folyik bennük. Mekkora erőt fejt ki egymásra a két tekercs?

(*6 pont*) *A Kvant nyomán*



❄

Pontversenyen kívüli feladat

A KöMaL pontversenyében kitűzött, szokásos számolási és mérési feladatokon kívül a tudományos és műszaki életben sokszor találkozhatunk olyan problémákkal, amelyek kezeléséhez a fizikai és matematikai ismeretek mellett közgazdasági és jogszabályi információkra, pályázatírási készségre, egymásnak részben ellentmondó feltételek mellett döntéshozatali bátorságra is szükségünk lehet.

Ilyen feladatok közzétételével, azokat megfelelő háttérinformációval kiegészítve megpróbáljuk a KöMaL hagyományos tevékenységi körét bővíteni, „életszerű" helyzetek (esetleírások) ismertetésével és a hozzájuk kapcsolódó feladatokkal ízelítőt nyújtani azon problémák sokszínűségéből, amelyekkel az iskola (egyetem) elvégzése után találkozni fognak Olvasóink.

A feladatok a KöMaL honlapján találhatók meg (`http://www.komal.hu/cikkek/fizika-mtaek/fizika-mtaek.h.shtml`), elektronikusan küldhetők be a `szerk@komal.hu` címre a probléma sorszámának és címének feltüntetésével az ott megjelölt határidőig. Ezek a feladatok nem számítanak bele a pontversenybe, de a megoldásokat értékeljük, és a legjobbakat díjazzuk.

Az első ilyen jellegű probléma: *Elveszett radioaktív sugárforrás megtalálása.* (Beküldési határidő: 2017. november 10. A feladat az MTA Energiatudományi Kutatóközpont támogatásával kerül kitűzésre.)

❄

Beküldési határidő: 2017. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 67. No. 7. October 2017)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 415): **K. 553.** A bag contains the numbers 1 to 200, written on cards. Andrew and Bill take turns drawing number cards one by one until the bag is empty. At the end, each of them adds his numbers together. Given that the first number drawn by Andrew is 3 and Bill's first number is 170, by what maximum amount may Andrew's sum exceed Bill's sum at the end? **K. 554.** The integers 1 to 2017 are listed as follows: first those numbers not divisible by 3 are written down in increasing order. Then the list continues with those numbers that are divisible by 3 but not divisible by 9, followed by those divisible by 9 but not divisible by 27, and so on. *a*) What is the last number of the list? *b*) In which position will 2017 be in the list? *c*) In which position will 2016 be in the list? **K. 555.** For which three consecutive integers is their product five times their sum? **K. 556.** In a lattice of unit squares, is there a pentagon whose vertices are all lattice points and whose sides are all $\sqrt{5}$ units long? **K. 557.** The midpoints of the sides of a square $ABCD$ are P, Q, R

and S. They are connected to the vertices of the square as shown in the *figure.* Prove that $AT = TV$. **K. 558.** For which positive integers n will $n^4 + n^2 + 1$ be a prime?

New exercises for practice – competition C (see page 416): **Exercises up to grade 10: C. 1434.** In a running race organized in Munich, the participants started simultaneously and ran along a set path. 30 minutes after the start of the race, a car set out from the starting line and followed the runners at uniform speed. For each participant, the race terminated whenever the car caught up with him or her. The female winner was overtaken by the car at 68 km, and the male winner was overtaken at 92 km, 1 hour and 36 minutes later. Assuming that they also ran at uniform speed, what were the speeds of the two winners, and what was the speed of the car? **C. 1435.** Inside a square of side 2 units, semicircles are drawn over two adjacent sides as diameters. What is the radius of the circle that touches one semicircle and the side of the square internally, and touches the other semicircle externally? (Proposed by *D. Fülöp,* Pécs) **Exercises for everyone: C. 1436.** We have eight red cubes and eight white cubes, all congruent. We select eight cubes and form a large cube out of them. How many differently coloured large cubes may we obtain? Two cubes are differently coloured if they cannot be rotated into each other. (*Matlap,* Kolozsvár) **C. 1437.** Given that each of nine distinct lines divides the area of a square in a $2:3$ ratio, prove that there are three concurrent lines among them. **C. 1438.** Prove that the equation $x^2 + y^3 = z^4$ has no solution of prime numbers x, y, z. **Exercises upwards of grade 11: C. 1439.** For what value of c will the simultaneous equations $(x-5)^2 + (y-1)^2 = c$, $(x-1)^2 + (y-5)^2 = c$ have a unique solution? **C. 1440.** In the unit cube $ABCDA'B'C'D'$, let M and N denote the perpendicular projections of points D' and B onto the diagonal $B'D$ of the cube, respectively. Determine the area of quadrilateral $BND'M$. (*Matlap,* Kolozsvár)

New exercises – competition B (see page 417): **B. 4894.** Seven thieves have stolen some golden coins, and now each of them takes a share of the loot in the following manner. They proceed in alphabetical order of their names, and everyone takes as many coins as the sum of the digits of the number of coins in the heap not distributed yet. The last coin is removed when two full circles are completed. It turns out that everyone has received the same number of coins, only the chief got more. What was the position of the chief in the alphabetical order? (*4 points*) (*Matlap,* Kolozsvár) **B. 4895.** Prove that if $n-1$ and $n+1$ are both primes and $n > 6$ is an integer then $n^2(n^2+16)$ is divisible by 720. (*3 points*) (*English competition problem*) **B. 4896.** Let A_1, B_1, C_1, D_1 denote the midpoints of the sides of a convex quadrilateral $ABCD$. Let A_2, B_2, C_2, D_2 denote the midpoints of the sides of the quadrilateral $A_1B_1C_1D_1$. The procedure is continued. Prove that if quadrilateral $A_1B_1C_1D_1$ is cyclic then quadrilateral $A_{2017}B_{2017}C_{2017}D_{2017}$ is also cyclic. (*3 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 4897.** Given n points in the plane, show that it is possible to select three, denoted by A, B and C, such that $\angle ABC \leqslant 180°/n$. (*4 points*) **B. 4898.** Let A be a four-element set of positive integers such that $ab + 13$ is a perfect square for all $a, b \in A$, $a \neq b$. Prove that each element of A leaves a remainder of 2 when divided by 4. (*4 points*) (Proposed by *G. Nyul,* Debrecen) **B. 4899.** The degree of each vertex of a simple planar graph G is 3, and G can be drawn in the plane with its edges represented by non-intersecting unit line segments. Show that G has at least 8 vertices. (*5 points*) **B. 4900.** Let K be a convex shape symmetric in the origin, let e be a line through the origin, and let e' be any line parallel to e. Let, furthermore $\#H$ denote the number of lattice points in a set H. Prove that $\#(K \cap e) + 1 \geqslant \#(K \cap e')$. (*5 points*) **B. 4901.** An epidemic broke out in Smurf village after a few residents contracted a disease. Luckily, every smurf recovers from the illness in one day, and then they will be immune to the disease for another day. However, from the following day onwards they may catch the disease again. The transition between the sick and healthy states always occurs at night when the smurfs are sleeping. Unfortunately, the smurfs never give up their habit of visiting all their friends every day, not even when they are ill. So when a sick smurf meets a healthy but not immune one, the latter will inevitably catch the disease. Given that Smurf village has 100 inhabitants, show that the epidemic will necessarily terminate by the 101th day following the outbreak. (*6 points*) (Collected at the *Budapest Univ. Technology and Economics*) **B. 4902.** Let A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 and A_4B_4 be four parallel line segments of different lengths given in the plane. For any $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, let M_{ij} denote the intersection of lines A_iB_j and A_jB_i. Show that the lines $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$ and $M_{14}M_{23}$ are either concurrent or parallel. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 419): **A. 704.** A regular triangle has side length n. We divided its sides into n equal parts and drew a line segment parallel with each side through the dividing points. A lattice of $1+2+\dots+(n+1)$ intersection points is thus formed. For which positive integers n can this lattice be partitioned into triplets of points which are the vertices of a regular triangle of side length 1? (Proposed by *Alexander Gunning,* Cambridge, UK) **A. 705.** Triangle ABC has orthocenter H. Let D be a point distinct from the vertices on the circumcircle of ABC. Suppose that circle BHD meets AB at $P \neq B$, and circle CHD meets AC at $Q \neq C$. Prove that as D moves on the circumcircle, the reflection of D across line PQ also moves on a fixed circle. (Proposed by *Michael Ren,* Andover, Massachusetts, USA) **A. 706.** Let $\mathbb{Z}^+$ denote the set of positive integers. Find all functions $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ which satisfy the following: $f(mn) = f(m)f(n)$ for all $m, n \in \mathbb{Z}^+$, and $f^{(n)}(n) = n$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$ (in other words, $f\Big(f\big(\dots\big(f(n)\big)\dots\big)\Big) = n$, where there are n pairs of brackets on the left-hand side). (*Korean problem*)

Problems in Physics

(see page 441)

M. 371. Suspend two alike AA battery bifilarly and make them collide, such that they move along their longer symmetry axis, and collide with their negative terminals, which is on their flatter sides. Determine the *coefficient of restitution* (which is the ratio of the relative velocity after collision to that of before collision). Carry out the measurement with two new batteries, with a new one and a discharged one, and with two discharged ones.

G. 609. A man leans against the wall of a house in a peculiar way as shown in the *figure,* and exerts a force of F onto the wall. If he is observed from the reference frame of the ground, the man does not perform work, because his displacement is zero. According to another observer who is travelling in a car, moving at a speed of v, the man exerts a constant force while moving a long distance, so he does work. Why doesn't the man leaning against the house get exhausted? **G. 610.** A meteorite of mass m, of specific heat capacity c and of specific latent heat of fusion L, consists of some material which is extremely good heat conductor. When it reaches the atmosphere of the Earth the temperature of the meteorite is ΔT below its melting point. In the atmosphere due to friction heat is generated in it at a rate of P. How long does it take for the meteorite to be melted totally? **G. 611.** What is the area of a floating ice floe of thickness 30 cm if it can hold an 80 kg man? **G. 612.** From the window of a house close to the M3 motorway stretch, starting at Budapest, we observe a Boeing 737 – ready to land at Ferihegy – flying above us. A crow permanently follows the plane (seemingly the "bird flies next to the plane"), and the wingspan of the crow seems to have the same length as the length of one of the wings of the plane. Estimate at what height and at what speed the crow flies. (Look up the missing data.)

P. 4960. A uniform density rod of mass 1 kg is suspended horizontally at its trisecting points with two vertical threads. Two light bags are attached to the ends of the rod (one to each end) then first only one of them and then the other one as well were filled with biscuits. The rod must stay in its horizontal position all the time, such that it cannot be touched. Altogether how much biscuit can be put into the two bags? **P. 4961.** An object executes simple harmonic motion of period $T = 0.2$ s. It takes $\Delta t = 0.01$ s to double its displacement of $x = 3$ cm. What is the amplitude of the motion? **P. 4462.** There are two cylinder-shaped wooden billets, each having a mass of mass 45 kg, in a vertical wall sewage, which contains water in it. The two billets have the same size and the same material; they touch each other and the walls of the sewage. One of them is totally under the water, whilst only half of the other one is immersed into the water. Friction is negligible everywhere. *a*) What is the density of the wood? *b*) What are the forces exerted by the billets on the vertical walls? **P. 4963.** There is a socket at a height of H above a horizontal tabletop. The charger of our mobile phone has a flexible wire of length h and the length of the small, light and rigid part which is joined to the phone is s. The phone which is attached to the charger is put onto the table such that it touches the table with one of its shorter side, but from some positions – when the distance d is greater than the value shown in the *to scale figure* – the phone slips. The length of the phone is ℓ, its width is negligible, and it has uniform density. Determine *with construction* the numerical value of the coefficient of static friction between the tabletop and the phone. **P. 4964.** What is the least force with which an ice cube sliding on ice can be turned over? (Friction is negligible.) **P. 4965.** Just half of a flexible pearl necklace, which can slip easily, is lying on a horizontal tabletop, whilst its other half is hanging down vertically, at the edge of the table. If the necklace is released without initial speed, then it slides down from the tabletop – moving faster and faster. At some certain position of the necklace, next to the edge of the table the beads do not turn abruptly, but move over the edge, and the hanging part of the necklace begins to wave as a whip. What fraction of the necklace is on the table when this wavy motion begins? **P. 4966.** It is easy to show that the height of a mirror in which a man of height H can see himself from top to bottom is at least $H/2$. Of course the mirror must be placed to the appropriate height on the wall. But what happens when the mirror is not vertical? What is the least size of the mirror, when the angle between the plane of the mirror and the wall is α, and the eyes of the observer of height H is at a distance of d from the mirror? **P. 4967.** Initially the plates of a big parallel plate condenser are vertical. The top end of the thread, of length $\ell = 10$ cm, of a simple pendulum is fixed at a point which is equidistant from the two plates. Both the condenser and the small-mass pendulum bob are charged. The angle between the thread and the vertical is $\alpha = 30^\circ$. *a*) At what angle and into which direction should the plates of the condenser be tilted in order that the thread gets parallel to the plates of the condenser? *b*) At this position of the condenser what is the least initial speed at which the bob should be pushed perpendicularly to the thread in order that the bob moves along the circular path to which it is restricted by the thread? **P. 4968.** The heating elements of an electric heater can be connected as shown in the *figure.* When voltage is applied across points A and B, then during a certain amount of time, water of mass m can be boiled. How much water can be boiled during the same amount of time when the voltage is applied across points B and C or across points C and A? **P. 4969.** Two flat coils, the symmetry axis of which coincide, are at a distance of h from each other, as shown in the *figure.* The number of turns of the coils are N_1 and N_2, their radii are R and r ($r \ll R$), and the values of the current flowing in them are I_1 and I_2, respectively. What is the force exerted between the two coils?